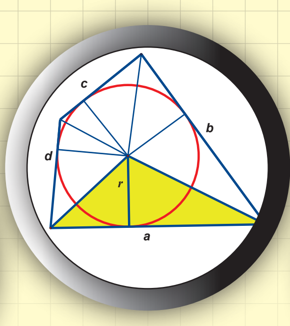
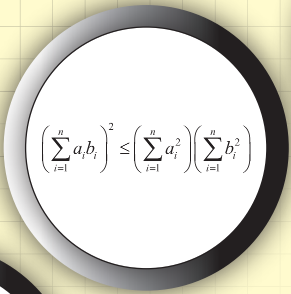
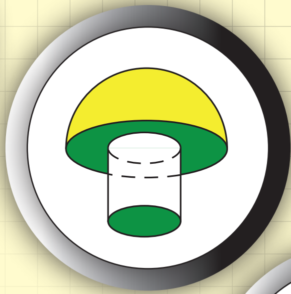
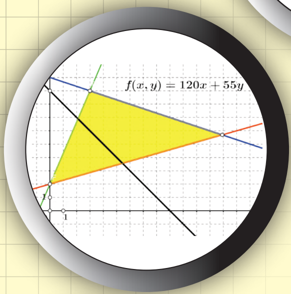
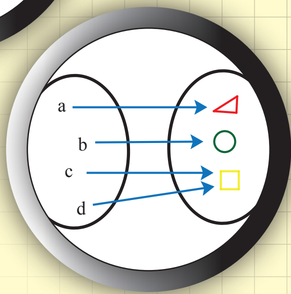


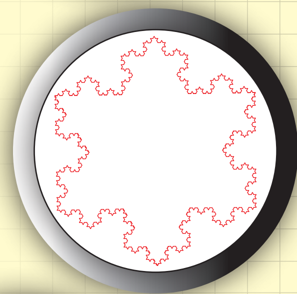


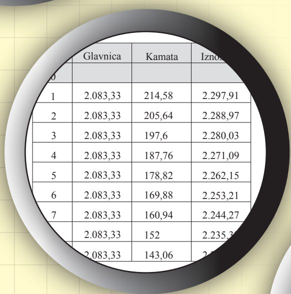


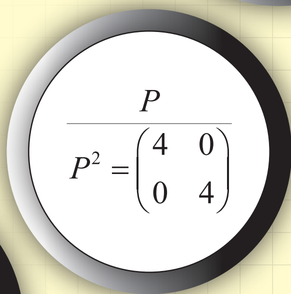


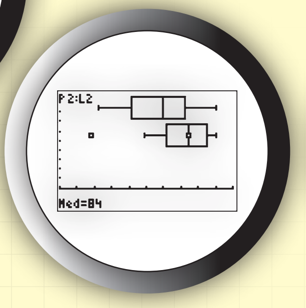


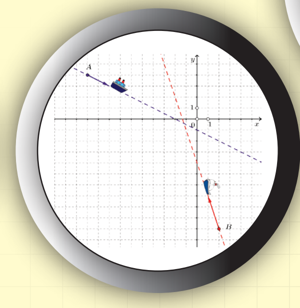
Matematika između realnog i virtualnog











Priručnik za nastavnike

Sadržaj ove publikacije/emitiranog materijala isključiva je odgovornost XV. gimnazije

Europska unija
Ulaganje u budućnost

STRUKTURNI I INVESTICIJSKI FONDOVI

ESF RAZVOJ LJUDSKIH POTENCIJALA

Projekt je sufinancirala Europska unija iz Europskog socijalnog fonda

1. Geometrija 1

1.1. Karakteristične točke trokuta 1

U čemu je problem?

Nastavnik će s učenicima ponoviti tražene definicije:

- **Srednjica trokuta** dužina je koja spaja polovišta dviju stranica trokuta.
- **Težišnica trokuta** dužina je koja spaja vrh trokuta sa polovištem nasuprotne stranice.
- **Simetrala dužine** pravac je koji je okomit na tu dužinu i prolazi njezinim polovištem.
- **Simetrala kuta** pravac je koji dijeli kut na dva jednaka dijela.
- **Visina trokuta** dužina je koja je okomita na pravac na kojem leži stranica trokuta, a rubne točke su joj na pravcu na kojem leži stranica i nasuprotni vrh trokuta.

Na ispravnosti posljednje u ovom trenutku nije potrebno inzistirati, već će ona biti utvrđena nakon konstrukcije.

Potražite pomoć tehnologije.

Za odvijanje aktivnosti predviđena su dva školska sata. Pretpostavlja se upotreba računala i programa dinamične geometrije. Idealni uvjeti pretpostavljaju da svaki učenik raspolaže svojim računalom.

Većinu ovih sadržaja učenici su obradili u osnovnoj školi pa preporučamo samostalni rad učenika jer će se tako učenici prisjetiti pojedinih pojmova i svojstava. Nastavnik pritom aktivnost treba pažljivo mentorirati kako bi od ranije poznati pojmovi i svojstva bili na ispravan način ponovljeni. Aktivnost je pogodna za razlikovanje svojstva koje uočavamo i matematičkog dokaza tog svojstva. Učenici će rado svojstvo koje vide na ekranu računala zamijeniti za dokaz pa uzastopno treba ponavljati kako uočeno svojstvo nije dokaz, pa čak i kad dokaz ne provodimo, treba napominjati da dokaz postoji. Očekuje se da će učenici trebati i pomoć pri upotrebi tehnologije.

Tijekom ove aktivnosti učenici će:

- istražiti svojstva srednjice trokuta, simetrale kuta, simetrale stranice
- istražiti svojstva karakterističnih točaka trokuta

- prepoznati i opisati sukladnost trokuta
- rabiti poučke o sukladnosti trokuta.

Srednjica trokuta

Učenici će se prisjetiti definicije srednjice, nacrtati trokut, konstruirati srednjicu i mjeriti duljinu srednjice i nasuprotne stranice. Mijenjanjem trokuta uočit će da su srednjica i nasuprotna stranica paralelne te da je nasuprotna stranica dvostruko dulja od srednjice. Nastavnik će paziti da navedeno svojstvo svi učenici uoče i ispravno zabilježe. U prilogu je prezentacijski materijal koji se može koristiti za dokaz.

Težište trokuta

Učenici će se prisjetiti definicije težišnice, nacrtati trokut, konstruirati njegove težišnice i uočiti njihovo sjecište. Nastavnik treba upozoriti da pripadnost sjecišta dviju dužina (pravaca) trećoj dužini (pravcu) nije sama po sebi razumljiva, kao što slika na ekranu može sugerirati, te da je dio dokaza koji se nalazi u udžbeniku i može biti zadan za zadaću ili obrađen na nekom od idućih sati.

Slijedeći upute, očekuje se da će učenici lako uočiti da težište dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1 gledajući od vrha, odnosno 1 : 2 gledajući od polovišta.

Nastavnik treba paziti da svi učenici imaju ispravno evidentirana konačna zapažanja o svojstvima težišnica i težišta.

Središte opisane kružnice

Na temelju definicije simetrale dužine i nastavnih materijala očekuje se da će učenici lako konstruirati simetralu dužine i uočiti svojstvo da je svaka njena točka jednako udaljena od krajnjih točaka dužine. Očekuje se da će učenici moći samostalno provesti dokaz ovog svojstva. Nadalje, treba dokazati i obrat te provesti s učenicima raspravu o implikacijama i ekvivalencijama.

Zatim prelazimo na trokut i središte trokutu opisane kružnice. Učenici će lako uočiti da se simetrale sijeku u jednoj točki i moguće je da taj zaključak ni ne primijete. Jednako kao ranije, treba ukazati da je to svojstvo dio poučka koji se dokazuje. Mjerenjem udaljenosti od sjecišta simetrala do svih triju vrhova učenici će zaključiti da je sjecište simetrala središte trokutu opisane kružnice. Dokaz poučka nalazi se u udžbeniku i može biti zadan za zadaću ili obrađen na nekom od idućih sati.

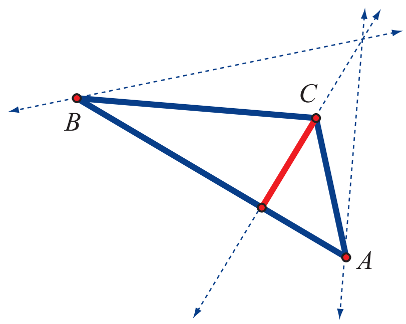
Središte upisane kružnice

Korištenjem definicije simetrale kuta, učenici konstruiraju simetralu (istaknuti točku na jednom kraku, vrh i točku na drugom kraku, te na padajućem izborniku *Konstrukcije* odabrati *Simetrala kuta*). Udaljenost točke do pravca može se u programu dinamične geometrije mjeriti opcijom *Udaljenost* (obilježiti točku i pravac čiju udaljenost mjerimo) na padajućem izborniku *Mjerenja*[9] ali neophodno je s učenicima ponoviti što je udaljenost točke do pravca i ucrtati na sliku okomice iz točke na krakove. Učenici će uočiti da je svaka točka simetrale kuta jednako udaljena od krakova kuta. Očekujemo da učenici sami provedu dokaz kao i da iskažu obrat i dokažu ga.

U trokutu će učenici uočiti da se sve simetrale kutova sijeku u jednoj točki i zaključiti da je ta točka jednako udaljena od svih stranica trokuta pa je zato središte trokutu upisane kružnice. Pri konstrukciji upisane kružnice često će griješiti i za polumjer uzeti udaljenost središta i sjecišta simetrale i stranice. Dovoljno je promijeniti trokut pa će se vidjeti da kružnica nije upisana. Učenici bi trebali zaključiti da moraju konstruirati okomicu iz sjecišta simetrala na (bilo koju) stranicu.

Ortocentar trokuta

Učenici će imati predodžbu što je visina trokuta ali će u konstrukciji često griješiti i sjeći okomicu na stranicu sa stranicom umjesto s pravcem kojem pripada stranica. Tako će za tupokutne trokute dobiti slike poput ove i često će komentirati kako u ovom slučaju postoji samo jedna visina trokuta. Treba zahtijevati da slike poprave i okomicu iz vrha sijeku s pravcem kojem pripada stranica.



Učenici će uočiti da se visine kao dužine ne sijeku u svakom slučaju, ali da se pravci kojima pripadaju visine sijeku u jednoj točki.

1.2. Karakteristične točke trokuta 2

U ovoj će aktivnosti učenici:

- konstruirati četiri karakteristične točke trokuta: središta trokutu opisane i upisane kružnice, težište i ortocentar
- istražiti ovisnost položaja karakterističnih točaka o vrsti trokuta pomoću tehnologije
- primijeniti konstrukcije karakterističnih točaka na zadatak modeliranja.

U čemu je problem?

Oblik rada: frontalni

Kako to izgleda?

Oblik rada: rad u pet skupina

Nastavna pomagala: računala

– Svaka skupina konstruira jednu vrstu trokuta: jednakostranični, jednakokračni, šiljastokutni raznostranični, pravokutni i tupokutni (slučajan odabir, npr. izvlačenje papirića), a zatim karakteristične točke za svoj trokut.

Možete li pretpostaviti?

Učenici iznose pretpostavke bez da vide radove ostalih skupina.

Napravite model.

Svaka skupina ima listić sa praznom tablicom.

U tablicu učenici upisuju gdje se nalazi pojedina točka: unutar trokuta, na stranici trokuta, u vrhu trokuta ili izvan trokuta.

Vrsta trokuta	Ortocentar O	Težište T	Središte opisane kružnice S	Središte upisane kružnice U
jednakostranični				
jednakokračni				
šiljastokutni				
pravokutni				
tupokutni				

Nakon što učenici ispune svoj listić, šalju listić slijedećoj skupini, dodaju podatke za svoj trokut i opet šalju listić dok svi ne dobiju tablice ispunjenih rubrika.

Potražite pomoć tehnologije.

Svaka skupina mijenja oblik svog trokuta i promatra karakteristične točke.

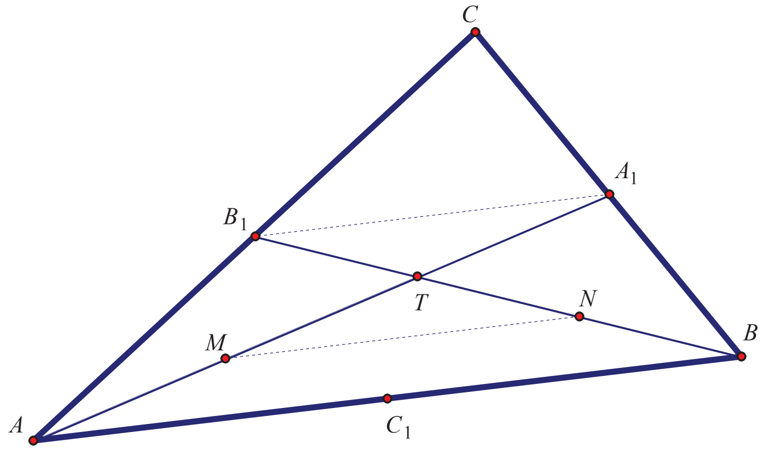
Kako bi to riješila teorija?

Učenici odgovaraju na temelju svojih istraživanja.

Možemo li više?

Težište trokuta dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1. Dokaz može biti za domaću zadaću ili kao dodatni zadatak.

Dokaz:

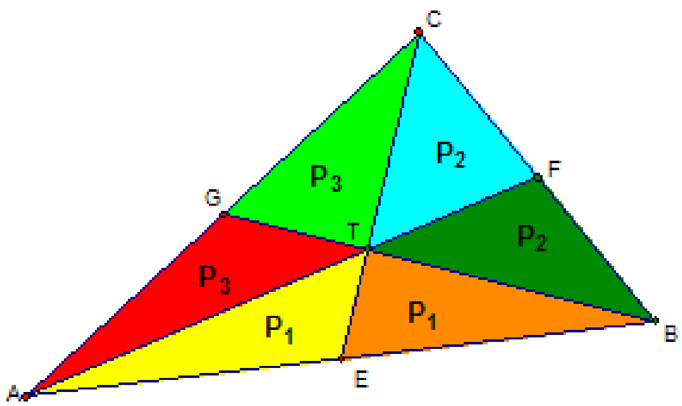


$\overline{A_1B_1}$ srednjica je trokuta *ABC*, pa je paralelna sa stranicom *AB* i vrijedi $|A_1B_1| = \frac{1}{2}|AB|$.
Točka *M* polovište je dužine $\overline{AT}$, a *N* polovište dužine $\overline{BT}$. Dužina $\overline{MN}$ srednjica je trokuta *ABT*, pa je paralelna sa stranicom *AB* i vrijedi $|MN| = \frac{1}{2}|AB| = |A_1B_1|$.
Po poučku o sukladnosti trokuta (dva kuta i jedna stranica) vrijedi $\Delta MNT \cong \Delta B_1TA_1$. Slijedi $|MT| = |TA_1|$, pa je $|AT|:|TA_1| = 2:1$. Analogno za ostale težišnice.

Primijenite naučeno.

I.

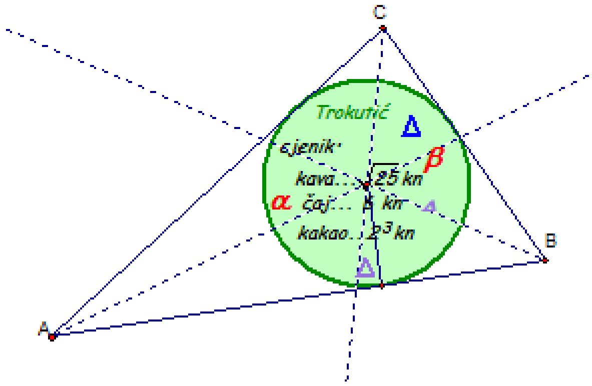
1. Svaka skupina može nacrtati trokut po želji. Treba konstruirati težište trokuta.
2. Učenici mjerenjem pokazuju da su površine svih šest trokuta jednake.



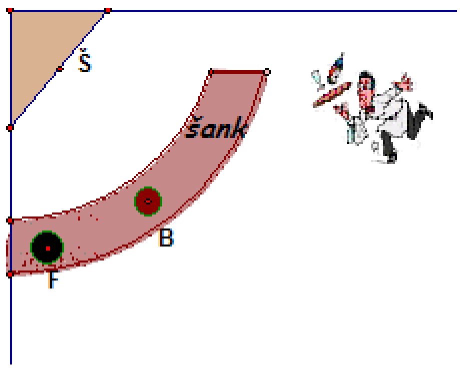
Dokaz: površine trokuta *AET* i *EBT* jednake su jer imaju stranice jednakih duljina $|AE| = |EB|$ i jednake visine na te stranice. Analogno vrijedi za površine (P_2) trokuta *BFT* i *FCT*, te *CTG* i *GTA* (P_3). Iz istih razloga jednake su površine trokuta *AEC* i *EBC*, pa vrijedi: $P_1 + 2P_3 = P_1 + 2P_2$, odnosno $P_2 = P_3$, analogno $P_2 = P_1$ i $P_1 = P_3$.

3. Treba konstruirati trokutu upisanu kružnicu (za dizajn učenici pokazuju svoju kreativnost).

   Npr.



II.



Učenici konstruiraju sličnu sliku na računalu (ili dobiju pripremljenu) i rješavaju zadatak.

Treba konstruirati središte trokutu opisane kružnice.

1.3. Upisana kružnica

Ishodi učenja

Učenici će:

- otkriti forumulu za računanje površine trokuta pomoću polumjera upisane kružnice
- otkriti svojstvo tangencijalnog četverokuta
- dokazati poučak o tangencijalnim četverokutima
- računati površinu tangencijalnog četverokuta
- primjeniti poučak o tangencijalnim četverokutima u zadatcima.

Potrebno vrijeme: dva školska sata

Organizacija rada: učenici rade samostalno na računalima.

Trokut

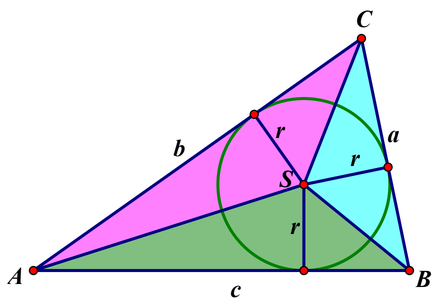
U čemu je problem?

Učenici će se prisjetiti da se svakom trokutu može upisati kružnica i da je središte upisane kružnice sjecište simetrala kutova.

Napravite model.

Učenici će nacrtati trokut i konstruirati upisanu kružnicu. Mjerit će površinu i polumjer te računati razliku i kvocijent. Ustanovit će da ni razlika ni kvocijent nisu stalni, da razlika nema smisla zbog različitih mjernih jednica, te da je mjerna jedinica kvocijenta centimetar. Nastavnik može pitati čime bismo mogli podijeliti kvocijent da dobijemo veličinu bez mjerne jedinice. Učenici će zaključiti da to može biti neka veličina čija je mjerna jednica centimetar. To može biti duljina neke od stranica, ali na taj se način neće dobiti stalni kvocijent. Neki će učenici naslutiti da treba dijeliti s opsegom trokuta. Na taj će način doći do formule $P = rs,\ s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Učenici će provesti i dokaz.

Dokaz



$$P_1 = \frac{cr}{2},\ P_2 = \frac{ar}{2},\ P_3 = \frac{br}{2}$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{c+a+b}{2} r = sr$$

Četverokut

Kako to izgleda?

Učenici će upisati kružnicu kvadratu i rombu. Možda će neki učenici očekivati da je središte upisane kružnice u sjecištu dijagonala (što je vrijedilo za kvadrat i romb) pa će u zadatku s deltoidom trebati pomoć.

Potražite pomoć tehnologije.

Učenici će po uputama konstruirati tangencijalni četverokut. Pri konstrukciji tangente u točki kružnice ponovit ćemo da su tangenta i polumjer u diralištu okomiti.

a. Učenici će mijenjajući položaj nekog vrha četverokuta uočiti pravilnost. To vjerojatno neće biti jednostavno i treba im ostaviti vremena za razne pokušaje. Učenici će mjeriti duljine stranica ali možda i površine, opseg, kutove... Može im se pomoći tako da ih se usmjeri na duljine stranica. Neki učenici će uočiti da je zbroj duljina jednog para nasuprotnih stranica četverokuta jednak zbroju duljina drugog para nasuprotnih stranica.

b. Učenici će provjeriti formulu $P = rs$ za površinu konveksnog tangencijalnog četverokuta u programu dinamične geometrije. Dokaz je analogan dokazu za trokut i učenici će ga bez poteškoća moći provesti.

Kako bi to riješila teorija?

Traži se da otkrivenu činjenicu i dokažu. Dokaz treba provesti, a zatim izreći i dokazati obrat.

Teorem o tangencijalnom četverokutu.

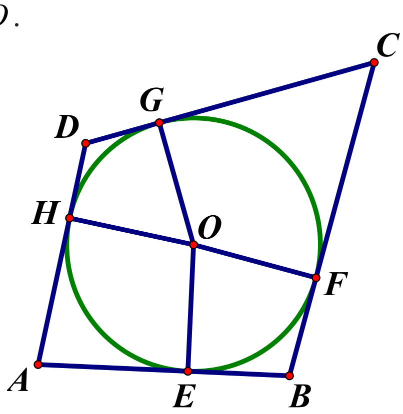
Zbroj duljina dviju nasuprotnih stranica tangencijalnog četverokuta jednak je zbroju duljina drugih dviju stranica tog četverokuta.

Dokaz. Prema SSK$^{>}$ teoremu o sukladnosti trokuta $\Delta AEO \cong \Delta AHO$.

Vrijedi $|OE| = |OH|$, $\sphericalangle AEO = \sphericalangle AHO = 90°$, pa slijedi $|AE| = |AH|$.

Analogno vrijedi: $|BE| = |BF|$, $|CF| = |CG|$, $|DG| = |DH|$.

Imamo: $$\begin{aligned}|AB| + |CD| &= (|AE| + |BE|) + (|CG| + |DG|)\\ &= (|AH| + |BF|) + (|CF| + |DH|)\\ &= (|AH| + |DH|) + (|BF| + |CF|)\\ &= |AD| + |BC|.\end{aligned}$$



Obrat teorema o tangencijalnom četverokutu.

Ako konveksan četverokut ima svojstvo da je zbroj duljina jednog para nasuprotnih stranica jednak zbroju duljina drugog para nasuprotnih stranica, onda se tom četverokutu može upisati kružnica, tj. taj četverokut je tangencijalan.

Dokaz.

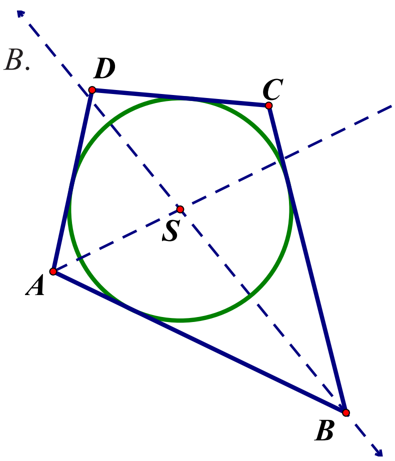
Neka je S sjecište simetrale kuta kod vrha A i simetrale kuta kod vrha B.

Tada je S središte kružnice k koja dodiruje pravce AD, AB i BC.

Tvrdimo da kružnica dira i pravac CD.

Neka je t_1 tangenta iz vrha C koja ne sadrži stranicu $\overline{CD}$.

Neka je D_1 sjecište pravaca AD i t_1.



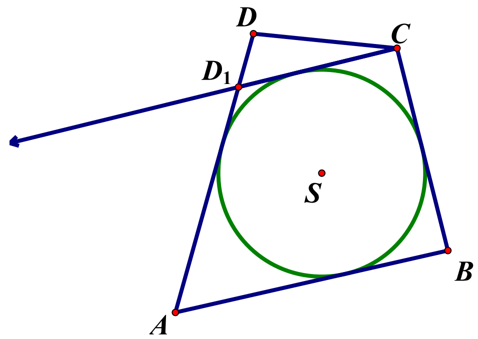
Razlikujemo dva slučaja:

1. $D_1 = D$

   Tada $\overline{CD}$ pripada tanegnti t_1 i dira kružnicu. Slijedi da je četverokut $ABCD$ tanegncijalan.

2. $D_1 \neq D$

   Tada postoje dvije mogućnosti.



   a. točka D_1 pripada stranici $\overline{AD}$ pa vrijedi :

$$|AD| = |AD_1| + |D_1D| \qquad (1)$$

   b. točka D_1 ne pripada stranici $\overline{AD}$ pa vrijedi:

$$|AD_1| = |AD| + |DD_1| \Rightarrow |AD| = |AD_1| - |DD_1| \qquad (1)$$

Četverokut $ABCD_1$ je tangencijalan pa prema teoremu o tangencijalnom četverokutu imamo:

$$|AB| + |CD_1| = |BC| + |AD_1|. \qquad (2)$$

Iz pretpostavke teorema imamo

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|. \qquad (3)$$

Oduzmimo jednakost (2) i (3). Dobivamo: $|CD_1| - |CD| = |AD_1| - |AD|$.

S obzirom na (1), slijedi: $|CD_1| - |CD| = |AD_1| - (|AD_1| \pm |D_1D|) \Rightarrow |CD_1| = |CD| \mp |D_1D|$.

To znači da bi u trokutu ΔCDD_1 duljina stranice $\overline{CD_1}$ bila jednaka sumi ili razlici duljina drugih dviju stranica tog trokuta, što je nemoguće.

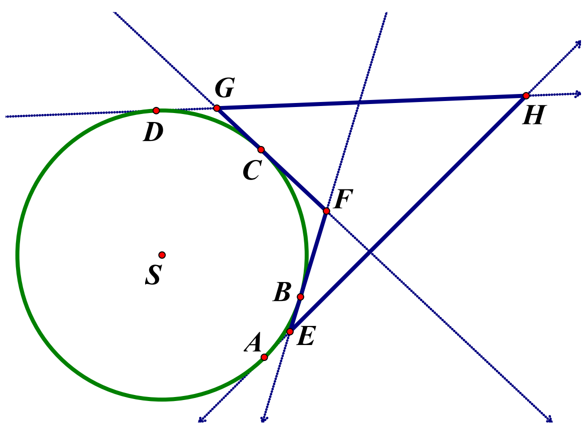
Dakle, zaista vrijedi $D_1 = D$, stoga kružnica dira stranicu $\overline{CD}$ pa zaključujemo da je četverokut $ABCD$ tangencijalni.

Time smo dokazali obrat teorema o tangencijalnom četverokutu.

Možemo li više?

Neka je dana kružnica k. Odaberemo na njoj kružni luk kojemu je pripadni središnji kut manji od 180°. Na tom luku označimo po volji četiri točke A, B, C i D. Tangente u točkama A i B se sijeku u točki E, tangente u točkama B i C se sijeku u točki F, tangente u točkama C i D se sijeku u točki G i tangente u točkama A i D se sijeku u točki H.

Te točke ujedno su vrhovi "tangencijalnog četverokuta" kojemu je pripisana kružnica sa središtem u točki S.



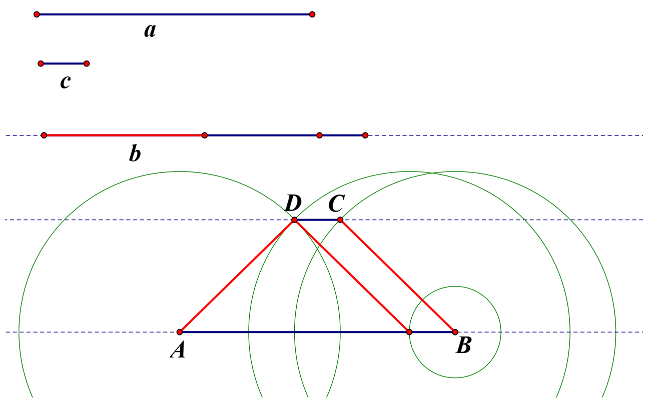
Teorem.

U "tangencijalnom četverokutu" s pripisanom kružnicom apsolutna vrijednost razlike duljina dviju nasuprotnih stranica jednaka je apsolutnoj vrijednosti razlike duljina drugih dviju nasuprotnih stranica tog četverokuta.
Prema tvrdnji, vrijedi: $\left||GH|-|EF|\right|=\left||EH|-|FG|\right|$.

Primijenite naučeno.

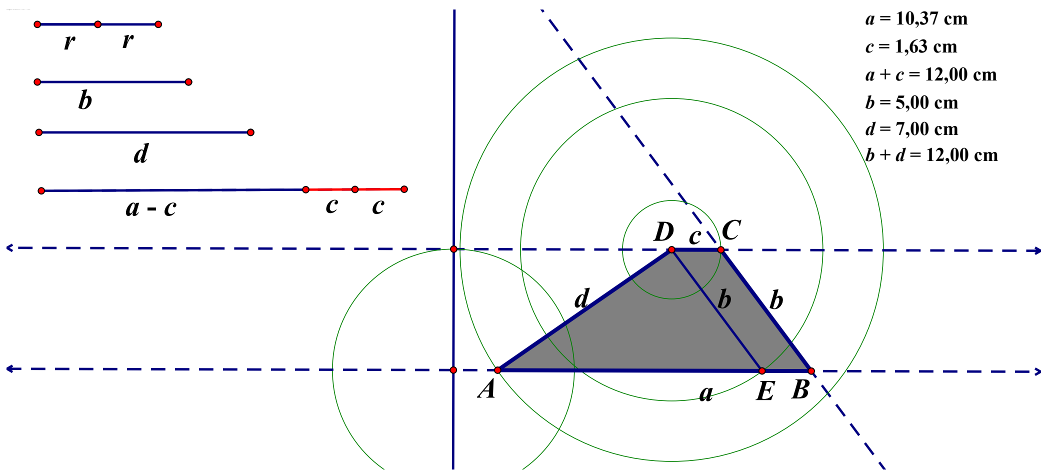
Trapez može biti tangencijalni pri čemu mora vrijediti da je zbroj duljina krakova jednak zbroju duljina osnovica $b + d = a + c$. Specijalno ako je tangencijalni trapez jednakokračni vrijedi $2b=a+c \Rightarrow b=\dfrac{a+c}{2}$.

a.



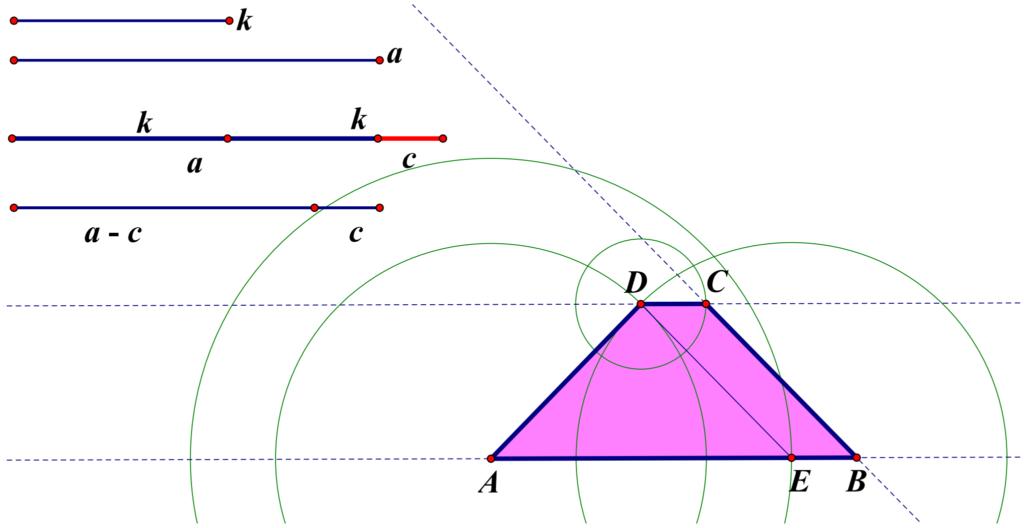
$b=5,\ v=\sqrt{24},\ P=5\sqrt{24}$

b. Najprije konstruiramo trokut AED čije su dvije strnice b i d, a visina je $2r$. Duljina stranice $\overline{AE}$ je $a - c$. Vrijedi $b + d = a + c$ pa možemo konstruirati dužinu duljine c koju nanesemo iz točke D. Dobivena je točka C. Točku B dobivamo kao sjecište paralele s $\overline{ED}$ točkom C i pravca AE.



Površina je trokuta $P=\dfrac{a+c}{2}v=\dfrac{12}{2}\cdot 4=24\ \text{cm}^2$.

c. Učenici će konstruirati dužinu duljine $2k$, a zatim, koristeći vezu $2k = a + c$ dužinu duljine c. Zatim će konstruirati dužinu duljine $a - c$. Idući je korak konstrukcija trokuta AED čije su stranice duljina $a - c$, k, k.



Visina trapeza je $v = \sqrt{k^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = 12$ cm. Površina je trokuta $P = \frac{a+c}{2} v = \frac{26}{2} \cdot 12 = 156 \text{ cm}^2$.

1.4. Poučak o obodnom i središnjem kutu. Talesov poučak

U ovoj će aktivnosti učenici:

- istražiti i dokazati vezu između obodnog i središnjeg kuta kružnice rabeći program dinamične geometrije
- primijeniti Talesov poučak na konstrukcije
- odrediti geometrijsko mjesto točaka određeno zadanim uvjetima
- vrednovati svoj rad.

Aktivnost je predviđena za dva školska sata.

Možete li pretpostaviti?

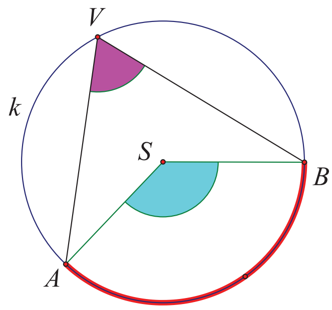
Oblik rada: rad u skupini

Potražite pomoć tehnologije.

Oblik rada: individualni

Nastavna pomagala: računalo za svakog učenika.

Učenici će najprije otkriti da su svi obodni kutovi nad istim lukom kružnice jednaki, a zatim i poučak o obodnom i središnjem kutu: Središnji kut nad nekim lukom kružnice jednak je dvostrukom obodnom kutu nad istim lukom.



$$m\angle BVA = 66{,}65°$$

$$m\angle BSA = 133{,}30°$$

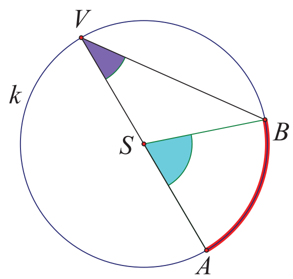
$$\frac{m\angle BSA}{m\angle BVA} = 2{,}00$$

Kako bi to riješila teorija?

Oblik rada: rad u paru

U ovoj će aktivnosti učenici dokazati poučak o obodnom i središnjem kutu. Ovisno o međusobnom položaju središta kružnice i obodnog kuta, moguća su tri slučaja.

1. Krak obodnog kuta prolazi središtem kružnice.

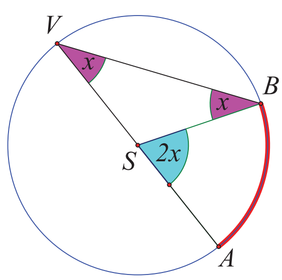


$$m\angle BVA = 35{,}45°$$

$$m\angle BSA = 70{,}90°$$

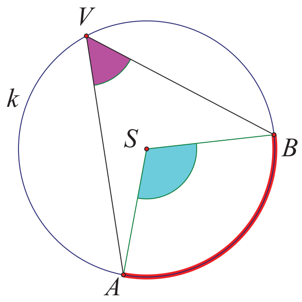
$$\frac{m\angle BSA}{m\angle BVA} = 2{,}00$$

Trokut *VSB* je jednakokračni jer su $\overline{SV}$ i $\overline{SB}$ polumjeri iste kružnice, dakle $\angle AVB = \angle VBS$.



Središnji kut $\angle ASB$ je vanjski kut trokuta *VSB*, stoga $\angle ASB = \angle AVB + \angle VBS = 2 \cdot \angle AVB$.

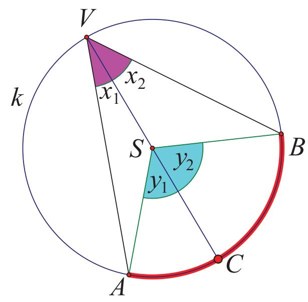
2. Središte kružnice nalazi se unutar krakova obodnog kuta.



$m\angle BVA = 53{,}41°$

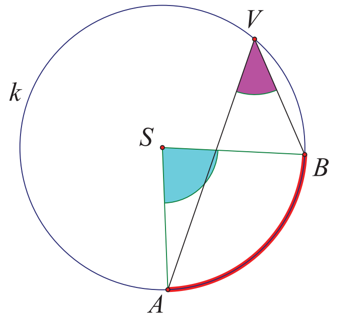
$m\angle BSA = 106{,}82°$

$\dfrac{m\angle BSA}{m\angle BVA} = 2{,}00$



Konstruiramo točku C koja je sjecište pravca VS i kružnice k. Neka je $\angle ASB = y_1 + y_2$, $\angle AVB = x_1 + x_2$. Dužina $\overline{CV}$ je promjer kružnice pa po slučaju 1) $y_1 = 2x_1$ i $y_2 = 2x_2$, stoga je $\angle ASB = \angle ASC + \angle CSB = y_1 + y_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot \angle AVB$.

3. Središte kružnice nalazi se izvan obodnog kuta

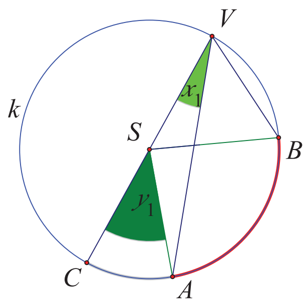


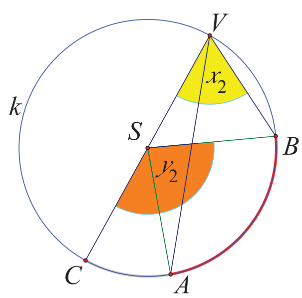
$m\angle BVA = 42{,}50°$

$m\angle BSA = 85{,}00°$

$\dfrac{m\angle BSA}{m\angle BVA} = 2{,}00$

Konstruiramo točku C koja je sjecište pravca VS i kružnice k. Dužina $\overline{CV}$ je promjer kružnice.





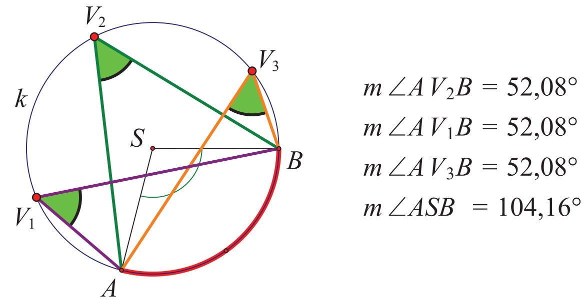
Po slučaju 1) $y_1 = 2x_1$, $y_2 = 2x_2$.

$\angle ASB = \angle CSB - \angle CSA = y_2 - y_1 = 2x_2 - 2x_1 = 2(x_2 - x_1) = 2 \cdot \angle AVB$.

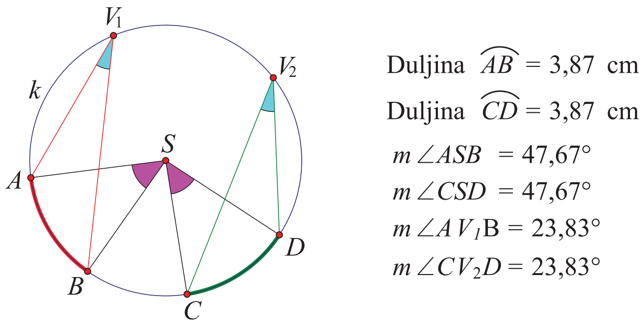
Posljedice poučka o obodnom i središnjem kutu:

Učenici provjeravaju posljedice u programu dinamične geometrije i nakon toga provode zaključke.

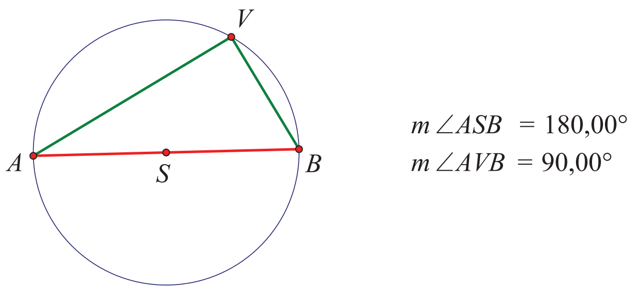
1. Svi obodni kutovi nad istim lukom kružnice jednaki su jer svim obodnim kutovima nad istim lukom kružnice pripada isti središnji kut.



2. Jednakim lukovima iste kružnice pripadaju jednaki obodni kutovi jer jednakim lukovima iste kružnice pripadaju jednaki središnji kutovi.



3. Talesov poučak: Obodni je kut nad promjerom kružnice pravi kut.



Primijenite naučeno.

Oblik rada: rad u skupini

1. a. $\alpha = 48°30', \beta = 41°30'$; b. $\alpha = 37°, \beta = 26°$; c. $\alpha = 34°$.

2. Sve točke (osim točaka A i B) kružnice kojoj je dužina $\overline{AB}$ promjer.

3. Neka je zadana duljina hipotenuze $|AB| = c$ i duljina katete $|BC| = a$.

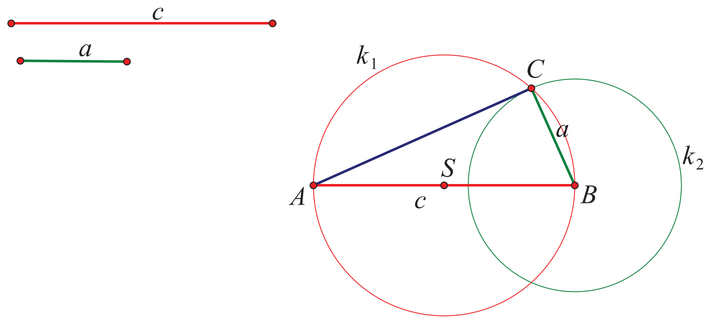
Nacrtamo dužinu $\overline{AB}$ i konstruiramo njezino polovište S.

Konstruiramo kružnicu k_1 sa središtem u S i polumjerom $\frac{c}{2}$.

Konstruiramo kružnicu k_2 sa središtem u B i polumjerom a.

Konstruiramo točku $C = k_1 \cap k_2$.

Trokut ABC je traženi trokut.

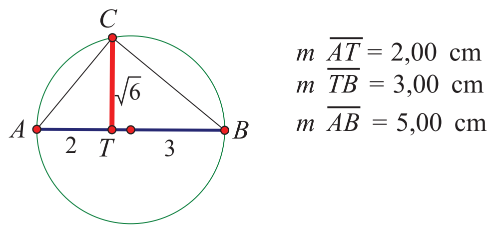


4. Konstruiramo dužinu $\overline{AB}$, takvu da je $|AB| = 5$ cm.

   Konstruiramo kružnicu kojoj je dužina $\overline{AB}$ promjer.

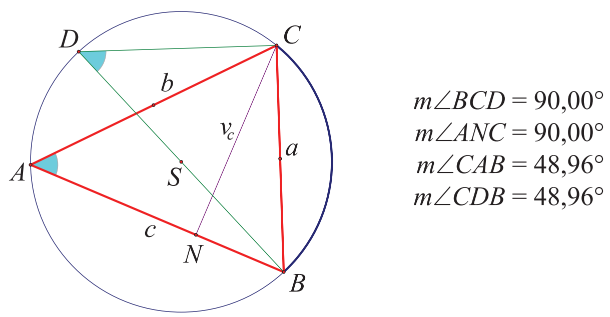
   U točki T takvoj da je $|AT| = 2$ cm konstruiramo okomicu na $\overline{AB}$ i njezino sjecište s kružnicom je točka C.

   Trokut ABC je pravokutni, a prema Euklidovu poučku $|CT| = \sqrt{6}$ cm.



5. Neka je S središte trokutu ABC opisane kružnice i $\overline{CN}$ njegova visina, $|CN| = v_c$.

Sjecište pravca BS i kružnice je točka D. Kutovi $\angle BAC$ i $\angle BDC$ nad istim su lukom kružnice pa su jednaki. $\angle DCB = \angle CNA = 90^\circ$. Zaključujemo da su trokut ANC i trokut DBC slični pa vrijedi: $\frac{|BC|}{|DB|} = \frac{|CN|}{|AC|}$, odnosno $\frac{a}{2R} = \frac{v_c}{b}$. Odavde je $v_c = \frac{ab}{2R}$ i uvrštavanjem u formulu za površinu trokuta $P = \frac{cv_c}{2}$ dobivamo $P = \frac{abc}{4R}$.

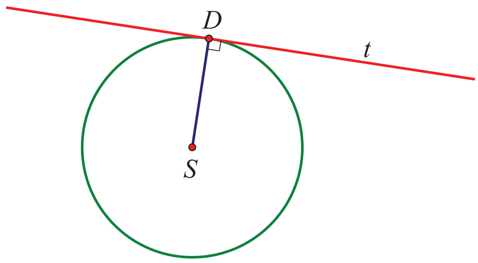


Možemo li više?

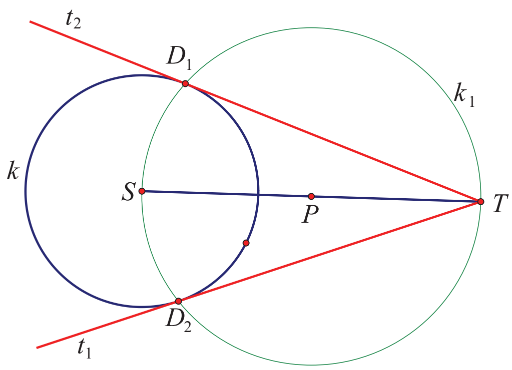
Oblik rada: individualni

Nastavna pomagala: računalo za svakog učenika.

1. Koristimo činjenicu da je tangenta na kružnicu okomita na dužinu koja spaja dirałište kružnice i tangente sa središtem kružnice.



Konstrukcija: Konstruiramo kružnicu k_1 kojoj je dužina $\overline{ST}$ promjer. Konstruiramo točke D_1 i D_2 kao sjecišta kružnica k i k_1. Pravci TD_1 i TD_2 tražene su tangente.



2. Kut između tangente kružnice, kojoj je diralište u krajnjoj točki i tetive, jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.

1.5. Tetivni četverokut

U ovoj će aktivnosti učenici:

- konstruirati simetralu dužine uz pomoć tehnologije i bez nje
- kostruirati trokutu opisanu kružnicu uz pomoć tehnologije i bez nje
- istražiti pomoću tehnologije kada je četverokut tetivni
- dokazati poučak o tetivnom četverokutu
- primjeniti poučak o tetivnom četverokutu
- vrednovati svoj rad.

Možete li pretpostaviti?

Oblik rada: rad u skupini

Učenici će u skupini diskutirati o problemu gradnje aerodroma i pokušati procijeniti lokaciju gradnje.

Zadatak 1.

Rješenje će biti sve točke simetrale dužine kojoj su krajnje točke na položaju Zagreba i Osijeka.

Zadatak 2.

Rješenje je središte kružnice opisane trokutu čiji su vrhovi točke na položaju Zagreba, Pariza i Berlina.

Zadatak 3.

Ne postoji takva točka.

Napravite model.

Oblik rada: rad u skupini

Nastavna pomagala: trokut i šestar

U ovoj aktivnosti učenici (bez tehnologije) ponavljaju konstrukcije simetrale dužine i konstrukcije trokutu opisane kružnice i uočavaju problem konstrukcije četverokutu opisane kružnice.

Potražite pomoć tehnologije.

Oblik rada. individualni

Nastavna pomagala: računalo za svakog učenika

Nakon što su u programu dinamične geometrije konstruirali simetralu dužine određene krajnjim točkama (Zagreb i Osijek) učenici uočavaju da ta simetrala siječe obalu u blizini Makarske (točnije: Brela) i zaključuju da bi se tamo na Jadranskoj obali trebalo izgraditi aerodrom.

https://hr.wikipedia.org/wiki/Datoteka:UN-Zemljovid-Hrvatske-2006.png

Nakon konstrukcije opisane kružnice trokutu čiji su vrhovi na položaju Zagreba, Pariza i Berlina učenici zaključuju da je središte dobivene kružnice mjesto gdje treba izgraditi aerodrom.

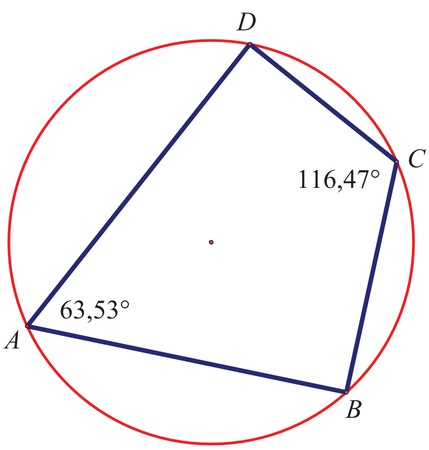
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Europe_regions_minimal_cities_(it).png

Učenici će ustanoviti da ne postoji točka koja je jednako udaljena od točaka koje su na položaju Zagreba, Pariza, Berlina i Rima.

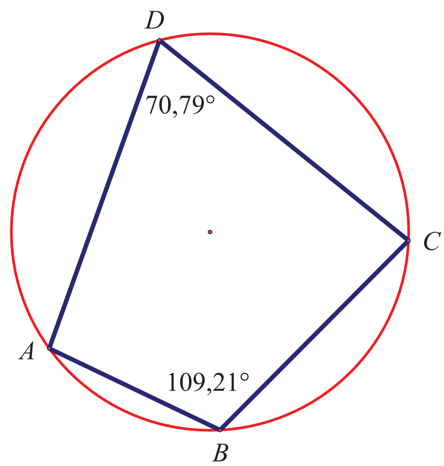
Kada traže neki od evropskih glavnih gradova za koji postoji položaj aerodroma jednako udaljenog od Zagreba, Pariza i Berlina mogu se poslužiti već konstruiranom opisanom kružnicom trokutu čiji su vrhovi na položaju Zagreba, Pariza i Berlina te zaključiti da ni jedan europski grad (osim Zagreba, Pariza i Berlina) ne pripada toj kružnici, ali su joj "blizu" Monako, San Marino, Amsterdam i Brisel.

Na kraju učenici mijenjajući položaje četiriju točaka na nekoj kružnici otkrivaju da za četverokut kojemu se može opisati kružnica vrijedi da je zbroj njegovih nasuprotnih kutova 180°.

$m\angle BCD + m\angle BAD = 180{,}00°$

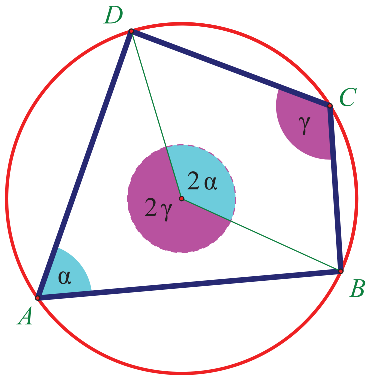


$m\angle CDA + m\angle ABC = 180{,}00°$



Kako bi to riješila teorija?

Neka je četverokut $ABCD$ tetivni četverokut, dokažimo da je zbroj njegovih nasuprotnih kutova 180°.



Neka je kut α obodni nad lukom BCD. Pripadni središnji kut je 2α.

Neka je kut γ obodni nad lukom DAB. Pripadni središnji kut je 2γ.

Kako je $2\alpha + 2\gamma = 360°$ to je $\alpha + \gamma = 180°$.

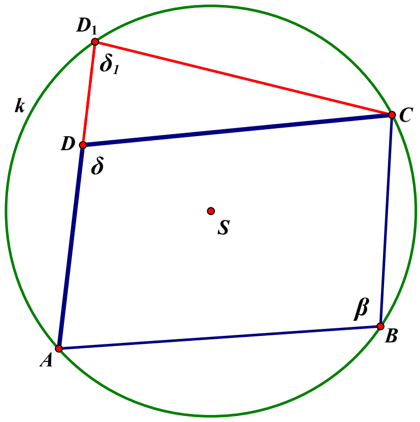
Kako je zbroj kutova u četverokutu 360°, zaključujemo da je i $\beta + \delta = 180°$.

Dokažimo sada obrat: Ako je u konveksnom četverokutu zbroj nasuprotnih kutova 180°, onda je taj četverokut tetivni četverokut.

Neka je $ABCD$ četverokut takav da vrijedi $\alpha + \gamma = 180°$ i $\beta + \delta = 180°$. Neka je k kružnica kojoj pripadaju točke A, B i C.

Dokaz provodimo metodom kontradikcije.

Pretpostavimo da vrh D ne pripada kružnici k i neka je D unutar kružnice k.



Produžimo dužinu $\overline{AD}$ preko točke D do sjecišta D_1 s kružnicom k i neka je $\angle AD_1C = \delta_1$.

Četverokut $ABCD_1$ tetivni je četverokut pa vrijedi $\beta + \delta_1 = 180°$. Dobivamo $\delta = \delta_1$ što nije moguće jer je δ vanjski kut trokuta DCD_1 pa mora biti $\delta_1 < \delta$.

Time zaključujemo da je pogrešna naša pretpostavka da četverokut $ABCD$ nije tetivni četverokut.

Na isti način se dokazuje tvrdnja ako je točka D izvan kružnice k.

Možemo li više?

Približno će odgovarati na primjer: Zagreb, Beč, Pariz i Rim; zatim Zagreb, Minsk, Pariz i Bern; Zagreb, Stocholm, Oslo, London, Pariz.

Za dobivene grupe gradova učenici mogu provjeriti vrijedi li svojstvo koje su dokazali (u kako bi to riješila teorija?) tako da mjere i zbroje veličine nasuprotnih kutova u dobivenim četverokutima.

Primijenite naučeno.

1. a. $\alpha = 93°$, $\beta = 109°$; b. $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.

2. $38° + 149° = 187°$ (zbroj nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta je 180°, pa su ovi zadani kutovi susjedni), neka je $\alpha = 38°$, $\beta = 149°$.

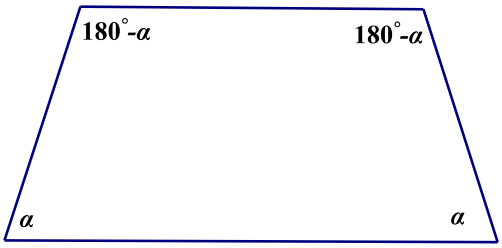
   $\alpha + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - 38° = 142°$, $\beta + \delta = 180° \Rightarrow \delta = 180° - 149° = 31°$.

3. Iz $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 10 : 15 \Rightarrow \alpha = 3k$, $\beta = 10k$, $\gamma = 15k$.

   Četverokut $ABCD$ je tetivni $\Rightarrow \alpha + \gamma = 180° \Rightarrow 3k + 15k = 180° \Rightarrow k = 10° \Rightarrow \beta = 100°$.

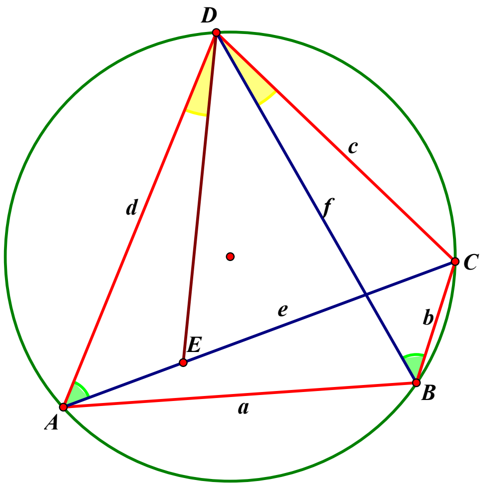
   $\beta + \delta = 180° \Rightarrow \delta = 180° - \beta \Rightarrow \delta = 180° - 100° \Rightarrow \delta = 80°$.

4.



   Zbroj nasuprotnih kutova $\alpha + (180° - \alpha) = 180°$, pa zaključujemo da je svaki jednakokračni trapez tetivni četverokut.

5.



   Uvedimo oznake kao na slici. Želimo dokazati da vrijedi: $ef = ac + bd$.

   Konstruirajmo dužinu $\overline{DE}$ tako da vrijedi $\angle ADE = \angle BDC$.

   $\angle CAD = \angle CBD$ (obodni kutovi nad istim lukom kružnice)

   Zaključujemo da su trokuti ΔAED i ΔBCD slični $\Rightarrow |AE| = \dfrac{bd}{f}$. (1)

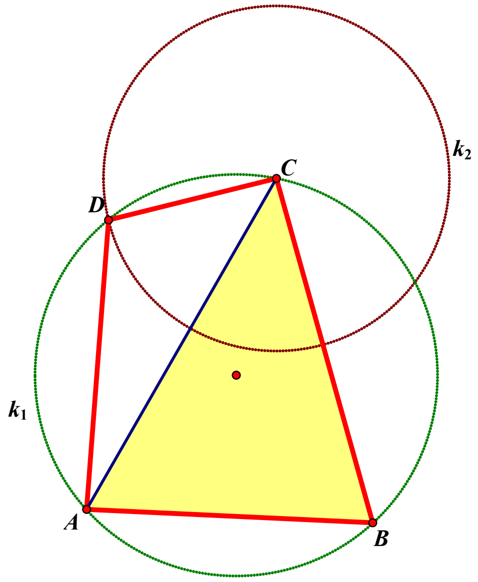
$\angle DCA = \angle DBA$ (kutovi nad istim lukom kružnice) i $\angle ADB = \angle EDC$.

Zaključujemo da su trokuti ΔABD i ΔECD slični $\Rightarrow |EC| = \frac{ac}{f}$. (2)

Zbrajanjem (1) i (2) i uzevši u obzir da je $|AE| + |EC| = e$ dobivamo $ef = ac + bd$.

6.

1. Konstruiramo ΔABC.
2. Konstruiramo trokutu ABC opisanu kružnicu k_1.
3. Konstruiramo kružnicu k_2 sa središtem u točki C i polumjerom duljine dužine $\overline{CD}$.
4. Konstruiramo točku D koja je sjecište kružnica k_1 i k_2.



1.6. Pravac i kružnica

U ovoj će aktivnosti učenici:

- istražiti ovisnost međusobnog položaja pravca i kružnice o udaljenosti pravca do središta kružnice pomoću tehnologije
- provjeriti primjenom tehnologije poučak o tangenti kružnice
- konstruirati tangente iz točke na kružnicu primjenjujući Talesov poučak o obodnom i središnjem kutu
- skicirati međusobne položaje dviju kružnica i predvidjeti mogući broj zajedničkih tangenti
- konstruirati zajedničke vanjske i unutarnje tangente dviju kružnica.

Aktivnost je predviđena za dva školska sata.

Kako to izgleda?

Oblik rada: individualni

Učenici na papiru skiciraju pravac i kružnicu u svima trima položajima. Mjere udaljenost pravca do središta kružnice i uspoređuju s duljinom polumjera kružnice. Tri su mogućnosti:

1. $d < r$ - presjek pravca i kružnice su dvije točke;
2. $d = r$ - pravac dira kružnicu;
3. $d > r$ - pravac i kružnica nemaju zajedničkih točaka.

Možete li pretpostaviti?

Učenici će pretpostaviti da uvijek postoje dvije tangente iz točke na kružnicu. Dio učenika će zaključiti da treba primijeniti Talesov poučak o obodnom i središnjem kutu.

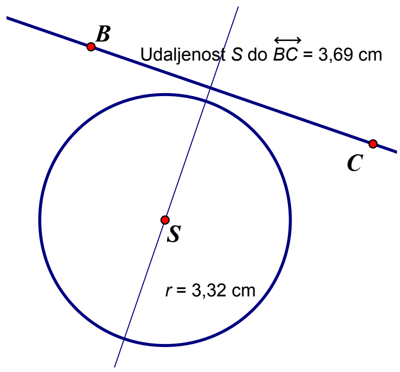
Potražite pomoć tehnologije.

Korak 1.

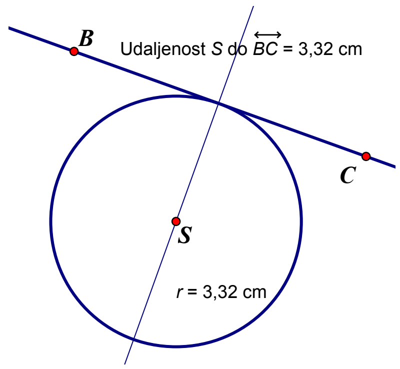
Oblik rada: rad u paru

Nastavna pomagala: računalo za svaki par

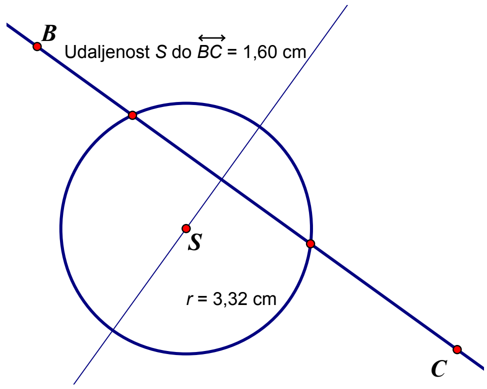
Kad je udaljenost pravca do središta kružnice veća od polumjera, pravac i kružnica nemaju zajedničkih točaka.



Kad je udaljenost pravca do središta kružnice jednaka polumjeru kružnice, pravac dira kružnicu.



Kad je udaljenost pravca do središta kružnice manja od polumjera kružnice, pravac siječe kružnicu u dvijema točkama.

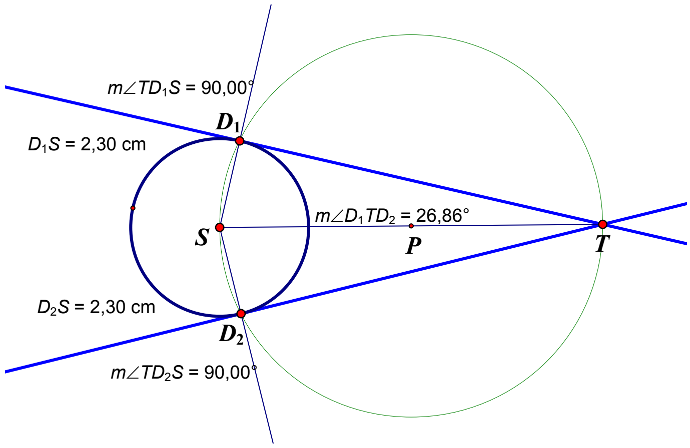


Korak 2.

Oblik rada: rad u paru

Nastavna pomagala: računalo za svaki par

Pravci TD_1 i TD_2 su uvijek okomiti na $\overline{D_1S}$ odnosno $\overline{D_2S}$.

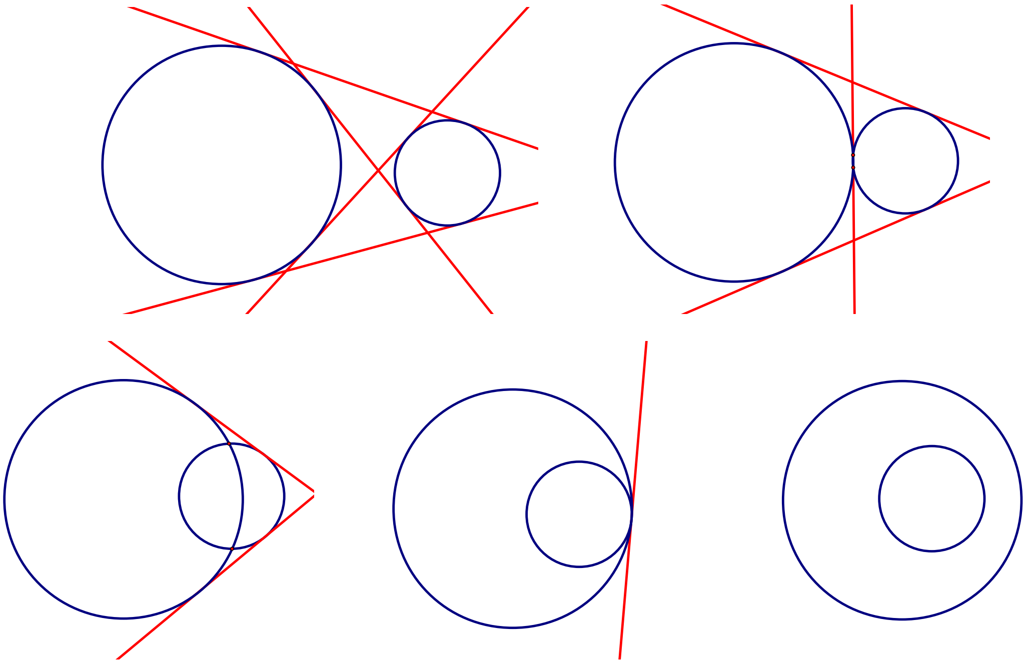


Kako bi to riješila teorija?

Prema Talesovu poučku kut nad promjerom kružnice je pravi. Dakle, kut $\angle TD_1S$ je pravi, pa je pravac TD_1 okomit na pravac D_1S. Prema poučku o tangenti kružnice pravac TD_1 je tangenta kružnice. Analogno je i TD_2 tangenta kružnice.

Možemo li više?

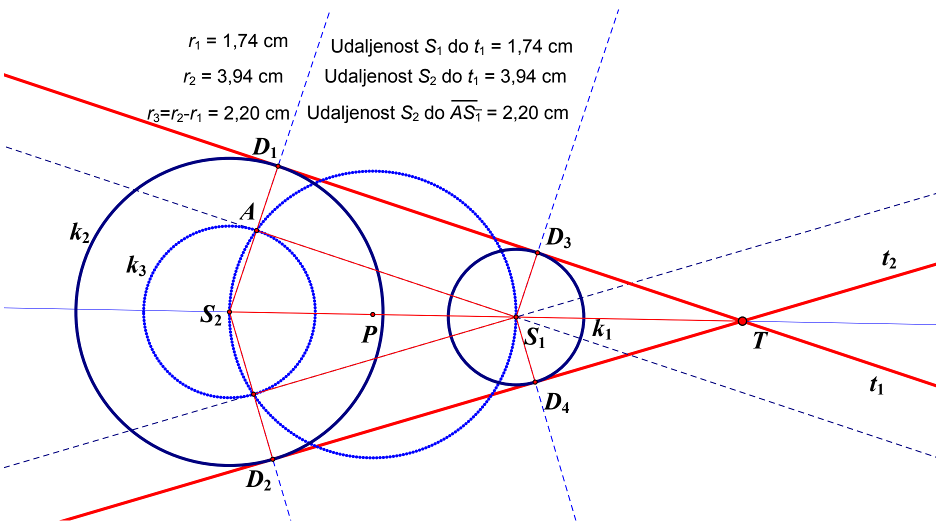
Ovisno o položaju dviju kružnica, postojat će najviše četiri njihove zajedničke tangente.



Primijenite naučeno.

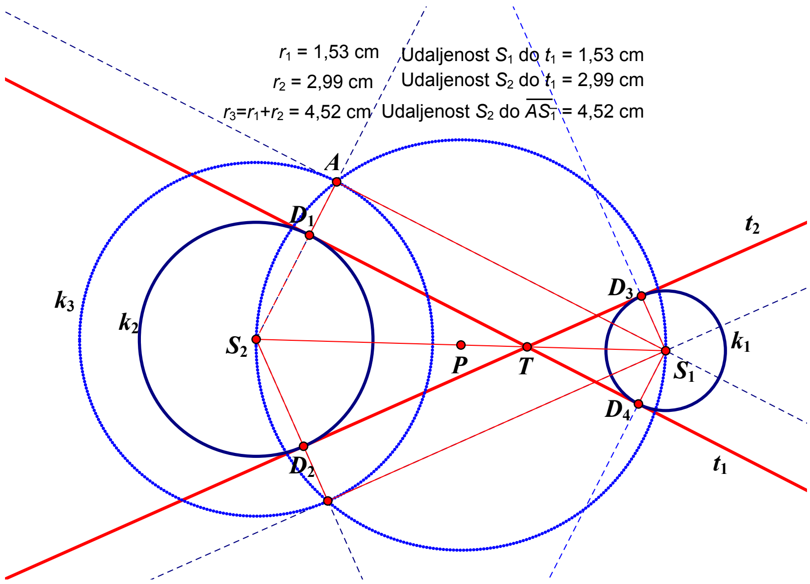
Zadatak 1.

Učenici će po uputama konstruirati zajedničke vanjske tangente.



Zadatak 2.

Učenici će po uputama konstruirati zajedničke unutarnje tangente.



1.7. Potencija točke s obzirom na kružnicu

U ovoj će aktivnosti učenici:

- istražiti vezu među zadanim veličinama rabeći program dinamične geometrije
- odrediti pravilo koje povezuje zadane veličine
- generalizirati pravilnosti i veze među zadanim veličinama
- odrediti geometrijsko mjesto točaka određeno zadanim uvjetima
- primijeniti potenciju točke s obzirom na kružnicu u konstrukcijama i zadatcima modeliranja
- vrednovati svoj rad.

Aktivnost je predviđena za dva školska sata.

Kako to izgleda?

Oblik rada: rad u četveročlanim skupinama – "kolo naokolo"

Svaki učenik na svom papiru rješava 1. zadatak, zatim predaje papir učeniku desno od sebe, svaki učenik rješava drugi zadatak, predaje papir učeniku desno od sebe i tako dalje.

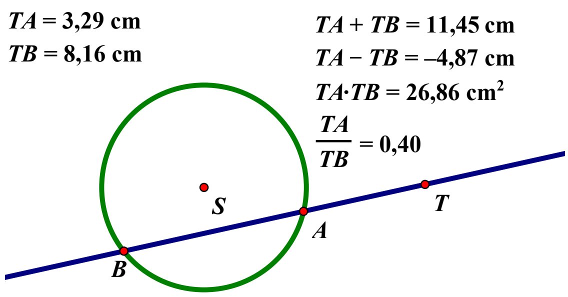
Na kraju će zaključiti da nema pravilnosti.

Potražite pomoć tehnologije.

Korak 1

Oblik rada: rad u paru

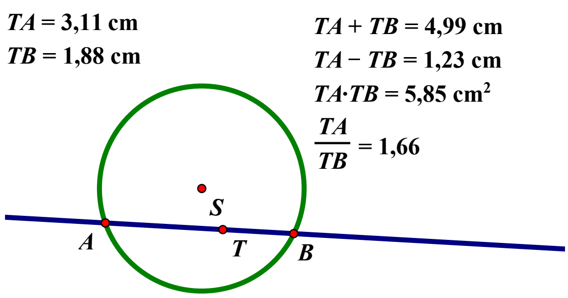
Nastavna pomagala: računalo za svaki par



Korak 2

Učenici zaključuju da je produkt $|TA|\cdot|TB|$ stalan.

Korak 3



I u ovom je slučaju produkt $|TA|\cdot|TB|$ stalan.

Zaključak učenika:

Produkt $|TA|\cdot|TB|$ ne ovisi o izboru pravca točkom T.

Korak 4

Učenici uočavaju i zapisuju svojstvo $|TA|\cdot|TB|=|TC|\cdot|TD|$.

Korak 5

Pravac TC je tangenta, a točka C dirалište. Učenici uočavaju i zapisuju vezu $|TA|\cdot|TB|=|TC|^2=|TS|^2-r^2$.

Korak 6

Učenici uočavaju i zapisuju vezu $|TA|\cdot|TB|=|TC|^2=r^2-|TS|^2$.

Kako bi to riješila teorija?

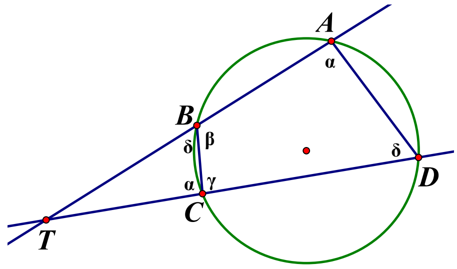
Dokažimo da je $|TA|\cdot|TB| \ = \ |TC|\cdot|TD|$.

Oblik rada: rad u skupini – učenici se mogu podijeliti u tri skupine, tako da svaka skupina provede jedan od triju dijelova dokaza: I. Točka T izvan kružnice, II. Točka T unutar kružnice, III. Jedan od pravaca je tangenta kružnice. Nastavnik obilazi skupine i po potrebi usmjerava rad učenika podržavajući i drugačije ideje (postupak) dokaza.

Predstavnici skupina predstavljaju dokaze na ploči.

Dokaz:

I. Točka T izvan kružnice:

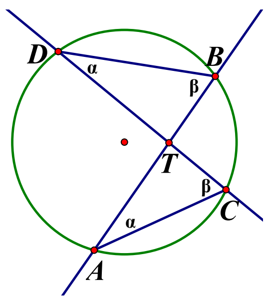


Četverokut $ABCD$ je tetivni pa vrijedi $\alpha+\gamma=180°$ i $\beta+\delta=180°$.

$\angle TCB=180°-\gamma=\alpha$ i $\angle TBCB=180°-\beta=\delta$

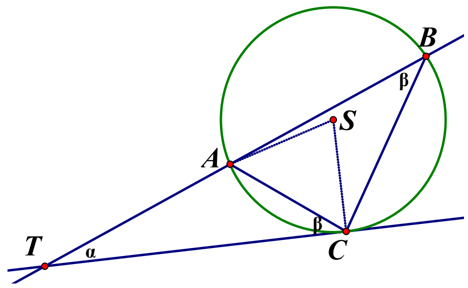
Po teoremu sličnosti trokuta (dva kuta jednaka) vrijedi $\Delta TCB \sim \Delta TDA$, pa imamo: $|TA|:|TC|=|TD|:|TB|$, odnosno $|TA|\cdot|TB|=|TC|\cdot|TD|$.

II. Točka T unutar kružnice:



Obodni su kutovi nad istim lukom jednaki, pa vrijedi: $\angle BDT=\angle TAC$ i $\angle DBT=\angle TCA$, $\Delta TAC \sim \Delta TBD \Rightarrow |TA|:|TD|=|TC|:|TB|$, odnosno $|TA|\cdot|TB|=|TC|\cdot|TD|$.

III. Jedan je od pravaca tangenta kružnice:



$\angle ASC = 2\beta$ (središnji i obodni kut)

$2 \cdot (90° - \angle TCA) + 2\beta = 180° \;\Rightarrow\; \angle TCA = \beta$

$\Delta TCA \sim \Delta TCB \Rightarrow |TA| : |TC| = |TC| : |TB|$, odnosno $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$.

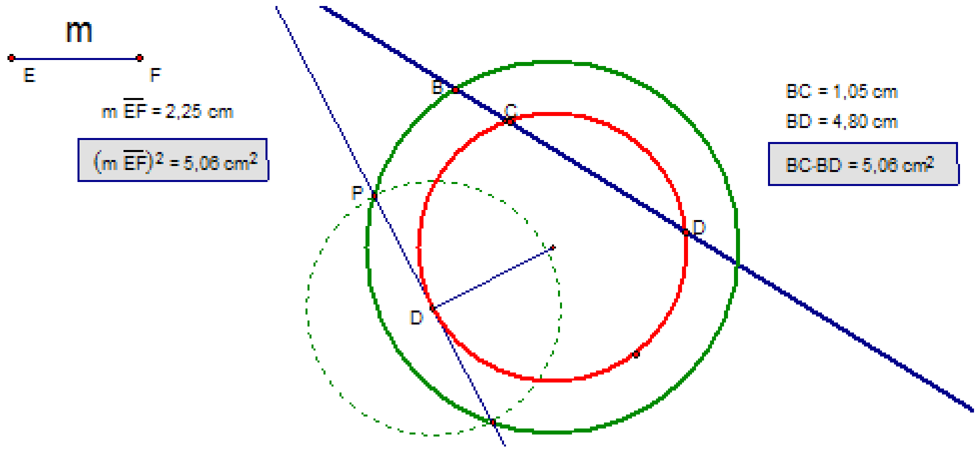
Učenici će uočiti da je potencija točke T s obzirom na kružnicu pozitivna ako se točka T nalazi izvan kružnice, negativna ako se točka T nalazi unutar kružnice i nula ako se točka T nalazi na kružnici.

Primijenite naučeno.

Oblik rada: rad u paru ili u skupinama

Zadatak 1:

Učenici će po uputama konstruirati točku T, vidjeti da je trag točke T kružnica koncentrična zadanoj kroz točku T i konstruirati tu kružnicu.



Zadatak 2:

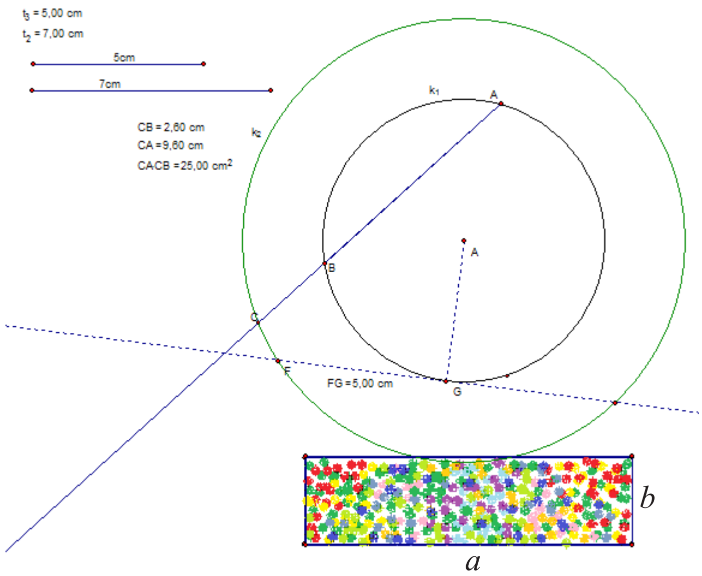
Upute:

– Moramo konstruirati dužine duljina a i b tako da vrijedi $a - b = 7$ i $a \cdot b = 25$.

– Konstruirajmo kružnicu k_1 promjera većeg od 7 cm i na njoj tetivu $\overline{AB}$ duljine 7 cm.

– Konstruirajmo kružnicu k_2 čije točke u odnosu na kružnicu k_1 imaju potenciju 25.

– Produžimo tetivu $\overline{AB}$ preko vrha B do sjecišta C sa kružnicom k_2.



– Vrijedi da je $a = |AC|$ i $b = |BC|$.

Zadatak 3:

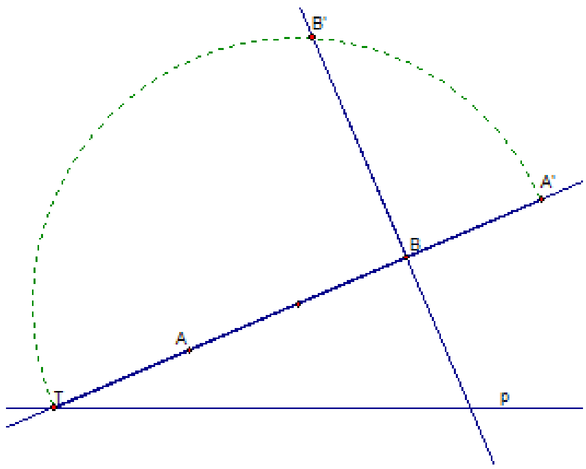
Upute:

Ograda je pravac p, voćke točke A i B.

– Neka je točka T presjek pravca AB i pravca p.

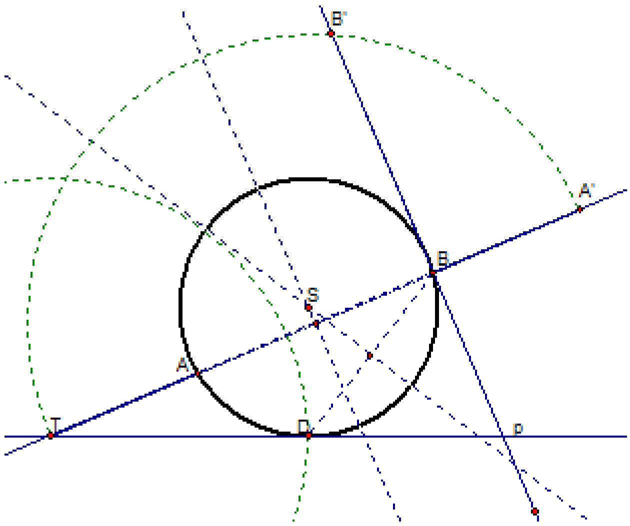
– Na pravcu p treba odrediti točku D tako da vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TD|^2$

– $|BA'| = |TA|$, $|BB'|^2 = |BA'| \cdot |TB| = |TA| \cdot |TB|$, $|BB'| = |TD|$



– Na pravac p od točke T nanesemo duljinu $|BB'| = |TD|$.

– Konstruiramo kružnicu kroz točke A, B i D.



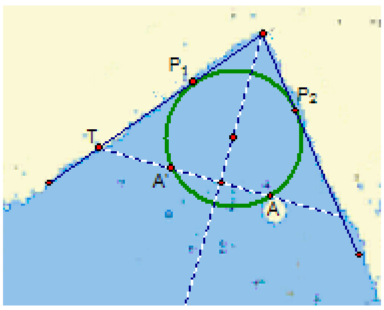
Zadatak 4:

Upute:

– Neka su obale krakovi kuta, a otočić točka A unutar kuta.

– Kružnica prolazi točkom A' koja je simetrična točki A s obzirom na simetralu kuta.

– Dalje postupamo kao u prethodnom zadatku.



Možemo li više?

Zadatak 5.

Učenici će po uputama konstruirati točku T, vidjeti da je trag točke T kružnica koncentrična zadanoj kroz točku T i konstruirati tu kružnicu.

Zadatak 6.

Učenici će konstruirati kružnice kao u **Zadatku 1**. Točke koje imaju potenciju $|PR|^2$ u odnosu na obje zadane kružnice sjecišta su tih kružnica. Učenici će pomičući točku R vidjeti da se točke koje imaju potenciju $|PR|^2$ u odnosu na obje zadane kružnice nalaze na dva polupravca.

Zatim će konstruirati kružnice kao u **Zadatku 5.** te će pomičući točku R vidjeti da se točke koje imaju potenciju $-|PR|^2$ u odnosu na obje zadane kružnice nalaze na dužni. Također će uočiti da polupravci i dužina pripadaju jednom pravcu koji se zove potencijalna os.

Potencijalna os za kružnice koje se/su:

a. dodiruju je zajednička tangenta u točki dodira

b. sijeku je pravac koji spaja njihova sjecišta

c. ne sijeku je pravac okomit na spojnicu njihovih središta

d. koncentrične ne postoji.

1.8. Preslikavanja ravnine

U ovoj će aktivnosti učenici:

- translatirati točke za zadani vektor te odrediti njihove koordinate
- istražiti i opisati svojstva translacije, osne simetrije, centralne simetrije, rotacije i homotetije
- dokazati da su translacija, osna simetrija, centralna simetrija i rotacija izometrije
- dokazati da homotetija nije izometrija
- crtati osno i centralno simetrične točke te odrediti njihove koordinate
- otkriti da je centralna simetrija poseban slučaj rotacije za 180°
- otkriti da se osna simetrija može definirati kao translacija za vektor
- pomoću koordinata zapisati rotaciju oko ishodišta koordinatnog sustava za kut α
- otkriti da je kompozicija dviju osnih simetrija s obzirom na usporedne osi translacija
- otkriti da je kompozicija dviju osnih simetrija s obzirom na osi koje se sijeku rotacija
- vrednovati svoj rad.

U čemu je problem?

Nastavnik će s učenicima ponoviti tražene definicije:

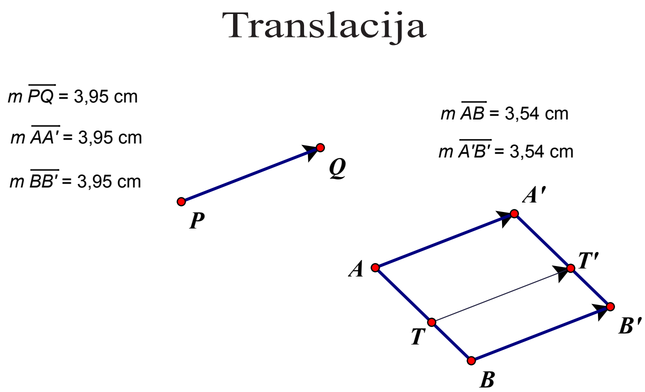
→ **Translacija:** Neka je $\overrightarrow{PQ}$ zadani vektor. Translacija u smjeru vektora $\overrightarrow{PQ}$ preslikavanje je ravnine koje svakoj točki A ravnine pridružuje točku A' tako da je $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PQ}$.

→ **Osna simetrija:** Neka je p zadani pravac. Osna simetrija s obzirom na pravac p preslikavanje je ravnine koje svakoj točki A ravnine pridružuje točku A' tako da je p simetrala dužine $\overline{AA'}$ ako A nije na pravcu p, a $A' = A$ ako je A na pravcu p.

→ **Rotacija:** Neka je zadana točka O i kut α. Rotacija oko točke O za kut α preslikavanje je ravnine koje svakoj točki A ravnine pridružuje točku A' tako da je $|OA'| = |OA|$ i $\angle AOA' = \alpha$.

→ **Centralna simetrija:** Neka je zadana točka O. Centralna simetrija s obzirom na točku O preslikavanje je ravnine koje svakoj točki A ravnine pridružuje točku A' tako da je O polovište dužine $\overline{AA'}$.

Potražite pomoć tehnologije.



Učenici će uočiti da su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ usporedne i jednakih duljina. Uz pomoć nastavnika mogu provesti dokaz.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'A} = \vec{0}$, kako je po definiciji translacije $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, imamo

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{B'A'} + \left(-\overrightarrow{PQ}\right) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'A'} = \vec{0}$$

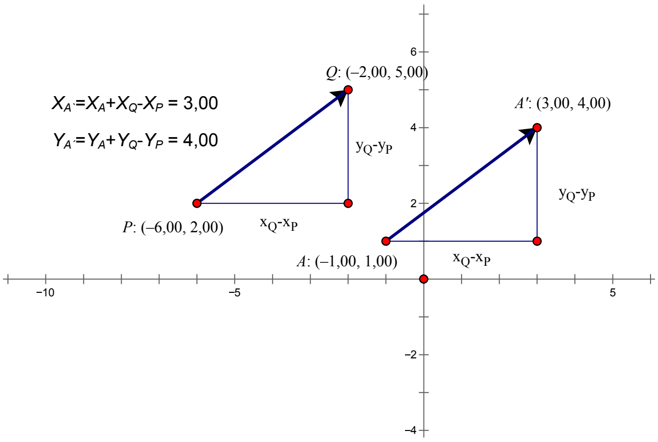
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{B'A'}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}.$$

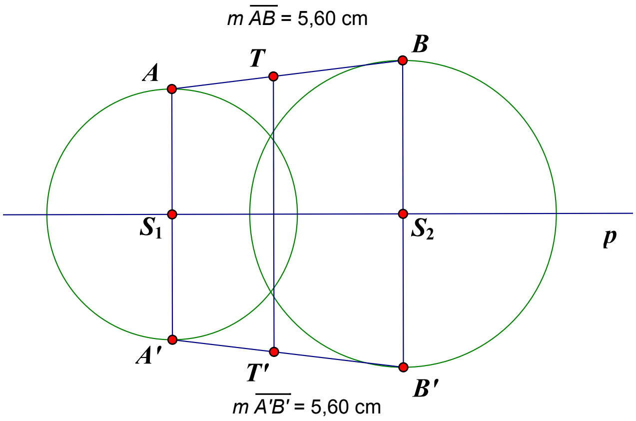
Učenici će uočiti da točka T' pripada dužini $\overline{A'B'}$ i zaključiti da translacija dužinu preslikava u dužinu.

Neka je $\overrightarrow{PQ}$ vektor translacije, $P(x_P, y_P), Q(x_Q, y_Q)$. Translacija u smjeru vektora $\overrightarrow{PQ}$ svakoj točki $A(x_A, y_A)$ pridružuje točku $A'(x_{A''}, y_{A'})$, pri čemu je

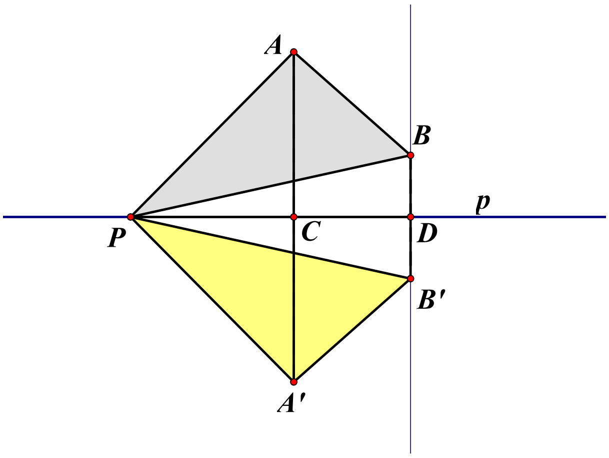
$$x_{A'} = x_A + x_Q - x_P \qquad y_{A'} = y_A + y_Q - y_P$$



Osna simetrija



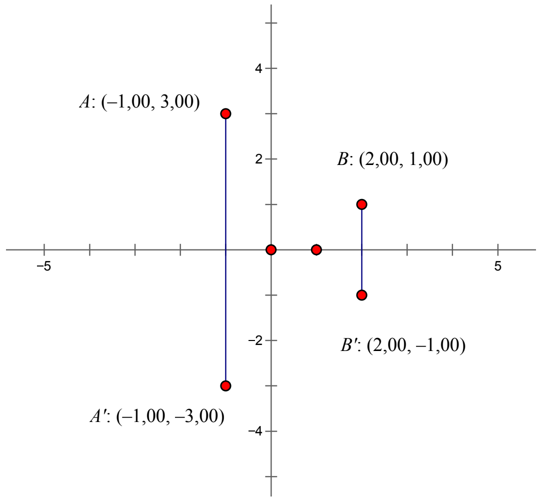
Učenici će uočiti da su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ jednakih duljina, ali da nisu paralelne. Pravci kojima pripadaju sijeku se na pravcu p. Uz pomoć nastavnika mogu provesti i dokaz:



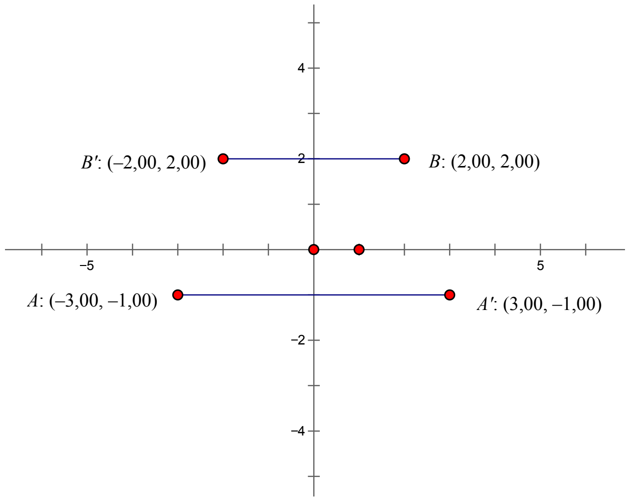
Neka je točka P proizvoljna točka na pravcu p. Trokuti PAC i $PA'C$ su sukladni ($|AC|=|A'C|$, $\measuredangle PCA=\measuredangle PCA', \overline{PC}$ zajednička) pa je $|PA|=|PA'|$, $\measuredangle APC=\measuredangle A'PC$. Analogno, iz sukladnosti trokuta PBD i $PB'D$ slijedi $|PB|=|PB'|$, $\measuredangle BPD=\measuredangle B'PD$. Zaključujemo da su sukladni trokuti PAB i $PA'B'$ pa je $|AB|=|A'B'|$.

Učenici će uočiti da točka T' pripada dužini $\overline{A'B'}$ i zaključiti da osna simetrija dužinu preslikava u dužinu.

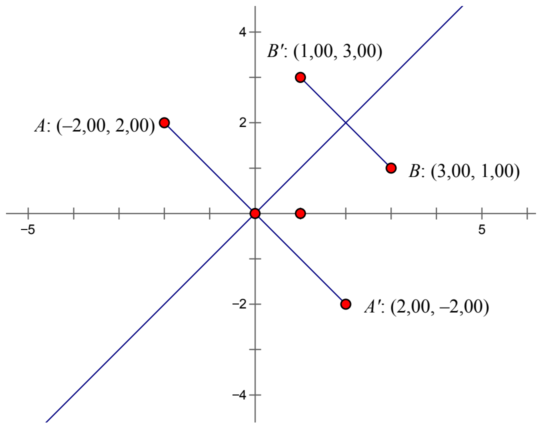
Osna simetrija s obzirom na os x svaku točku $T(x,y)$ preslikava u $T'(x,-y)$.



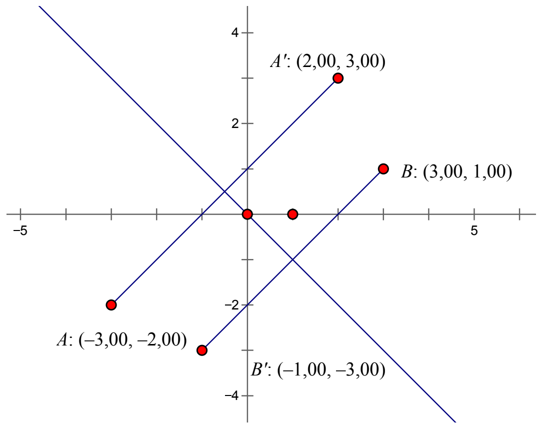
Osna simetrija s obzirom na os y svaku točku $T(x,y)$ preslikava u $T'(-x,y)$.



Osna simetrija s obzirom na simetralu I. i III. kvadranta svaku točku $T(x,y)$ preslikava u $T'(y,x)$.



Osna simetrija s obzirom na simetralu II. i IV. kvadranta svaku točku $T(x,y)$ preslikava u $T'(-y,-x)$.

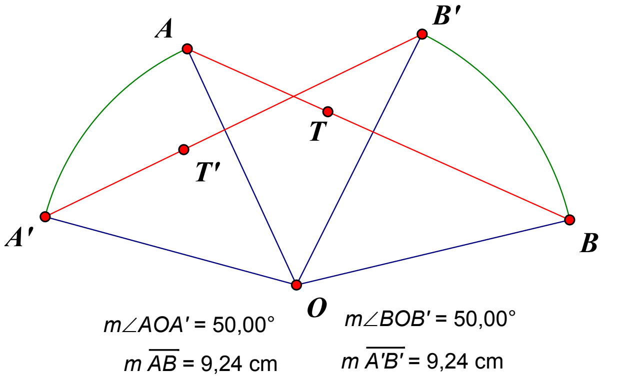


Rotacija

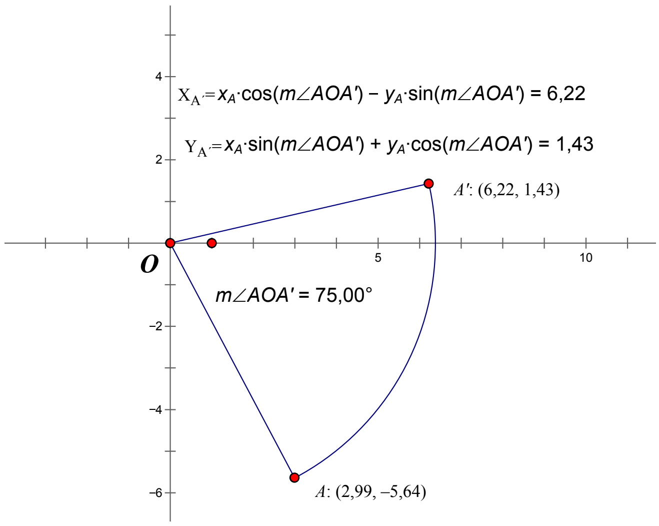
Učenici će uočiti da su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ jednakih duljina, ali da nisu paralelne. Uz pomoć nastavnika mogu provesti i dokaz:

Trokuti OAB i $OA'B'$ su sukladni ($|OB|=|OB'|, |OA|=|OA'|, \measuredangle AOB = \measuredangle A'OB'$ jer se sastoji od kuta α i $\measuredangle B'OA$). Zaključujemo da je $|AB|=|A'B'|$.

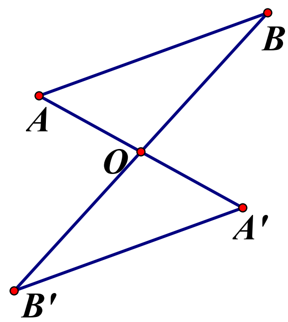
Učenici će uočiti da točka T' pripada dužini $\overline{A'B'}$ i zaključiti da rotacija dužinu preslikava u dužinu.



Točka $T(x,y)$ pri rotaciji oko ishodišta koordinatnog sustava za kut α preslikava se u točku $T'(x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha)$. S učenicima prvog razreda ovaj dio može se izostaviti. Učenici viših razreda mogu formulu provjeriti u programu dinamične geometrije.



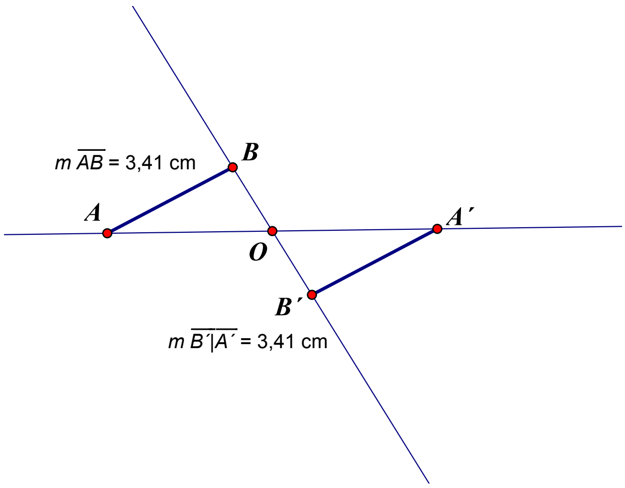
Centralna simetrija

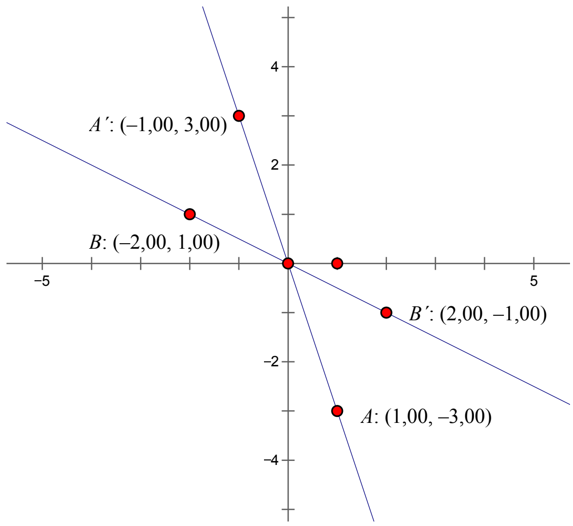


Učenici će uočiti da su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ jednakih duljina i da su paralelne. Uz pomoć nastavnika mogu provesti i dokaz:

Trokuti OAB i $OA'B'$ su sukladni ($|OB| = |OB'|, |OA| = |OA'|, \measuredangle AOB = \measuredangle A'OB'$). Zaključujemo da je $|AB| = |A'B'|$. Paralelnost proizlazi iz jednakosti kutova $\measuredangle ABO = \measuredangle OB'A'$.

Učenici će uočiti da točka T' pripada dužini $\overline{A'B'}$ i zaključiti da centralna simetrija dužinu preslikava u dužinu.





Centralna simetrija poseban je slučaj rotacije oko ishodišta koordinatnog sustava za kut 180°.

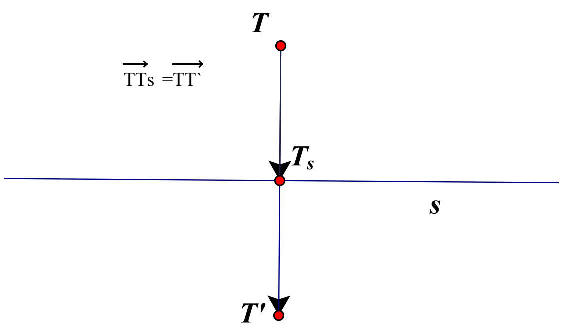
Za $\alpha = 180°$ dobivamo:

$$x' = x\cos 180° - y\sin 180° = -x$$

$$y' = x\sin 180° + y\cos 180° = -y,$$

odnosno $T'(-x,-y)$.

Osnu simetriju možemo zapisati kao translaciju za vektor $2\overrightarrow{TT_S}$ pri kojoj je T_S ortogonalna projekcja točke T na os simetrije s.



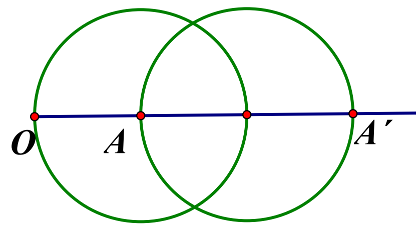
Homotetija

Učenici će točku A' konstruirati kao sjecište pravca OA i kružnice sa središtem u točki A polumjera $|OA|$. Analogno će konstruirati točku B'. Uočit će da ovo preslikavanje nije izometrija.

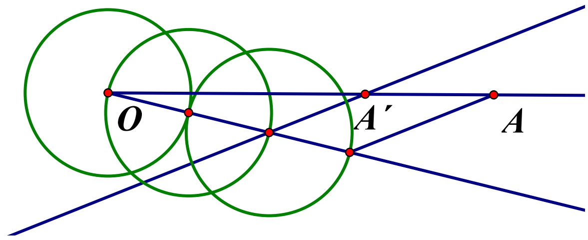
Zadatak 1.

Učenici će konstruirati točku A' kao presjek pravca i kružnice ili dvaju pravaca.

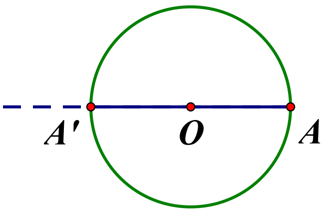
$k = 3$



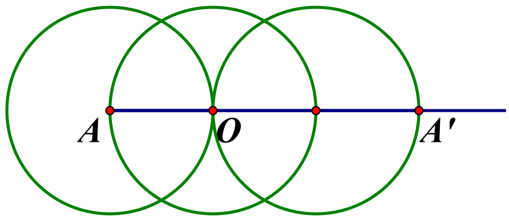
$k = \frac{2}{3}$



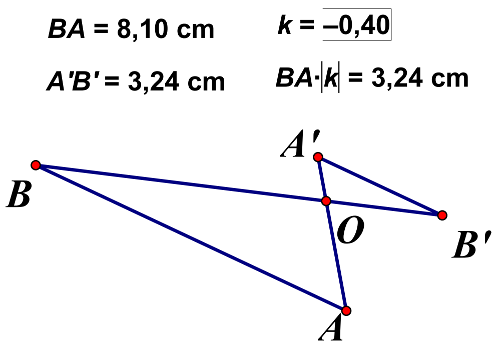
$k = -1$



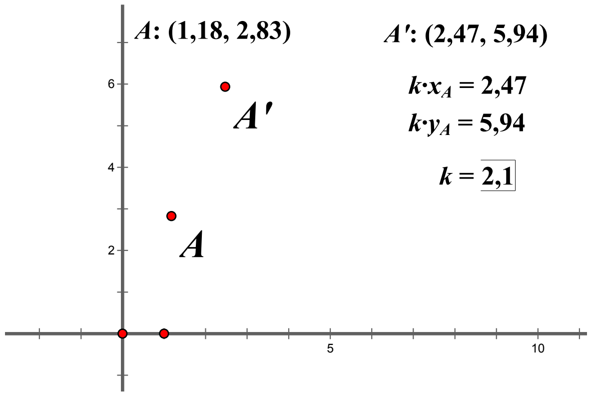
$k = -2$



Učenici će konstruirati homotetičnu sliku koristeći transformaciju programa dinamične geometrije. Uočit će da su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ paralelne i da vrijedi $|A'B'| = |k||AB|$.



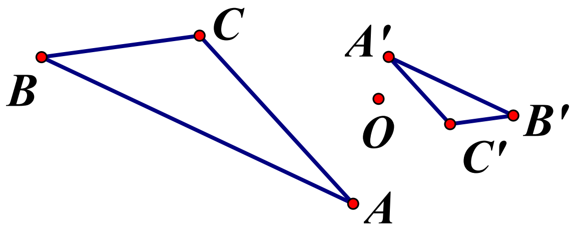
Trokuti AOB i $A'OB'$ slični su po S-K-S poučku o sličnosti trokuta.



Homotetija sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava svakoj točki $T(x, y)$ pridružuje točku $T'(kx, ky)$.

Zadatak 2.

Trokuti su slični, koeficijent sličnosti je *k*.

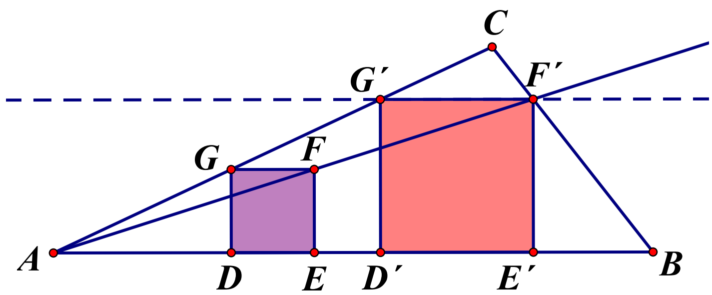


Zadatak 3.

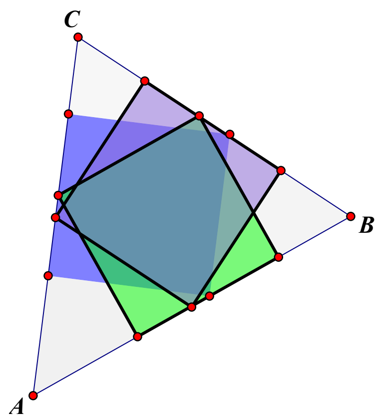
Zadatak ima tri rješenja ako je trokut šiljastokutni, a ako je tupokutni onda ima jedno rješenje.

Tupokutni trokut

Nacrtamo kvadrat tako da na najduljoj stranici trokuta budu dva vrha kvadrata i na jednoj od preostalih stranica jedan vrh kvadrata. Na kvadrat primijenimo homotetiju sa središtem u vrhu *A* i koeficijentom $k = \frac{|AF'|}{|AF|}$.



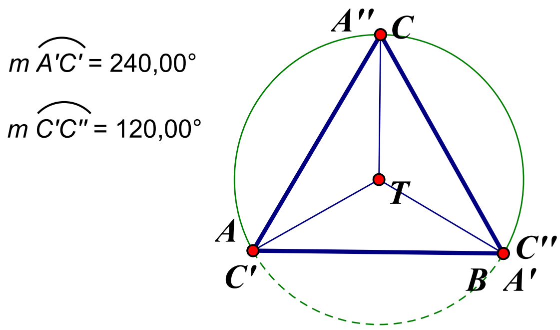
Šiljastokutni trokut



Primijenite naučeno.

Zadatak 4.

Rješenje: $k \cdot 120°, k \in \mathbf{Z}$.

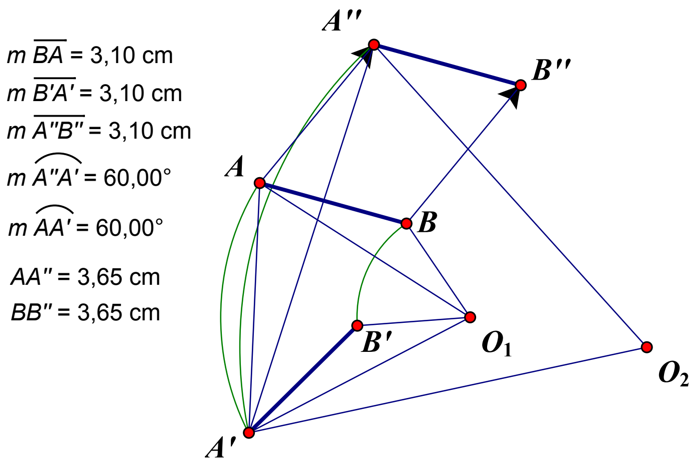


Zadatak 5.

Rješenje: Postoji rotacija za 180°.

Zadatak 6.

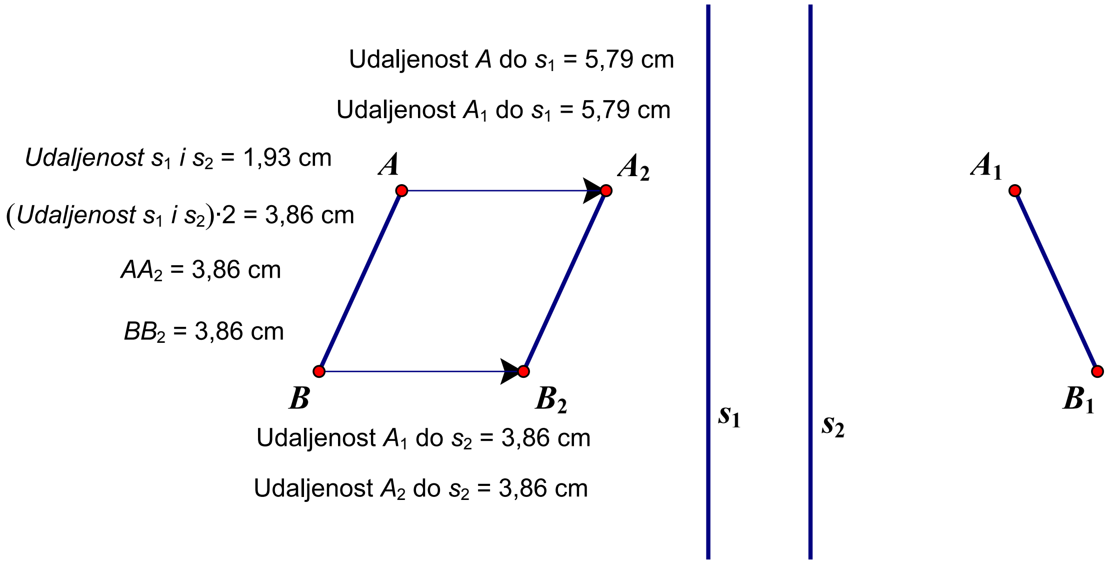
Rješenje: Postoji translacija.



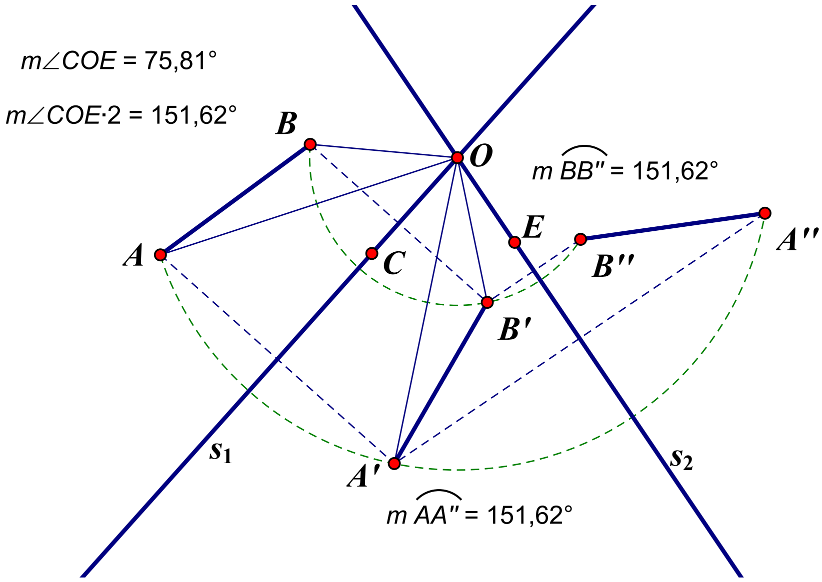
Zadatak 7.

Rješenje:

a) Dobiva se dužina koja se može dobiti iz $\overline{AB}$ translacijom za vektor okomit na s_1 i s_2, duljina tog vektora jednaka je dvostrukoj udaljenosti pravaca s_1 i s_2.



b) Dobiva se dužina koja se može dobiti iz $\overline{AB}$ rotacijom oko presjeka pravaca s_1 i s_2 za dvostruki kut što ga ti pravci zatvaraju.



1.9. Parabola

U ovoj će aktivnosti učenici:

- prepoznati parabolu opisanu svojim tangentama
- odrediti točku koja pripada paraboli
- pokazati da konstruirane točke zadovoljavaju definiciju parabole
- uočiti svojstva parabole
- dokazati svojstva parabole.

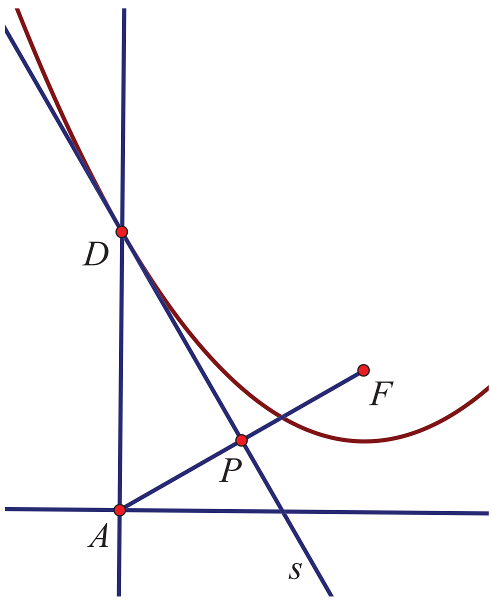
Za odvijanje aktivnosti predviđena su dva školska sata. Za konstrukciju parabole presavijanjem papira potrebno je pripremiti dovoljno materijala, za svakog učenika barem po jedan arak papira. Za izvedbu ostalih konstrukcija te izvođenje zaključaka o svojstvima parabole pretpostavlja se upotreba računala i programa dinamične geometrije.

Nastavnik će pratiti pojedinačne radove učenika, intervenirati ako uoči da učenik nije u mogućnosti pratiti nastavne materijale, pomoći pri korištenju računalnog alata te ih uputiti u provođenje dokaza ili s njima provesti dokaze. Bržim učenicima preporučit će da se zadrže na dijelu „**Kako bi to riješila teorija?**“ i „**Možemo li više?**“. U nastavku su prikazani predviđeni učenički postupci i zaključci.

Konstrukcija parabole po modelu

Razmislite:

1. Simetrale dužine ocrtavaju parabolu čije su tangente.
2. Točka D presjek je simetrale dužine $\overline{AF}$ i okomice na ravnalicu u točki A.



Kako bi to riješila teorija?

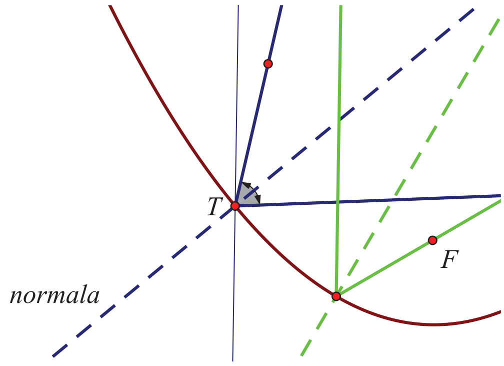
1. Točka D nalazi se na simetrali dužine $\overline{AF}$ te vrijedi $d(D,A)=d(D,F)$, a jer je $\overline{DA}$ okomita na r slijedi $d(D,A)=d(D,r)$ te prema definiciji točka D pripada paraboli čiji je fokus F i ravnalica r.
2. Pretpostavimo suprotno tj. da postoji $T \neq D$ takva da T pripada pravcu s i paraboli. Tada vrijedi $d(T,A)=d(T,F)$ i $d(T,r)=d(T,F)$ te slijedi $d(T,A)=d(T,R) \Rightarrow T=D$.

Primijenite naučeno.

Nakon što su provedene konstrukcije, uputimo učenike na istraživanje svojstava parabole te donošenje zaključaka.

Svojstvo *I*

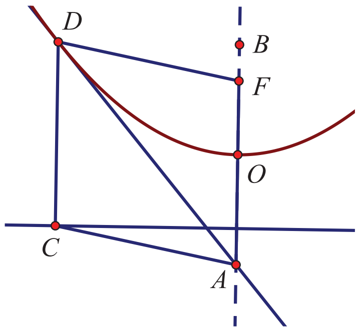
Učenici uočavaju zrcalno svojstvo parabole, zrake paralelne sa osi parabole odbijaju se kroz žarište.



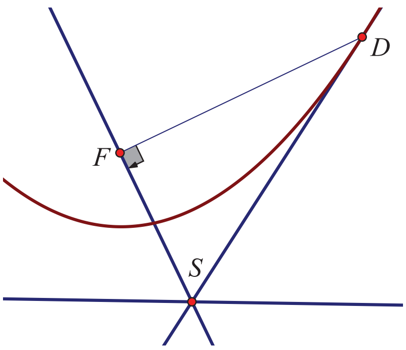
Svojstvo *II*

Točke A i B simetrične su s obzirom na tjeme parabole O.

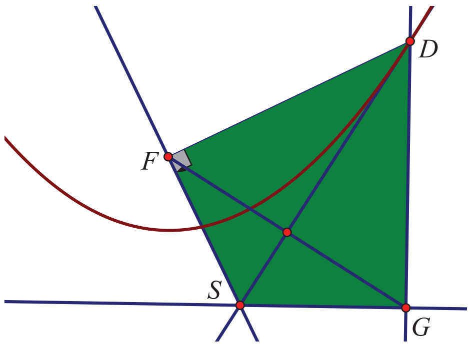
Četverokut $ACDF$ je romb.



Svojstvo *III*



Kut $\angle DFS = 90°$.



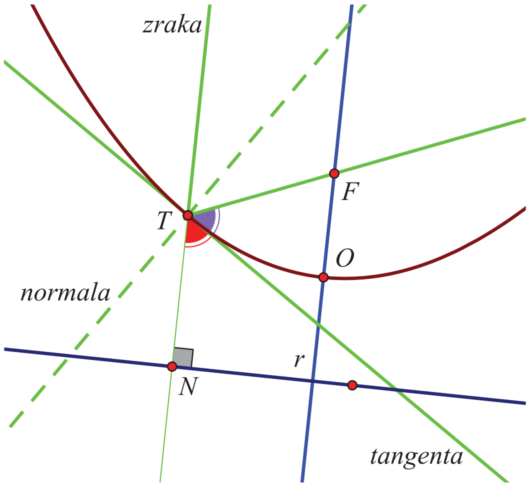
Možemo li više?

Učenike koji dođu do svojstava možemo uputiti da dokažu neka (ili sva) od triju svojstava.

Dokaz *I*

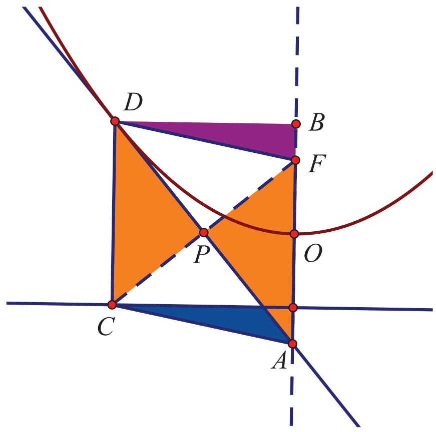
Neka zraka paralelna s osi parabole siječe parabolu u točki T. Konstruirajmo polupravac TF.

Konstruirajmo simetralu kuta $\angle NTF$. Simetrala sadrži točku T i vrijedi $d(T,F)=d(T,N)$, jer je u jednakokračnom trokutu simetrala kuta u vrhu T ujedno simetrala nasuprotne stranice $\overline{NF}$. Stoga je simetrala ujedno i tangenta, pa je normala u točki T ujedno i simetrala kuta *zraka* $-T-F$. Zraka odbijanja prolazi žarištem parabole.



Dokaz *II*

Iz sukladnosti trokuta *CPD* i *FPA*, te sukladnosti dužina $\overline{CD}$ i $\overline{DF}$ slijedi da je *CAFD* romb (*C* je *suprotište* od *F* s obzirom na tangentu u *D*). Slično, zaključujemo da su pravokutni trokuti *FBD* i *CAK* sukladni, te tvrdnja slijedi jer je $d(B,O)=p+d(F,B)=p+d(K,A)$.



Dokaz *III*

Trokuti *DFS* i *SGD* sukladni su (SKS poučak). $\angle G=90°$, slijedi $\angle F=90°$.

1.10. Elipsa

U ovoj će aktivnosti učenici:

- prepoznati elipsu koja je zadana grafički
- odrediti elemente elipse (fokuse, poluosi)
- pokazati da konstruirane točke zadovoljavaju definiciju elipse ili njezinu jednadžbu
- modelirati problemsku situaciju.

Za odvijanje aktivnosti predviđena su dva školska sata. Planirano je da vrtlarska konstrukcija elipse najprije bude izvedena u uvjetima koji simuliraju uvjete iz naziva konstrukcije, pa se pretpostavlja upotreba stiroporne ploče, dvaju čavlića, debljeg konca i olovke. Za izvedbu daljnjih konstrukcija pretpostavlja se upotreba računala i programa dinamične geometrije. Posljednja konstrukcija izvodi se presavijanjem kruga od papira, pa treba planirati i taj materijal.

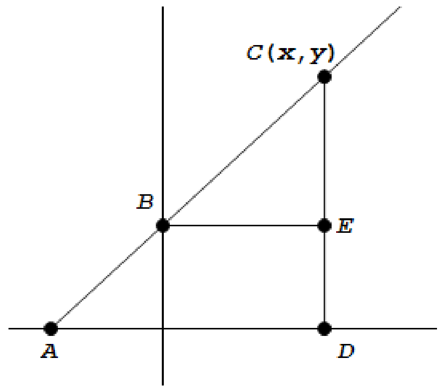
Nastavnik će pratiti pojedinačne radove učenika, intervenirati ako uoči da učenik nije u mogućnosti pratiti nastavne materijale, pomoći pri korištenju računalnog alata. Bržim učenicima preporučit će da se zadrže na dijelu „**Kako bi to riješila teorija?**“, „**Možemo li više?**“ i „**Primijenite naučeno.**“, a koji je prikazan u nastavku.

Kako bi to riješila teorija?

Zidarska konstrukcija elipse

Velika poluos elipse nalazi se na osi ordinata i vrijedi $a = |AC|$, a mala poluos se nalazi na osi apscisa i vrijedi $b = |BC|$.

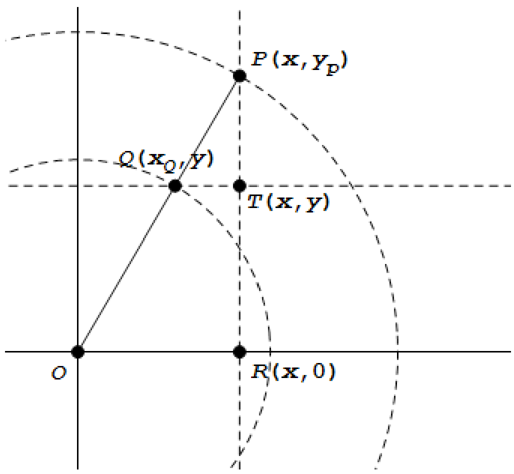
Želimo dokazati da se točka C nalazi na elipsi, odnosno da njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu elipse.



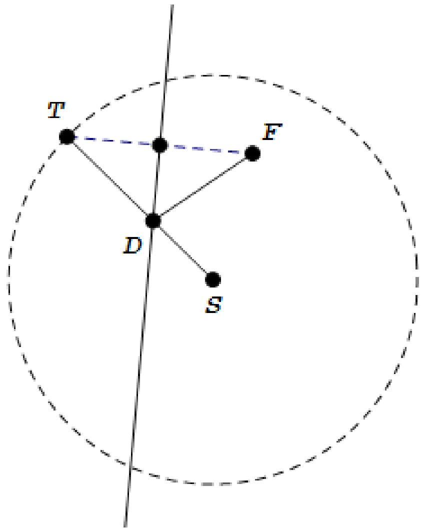
Kako je ΔADC sličan ΔBEC, to je $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|CE|}$ odnosno $\frac{a}{b} = \frac{y}{|CE|}$. Slijedi $|CE| = \frac{by}{a}$.
Primijenimo li Pitagorin poučak na ΔBEC, dobivamo $b^2 = x^2 + |CE|^2 = x^2 + \frac{b^2 y^2}{a^2}$ iz čega dijeljenjem s b^2 dobivamo jednadžbu elipse čija se velika poluos nalazi na osi ordinata, a mala poluos na osi apscisa.

Elipsa kao afina slika kružnice

Valja uočiti da su trokuti ΔORP i ΔQTP slični trokuti. Iz njihove sličnosti slijedi proporcionalnost odgovarajućih stranica $\frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{|RP|}{|RT|}$, odnosno $\frac{a}{b} = \frac{y_P}{y}$ iz čega slijedi $y_P = \frac{ay}{b}$.
Primjenom Pitagorina poučka na trokut ΔORP imamo $a^2 = x^2 + {y_P}^2 = x^2 + \frac{a^2 y^2}{b^2}$. Dijeljenjem s a^2 slijedi da koordinate točke T zadovoljavaju jednadžbu elipse.

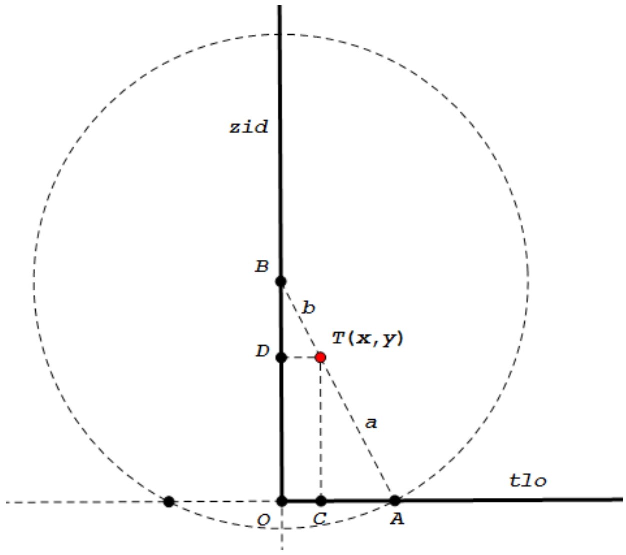


Možemo li više?



Nakon što je konstrukcija sprovedena na ove načine (*Simetrale dužine i elipsa*, *Konstrukcija elipse presavijanjem papira*), elipsa je opisana svojim tangentama. Točke S i F fokusi su elipse. Točka D točka je dodira elipse i tangente i može biti konstruirana kao presječnica tangente i spojnice točaka T i S. Jasno je da točka D pripada elipsi jer je D točka simetrale $\overline{TF}$, pa je $|FD| = |DT|$ i točka D pripada polumjeru $\overline{ST}$, pa je $|DF| + |DS| = |DT| + |DS| = |ST| = r$.

Primijenite naučeno.



Velikoj poluosi elipse odgovara udaljenost kante od podnožja ljestvi, a maloj poluosi udaljenost kante od vrha ljestvi. Neka je kanta u koordinatnom sustavu predstavljena točkom T. Valja uočiti sličnost trokuta DTB i CAT. Tada je $\frac{b}{x} = \frac{a}{|CA|}$ iz čega slijedi, uz primjenu Pitagorina poučka na tokut CAT, $\frac{x^2}{b^2} = \frac{|CA|^2}{a^2} = \frac{a^2 - y^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{a^2}$. Jasno je da točka $T(x,y)$ zadovoljava jednadžbu elipse čija se velika poluos a nalazi na osi ordinata, a mala poluos b na osi apscisa.

1.11. Modeliranje krivuljama drugog reda

U ovoj će aktivnosti učenici:

- procijeniti rješenje postavljenog problema
- prepoznati koja krivulju modelira danu situaciju
- zapisati jednadžbu krivulje
- skicirati promatranu krivulju uz pomoć tehnologije i bez nje
- primijeniti znanja o krivuljama drugog reda u primjerima iz stvarnog života.

Ova aktivnost predviđena je za dva školska sata.

Možete li pretpostaviti?

Učenici će možda pretpostaviti da se posjetioci i vodič nalaze na osi elipse.

Napravite model.

1. Po uvjetima zadatka zaključujemo $2b = 14$, $2a = 29.5$ pa je jednadžba elipse koja modelira promatranu dvoranu $\frac{x^2}{217.5625}+\frac{y^2}{49}=1$. Linearni ekscentricitet je $e=\sqrt{a^2-b^2}\approx 12.983$ pa zaključujemo da su posjetioci udaljeni 25.97 m.
2. Zvučni val se odbija pod istim kutom pod kojim dolazi do prepreke. Ako se šapat iz jednog fokusa čuje u drugom zvučni se val iz jednog fokusa mora uvijek reflektirati u drugi.

Potražite pomoć tehnologije.

Učenici će po uputama nacrtati elipsu i tangentu. Mjerenjem će ustanoviti da pravci F_1T_0 i F_2T_0 zatvaraju s tangentom jednake kutove te da to svojstvo vrijedi za sve točke na elipsi. Uočit će da isto svojstvo vrijedi i za sve elipse.

Kako bi to riješila teorija?

Treba dokazati da se zvuk odbija pod istim kutom.

$$k_1=-\frac{x_0b^2}{y_0a^2},\ k_2=\frac{y_0}{x_0+e},\ k_3=\frac{y_0}{x_0-e}$$

$$tg\alpha=\left|\frac{\frac{y_0}{x_0+e}+\frac{x_0b^2}{y_0a^2}}{1-\frac{y_0}{x_0+e}\cdot\frac{x_0b^2}{y_0a^2}}\right|=\left|\frac{y_0{}^2a^2+x_0{}^2b^2+x_0eb^2}{x_0y_0a^2+y_0ea^2-x_0y_0b^2}\right|$$

$$=\left|\frac{a^2b^2+x_0eb^2}{x_0y_0\left(a^2-b^2\right)+y_0ea^2}\right|=\left|\frac{b^2\left(a^2+x_0e\right)}{y_0e\left(x_0e+a^2\right)}\right|=\left|\frac{b^2}{y_0e}\right|$$

$$tg\beta=\left|\frac{\frac{y_0}{x_0-e}+\frac{x_0b^2}{y_0a^2}}{1-\frac{y_0}{x_0-e}\cdot\frac{x_0b^2}{y_0a^2}}\right|=\left|\frac{y_0{}^2a^2+x_0{}^2b^2-x_0eb^2}{x_0y_0a^2-y_0ea^2-x_0y_0b^2}\right|$$

$$=\left|\frac{a^2b^2-x_0eb^2}{x_0y_0\left(a^2-b^2\right)-y_0ea^2}\right|=\left|\frac{b^2\left(a^2-x_0e\right)}{y_0e\left(x_0e-a^2\right)}\right|=\left|-\frac{b^2}{y_0e}\right|=\left|\frac{b^2}{y_0e}\right|$$

Dakle, $\alpha=\beta$.

Možemo li više?

Iz podataka je $b = 4$, točka (8,1) pripada elipsi. Dobije se $a^2 = \frac{1024}{15}$, $e \approx 7.23$, $h \approx 1.94$. Sjedala treba postaviti na udaljenost 77 cm od ruba dvorane, a visina dvorane iznad sjedala je 1.94 m.

Primijenite naučeno.

Radni centar 1 – Elipsa

1. Najmanja je oko 207 milijuna kilometara, a najveća 250 milijuna kilometara.
2. Iz podataka je $2a = 11.23$. Nadalje, točka $\left(\frac{9.73}{2}, 6.31 - b\right)$ pripada elipsi. Dobivamo kvadratnu jednadžbu za b:

   $0.7506996\, b^2 - 12.62\, b + 39.8161 = 0$

   pa je $b \approx 4.21$. Točka na elipsi je (4.865, 2.1). Širina krila je $2 \cdot 2.1 = 4.2$ m.

Radni centar 2 – Hiperbola

1. $2a = 0.37 \cdot 500 = 185$ km

   $2e = 200$

   $$\frac{x^2}{8555.25} - \frac{y^2}{1443.75} = 1$$

2.

   $A(50, -91)$

   $B(28.5, 0) \Rightarrow a = 28.5$

   $C(x, 31)$

   Jednadžba hiperbole:

   $$\frac{x^2}{28.5^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   $$\frac{50^2}{28.5^2} - \frac{(-91)^2}{b^2} = 1$$

   $$\frac{6751}{3249} = \frac{8281}{b^2} \Rightarrow b^2 = 3985.330914$$

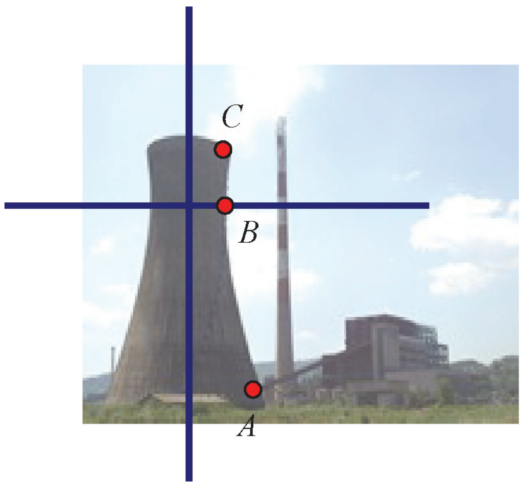
   Točka C:

   $$\frac{x^2}{28.5^2} - \frac{31^2}{3985.330914} = 1$$

   $x^2 = 1008.111339$

   $x = 31.75$

   Širina dimnjaka na vrhu je 63.5 m.



Radni centar 3 – Parabola

1. S obzirom na odabir koordinatnog sustava moguća su različita rješenja. Jedno od mogućih rješenja je: $y^2 = \frac{16}{3}x$, ako je duljine mjerimo u metrima, odnosno $y^2 = \frac{1600}{3}x$ ako duljine mjerimo u centimetrima.

2. a. S obzirom na odabir koordinatnog sustava neka od mogućih rješenja su:

   – Ako je ishodište na vrhu luka jednadžba je $y = -\frac{1}{720}x^2$.

   – Ako je ishodište na rijeci u sredini mosta jednadžba je $y = -\frac{1}{720}\left(x^2 - 3600\right)$.

   – Ako je ishodište na sredini ceste jednadžba je $y = -\frac{1}{720}x^2 - 1$.

   b. Duljine potpornih stupova u metrima su: 1, 1.14, 1.56, 2.25, 3.22, 4.48, 6.

1.12. Tjemena jednadžba krivulja drugog reda

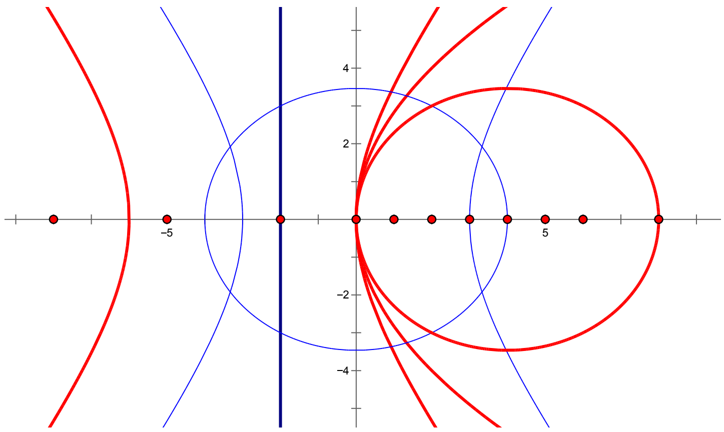
U ovoj će aktivnosti učenici:

- istražiti vezu među zadanim veličinama rabeći program dinamične geometrije
- odrediti pravilo koje povezuje zadane veličine
- generalizirati pravilnosti i veze među zadanim veličinama
- odrediti egzaktnu formulu koja povezuje zadane veličine
- vrednovati svoj rad.

Aktivnost je predviđena za dva školska sata.

Kako to izgleda?

Oblik rada: rad u skupini



Možete li pretpostaviti?

Oblik rada: rad u skupini

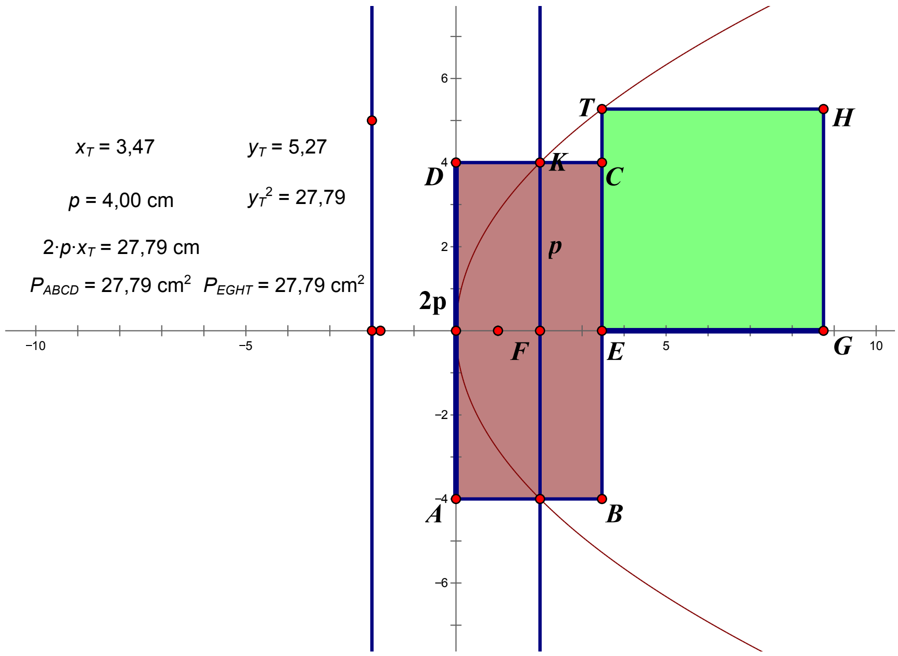
Učenici će unutar skupine raspravljati o postavljenom zadatku i pokušati zapisati jednadžbe. Vjerojatno će doći do traženih jednadžbi:

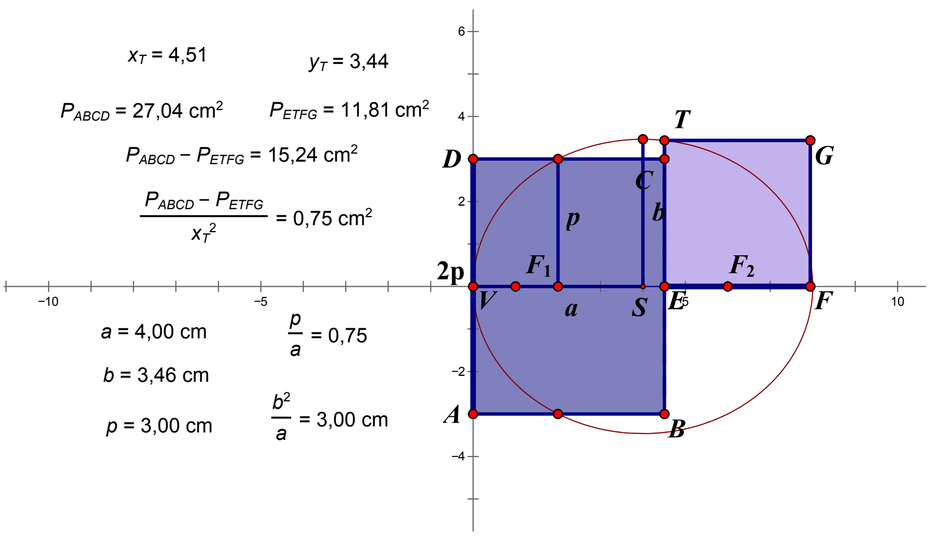
$$y^2 = 2px, \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ i } \frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

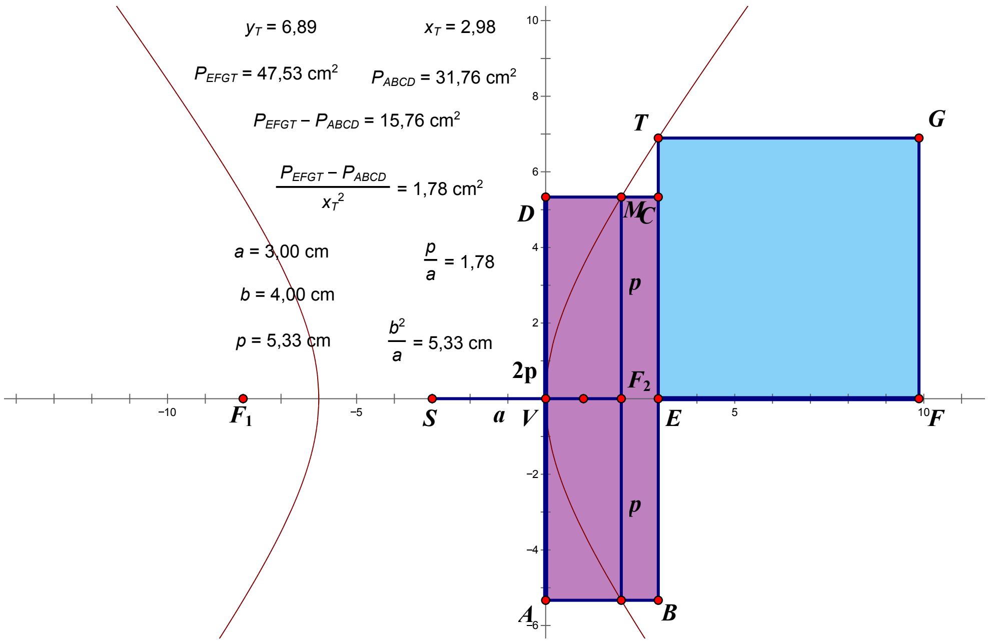
Potražite pomoć tehnologije.

Nastavna pomagala: računalo za svaki par učenika

Oblik rada: rad u skupini. Učenici će se podijeliti u dvije skupine. Jedna skupina radit će elipsu i parabolu, a druga hiperbolu i parabolu.







parabola	$y^2 = 2px$
elipsa	$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$
hiperbola	$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$

Kako bi to riješila teorija?

U ovoj će aktivnosti učenici izvesti tjemene jednadžbe elipse i hiperbole.

Iz jednadžbe $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ izrazimo $y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$, isto tako iz jednadžbe $\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dobijemo $y^2 = 2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$. Zatim malo pojednostavnimo jednadžbe stavljajući $\frac{b^2}{a} = p$, poluparametar elipse odnosno hiperbole.

Jednadžbe prelaze u: $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$ i $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$ što nazivamo jednadžbom elipse, hiperbole u tjemenom obliku.

Možemo li više?

Koristeći zadane oznake učenici će pokušati doći do zajedničke jednadžbe elipse, hiperbole i parabole u tjemenom obliku.

Uvedemo li oznaku $\varepsilon = \frac{e}{a}$, za elipsu ćemo dobiti $\varepsilon^2 = \frac{e^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$.

Isto tako, za hiperbolu iz $\varepsilon = \frac{e}{a}$ slijedi $\varepsilon^2 = \frac{e^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2} = \varepsilon^2 - 1 = -\left(1 - \varepsilon^2\right)$.

Iz ovoga slijedi da je zajednička jednadžba elipse, hiperbole i parabole u tjemenom obliku:

$y^2 = 2px - \left(1 - \varepsilon^2\right)x^2$.

2. Geometrija 2

2.1. Presjek kocke ravninom

U ovoj će aktivnosti učenici:

- na fizičkom modelu kocke (plastelin, model masa, stiropor) pomoću nožića načiniti presjek kocke ravninom
- konstruirati presjeke kocke ravninom
- istražiti postojanje različitih presjeka kocke ravninom
- odrediti vezu između položaja triju točaka na vrhovima i bridovima kocke sa likom presjeka
- izračunati površinu presjeka kocke ravninom
- primijeniti presjeke u problemu iz svakodnevice
- vrednovati svoj rad.

Aktivnost je predviđena za dva školska sata.

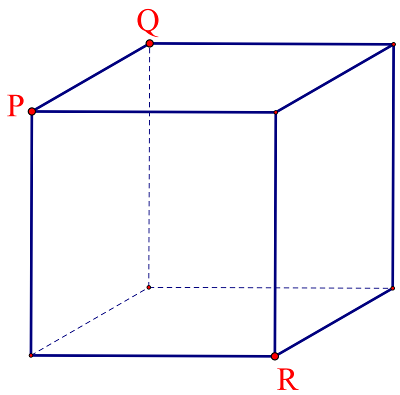
Kako to izgleda?

Potreban materijal: pločica plastelina i nož za svakog učenika, radni listići

Oblik rada: rad u tročlanim skupinama - kolo naokolo.

Učenike podijelite u tročlane skupine. Svaka skupina dobiva tri različita radna listića, po jedan za svakog učenika u skupini. Svaki učenik u skupini dobiva i pločicu plastelina i nož. Učenici rješavaju prvi zadatak na svom listiću. Kad riješe prvi zadatak predaju listić zajedno s modelom kocke učeniku do sebe. Zatim rješavaju drugi zadatak na novom listiću. Pri određivanju presjeka kocke i ravnine mogu se koristiti modelom kocke koji su dobili. Zatim ponovo predaju listić i model učeniku do sebe i rješavaju treći zadatak. Učenici će uočiti da je presjek trokut ili pravokutnik.

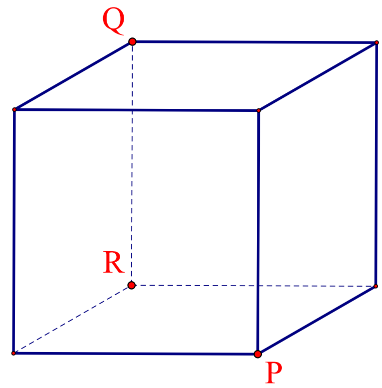
Radni listić 1



1. Oblikujte plastelin u kocku. Postavite malo plastelina druge boje u položaj točaka *P*, *Q*, *R* kao na slici. Nožićem odrežite dio kocke tako da rez prolazi zadanim točkama.
2. Odredite na papiru presjek kocke i ravnine određene izborom triju vrhova kocke.
3. Opišite odnos zadanih točaka (*P*, *R* vrhovi brida kocke, a *Q* nasuprotan, i sl.)

Uočite lik koji je nastao presjekom i imenujte ga.

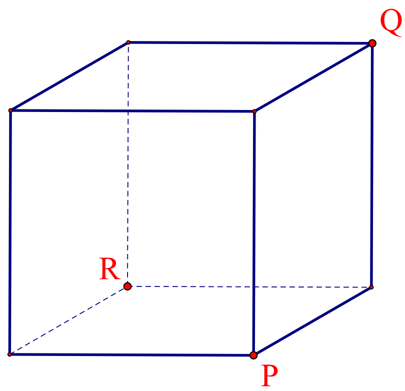
Radni listić 2



1. Oblikujte plastelin u kocku. Postavite malo plastelina druge boje u položaj točaka *P*, *Q*, *R* kao na slici. Nožićem odrežite dio kocke tako da rez prolazi zadanim točkama.
2. Odredite na papiru presjek kocke i ravnine određene izborom triju vrhova kocke.
3. Opišite odnos zadanih točaka (*P*, *R* vrhovi brida kocke, a *Q* nasuprotan, i sl.)

Uočite lik koji je nastao presjekom i imenujte ga.

Radni listić 3



1. Oblikujte plastelin u kocku. Postavite malo plastelina druge boje u položaj točaka *P*, *Q*, *R* kao na slici. Nožićem odrežite dio kocke tako da rez prolazi zadanim točkama.
2. Odredite na papiru presjek kocke i ravnine određene izborom triju vrhova kocke.
3. Opišite odnos zadanih točaka (*P*, *R* vrhovi brida kocke, a *Q* nasuprotan, i sl.)

Uočite lik koji je nastao presjekom i imenujte ga.

Potražite pomoć tehnologije.

Korak 1

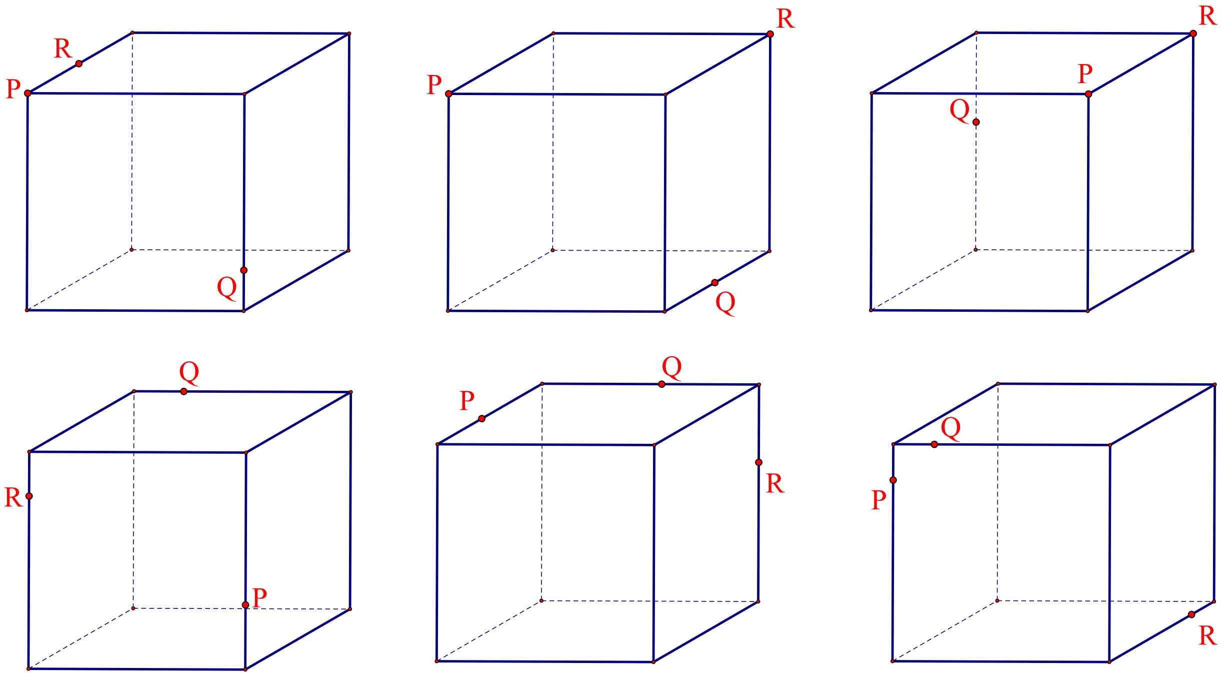
Oblik rada: individualni

Nastavna pomagala: računalo za svakog učenika.

Učenici crtaju kocku i kreiraju alat.

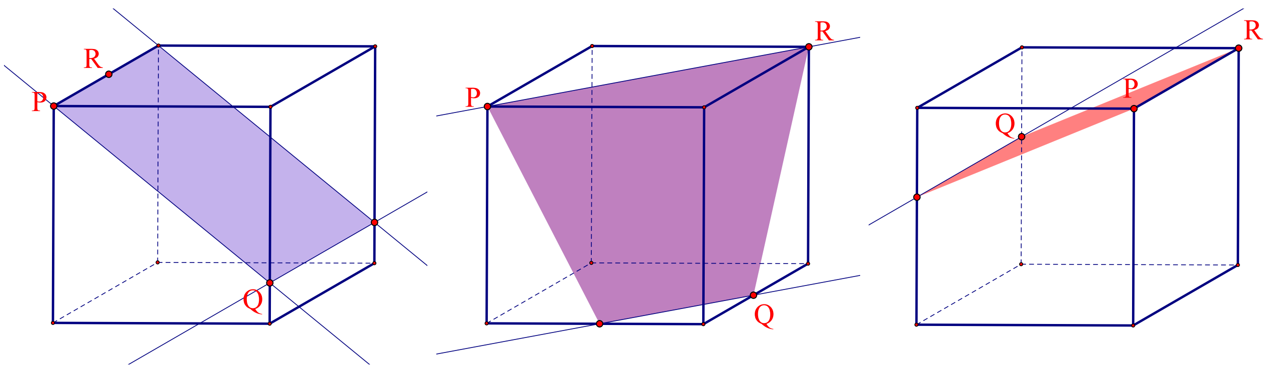
Korak 2

Koristeći alat učenici će nacrtati šest kocki i označiti zadani položaj točaka na svakoj nacrtanoj kocki.

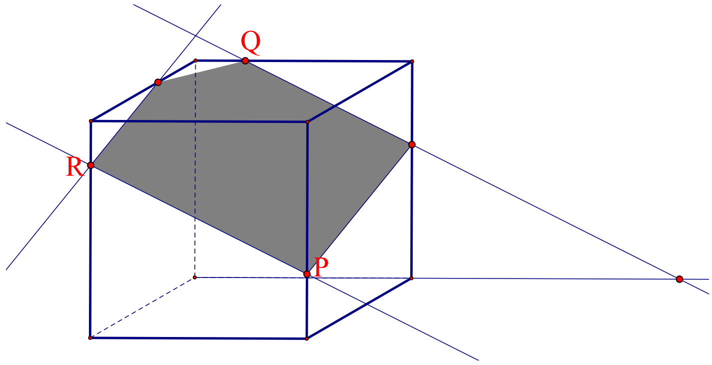


Korak 3

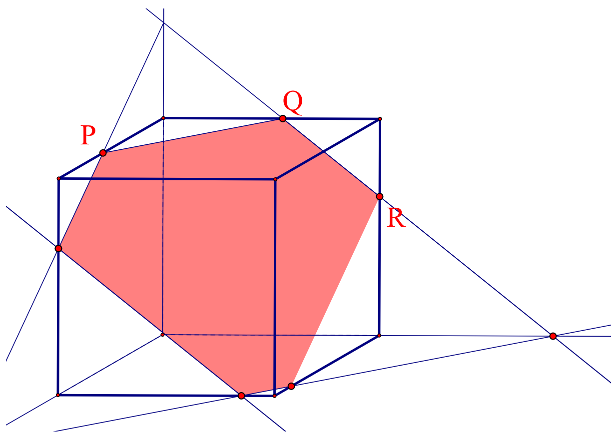
Učenici konstruiraju presjeke kocke i ravnine zadane točkama *PQR*. U prva će tri primjera učenici spajati točke koje pripadaju istoj plohi te konstruirati paralele u paralelnim plohama.

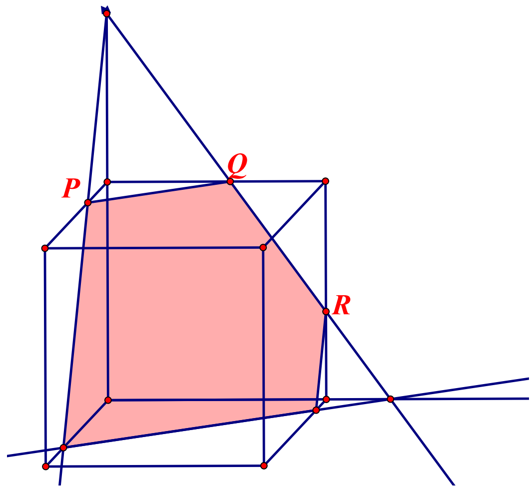


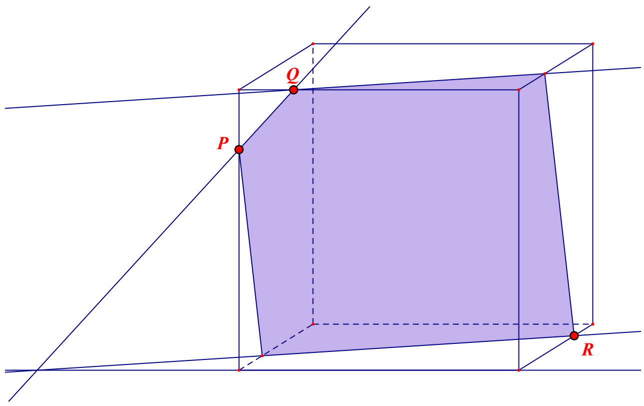
O četvrtom će primjeru učenici konstruirati pravac *PR*, a zatim paralelu s pravcem *PR* točkom *Q*. Odredit će presjek te paralele i stražnjeg lijevog brida te spojiti taj presjek s točkom *R*. Dalje će spajati točke na istim plohama i konstruirati paralele.



U petom će primjeru konstruirati probodište pravca *QR* i ravnine donje baze. Zatim će konstruirati pravac koji sadrži probodište i paralelan je s pravcem *PQ*. Ovisno o položaju točke *R* rješenje može biti šesterokut ili peterokut.







Korak 4

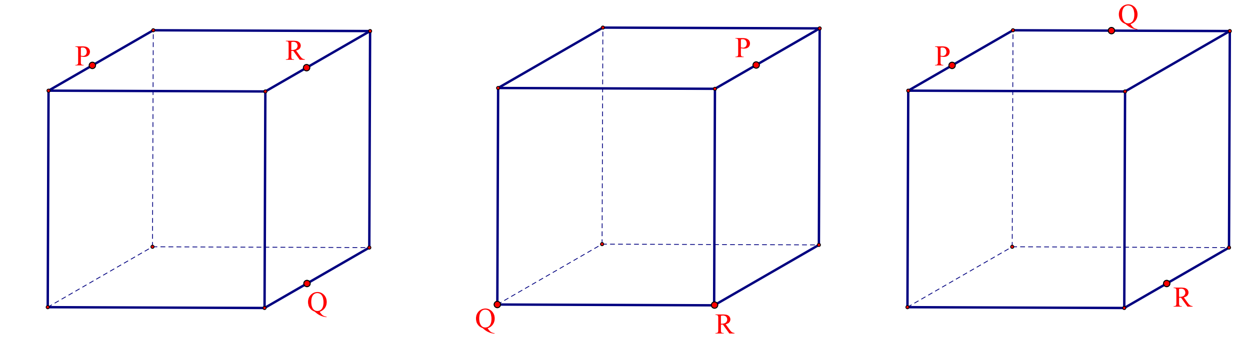
Učenici će uočiti da presjek može biti trokut, četverokut, peterokut ili šesterokut.

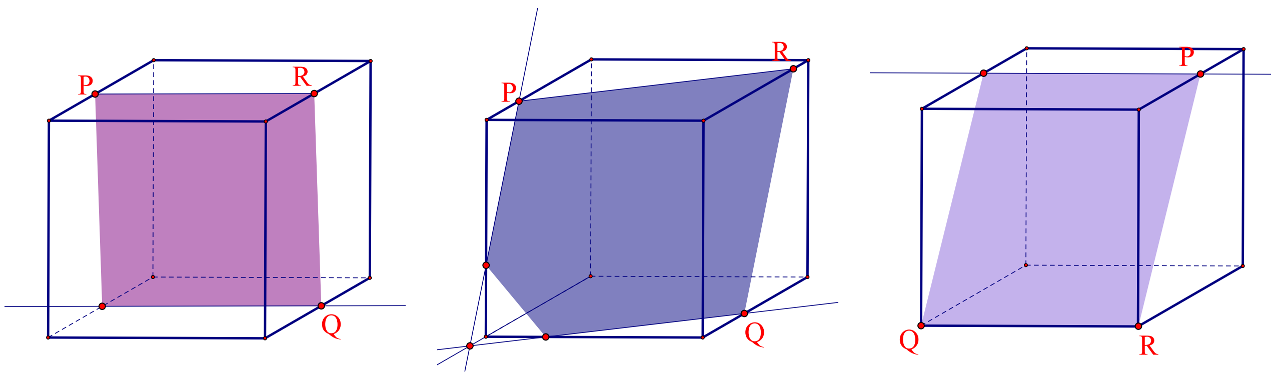
Kako bi to riješila teorija?

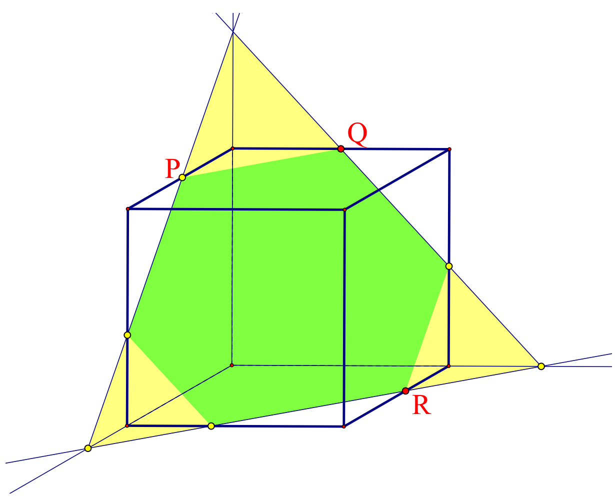
Broj vrhova presjeka kocke ravninom ovisi o položaju zadane ravnine u odnosu na šest strana kocke. Prema tome, ukoliko presjek postoji, on može biti točka, dužina, trokut, četverokut, peterokut ili najviše šesterokut jer kocka ima šest strana.

Možemo li više?

Ovdje će učenici konstruirati presjeke kao i prije, no kod pomicanja točaka duž bridova presjeci mogu „nestati" iako postoje. Potrebno ih je potaknuti da u tom slučaju konstrukciju rade i iz druge perspektive.

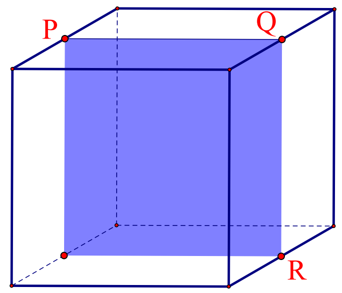




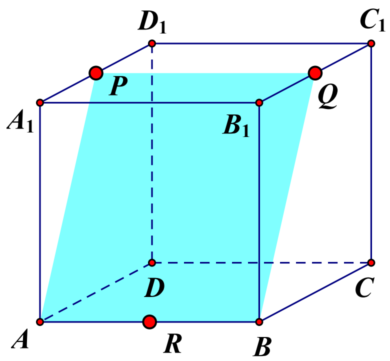


Primijenite naučeno.

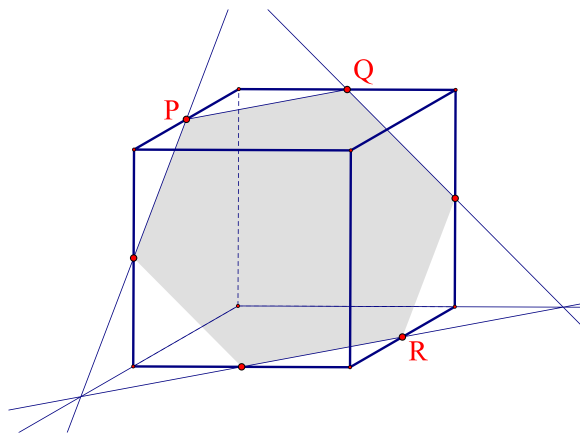
Zadatak 1.



Presjek je kvadrat, površine jednake površini strane kocke.

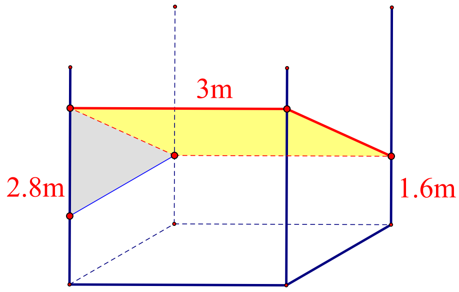


Presjek je pravokutnik čije su stranice dužina $\overline{PQ}$ duljine a i dužina $\overline{PA}$ duljine $|PA| = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, a površina je $P = \dfrac{a^2\sqrt{5}}{2}$.



Presjek je pravilni šesterokut, čija je stranica duljine $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ gdje je duljina brida kocke. Površina presjeka tada iznosi $P = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Zadatak 2.



Tkanina je oblika pravokutnika (presjek kocke ravninom) kojemu je jedna stranica duljine 3 m, a duljinu druge trebamo izračunati. Iz pravokutnog trokuta dobivamo da je druga stranica duljine $\sqrt{1.2^2+3^2}=\sqrt{10.44}\approx 3.23$ m te su dimenzije tkanine 3×3.23, odnosno približne površine 9.69 m^2.

2.2. Presjek piramide ravninom

U ovoj će aktivnosti učenici:

- na fizičkom modelu piramida raditi presjeke ravninom
- konstruirati presjeke piramide ravninom
- računati površine presjeka piramide ravninom
- rabiti vizualizacije i prostorni zor
- primijeniti presjeke u problemu iz svakodnevice.

Aktivnost je predviđena za dva školska sata.

Nastavna sredstva: Dokument *Piramide.gsp*

Nastavna pomagala: plastelin i nožić, računalo za svakog učenika.

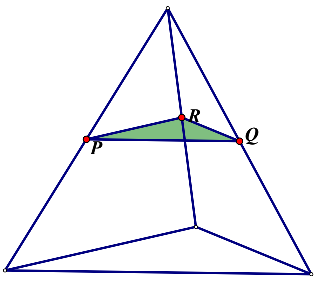
Trostrana piramida

Kako to izgleda?

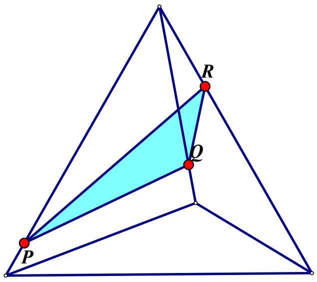
Učenici će u skupini izraditi četiri modela piramida i nožićem odrezati presjek.

Potražite pomoć tehnologije.

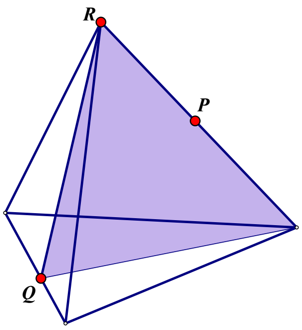
U zadatcima a. i b. učenici će jednostavno dužinama spojiti točke P, Q i R jer dužine pripadaju bočnim plohama. U zadatku c. učenici trebaju uočiti da cijeli bočni brid koji sadrži točke R i P pripada presjeku. U d. zadatku treba konstruirati točku koja pripada ravnini desne bočne plohe. Ta je točka sjecište pravca QR i desnog bočnog brida. U slučaju kad su točke P, Q i R polovišta ta su dva pravca paralelna pa sjecište ne postoji. U tom slučaju treba konstruirati paralelu p s pravcem QR točkom P. Paralela p u traženoj je ravnini presjeka. Osim toga paralela p pripada i ravnini desne bočne plohe. Dokaz: $\overline{QR}$ je srednjica pa je paralelna s desnim bočnim bridom iz čega slijedi da je p paralelna s desnim bočnim bridom. Ravnina bočne plohe sadrži brid i točku P pa sadrži i paralelu p. Točka S je sjecište paralele p i stražnjeg bočnog brida. Zaključujemo da je $\overline{PS}$ srednjica (jer sadrži polovište P i paralelna je s bridom) pa je točka S polovište brida kojem pripada. Stoga je i $\overline{RS}$ srednjica. Presjek je kvadrat.



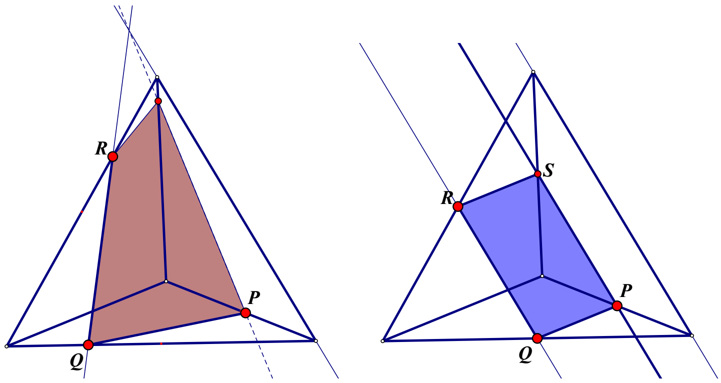
a.



b.



c.



d.

Kako bi to riješila teorija?

a. Presjek je jedankostranični trokut čija je duljina stranice 5 cm, $P=\dfrac{25\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

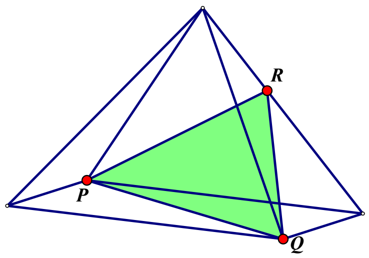
c. Presjek je jednakokračni trokut, duljine stranica su 10 cm, $\dfrac{10\sqrt{3}}{2}$ cm, $\dfrac{10\sqrt{3}}{2}$ cm, površina je $P=25\sqrt{2}$ cm^2.

d. Presjek je kvadrat, duljina stranice je 5 cm, površina je $P = 25$ cm^2.

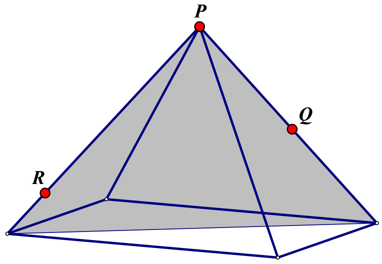
Četverostrana piramida

Potražite pomoć tehnologije.

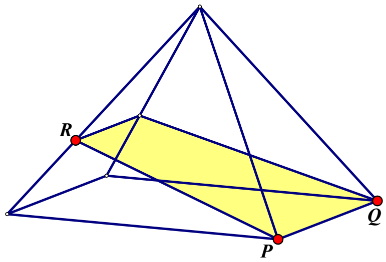
Učenici će jednostavno kao i u slučaju trostrane piramide konstruirati presjeke u zadatcima a. i b. U zadatku c. konstruiramo paralelu s pravcem PQ točkom R i slično kao u slučaju trostrane piramide (d. zadatak) zaključujemo da ta paralela pripada bočnoj plohi. Možemo konstruirati presjek paralele i bočnog brida. U zadatku d. slično kao kod trostranih piramida treba najprije konstruirati točku X koja pripada ravnini baze (sjecište pravca QR i stražnjeg osnovnog brida), zatim točku koja pripada ravnini lijeve bočne plohe (sjecište pravca PX i lijevog osnovnog brida). U slučaju kad su točke P, Q i R polovišta pravac QR i stražnji osnovni brid paralelni su pa konstrukciju nije moguće provesti na taj način. U tom slučaju treba konstruirati paralelu p s pravcem QR točkom P. Paralela p u traženoj je ravnini presjeka. Budući da je $\overline{QR}$ srednjica, paralelna je sa stražnjim osnovnim bridom pa je paralelna i s prednjim osnovnim bridom iz čega slijedi da se paralela p podudara s prednjim osnovnim bridom. Stoga tražena ravnina sadrži oba prednja osnovna vrha. Presjek je trapez.



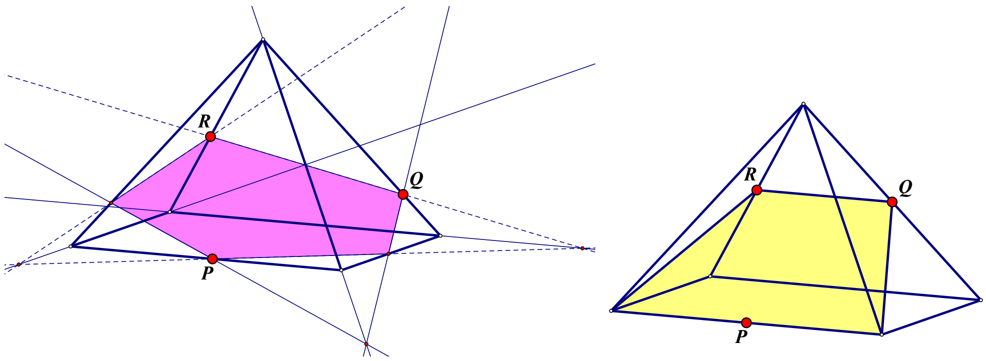
a.



b.



c.



d.

Kako bi to riješila teorija?

a. Presjek je jednakokračni trokut, duljine stranica su $10\sqrt{2}$ cm, $\frac{10\sqrt{3}}{2}$ cm, $\frac{10\sqrt{3}}{2}$ cm, površina je $P = 25\sqrt{2}$ cm^2.

b. Presjek je jednakokračni trokut, duljine stranica su 10 cm, 10 cm, $10\sqrt{2}$ cm, površina je $P = 50$ cm^2.

c. Presjek je trapez, duljine stranica su 10 cm, $\frac{10\sqrt{3}}{2}$ cm, 5 cm, $\frac{10\sqrt{3}}{2}$ cm, duljina visine je $\frac{5\sqrt{11}}{2}$ cm, površina je $P = \frac{75\sqrt{11}}{4}$ cm^2.

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Visina piramide je $4\sqrt{2}$, koeficijent sličnosti je $k = \frac{3}{8}\sqrt{2}$ cm. Površina presjeka je $P = k^2 B = 18$ cm^2.

Zadatak 2.

Promjer heliodroma jednak je dvjema visinama jednakostraničnog trokuta. Stranica šesterokuta je $5\sqrt{3}$ m, koeficijent sličnosti je $\frac{\sqrt{3}}{10}$, visina male piramide je $10\sqrt{3}$, visina zgrade je $100 - 10\sqrt{3} \approx 82.68$ m.

2.3. Modeliranje tijelima

U ovoj će aktivnosti učenici:

- računati oplošje i obujam složenog tijela
- modelirati problemske situacije složenim tijelima.

Oblik rada: rad u paru

Kako to izgleda?

Učenici će analizirati od kojih je geometrijskih tijela sastavljeno složeno tijelo.

Možete li pretpostaviti?

U paru mogu raspraviti načine rješavanja zadatka i smisliti različite strategije.

Napravite model.

Učenici će proučiti riješeni primjer te usporediti načine računanja oplošja i obujma.

Primijenite naučeno.

Rješenja zadataka:

1. a. $O = 112\ \text{cm}^2,\ V = 72\ \text{cm}^3$

   b. $O = 152\ \text{cm}^2,\ V = 104\ \text{cm}^3$

   c. $O = 144\ \text{cm}^2,\ V = 96\ \text{cm}^3$

2. a. $O = 456\ \text{cm}^2,\ V = 208\ \text{cm}^3$

   b. $O = 126\ \text{cm}^2,\ V = 65\ \text{cm}^3$

   c. $O = 568\ \text{cm}^2,\ V = 852\ \text{cm}^3$

3. a. $O = 216\pi\ \text{cm}^2,\ V = 468\pi\ \text{cm}^3$

   b. $O = 572\pi\ \text{cm}^2,\ V = 1502\pi\ \text{cm}^3$

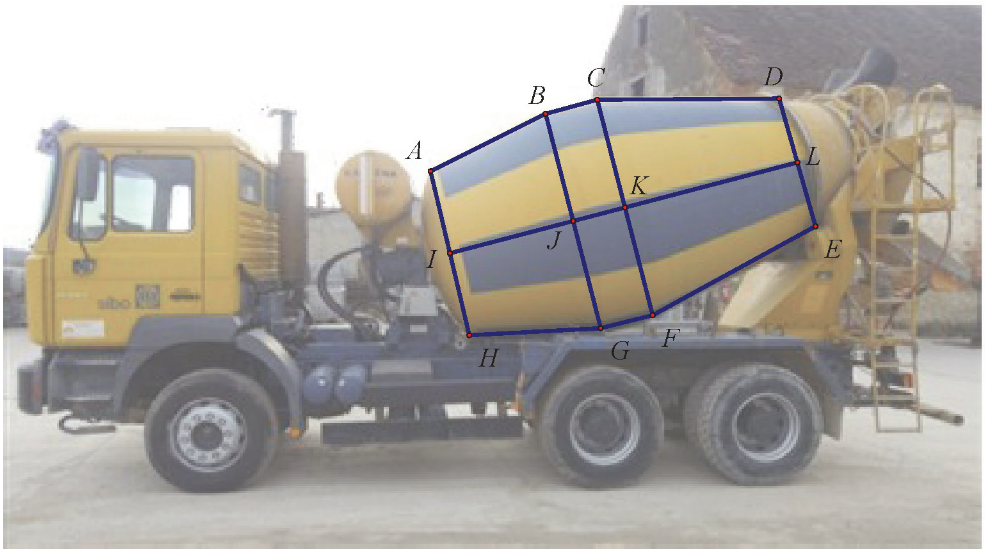
4. $V = 298.92\pi\ \text{mm}^3 = 910.8\ \text{mm}^3$

5. $O = 131.75\ \text{m}^2$

Možemo li više?

Uz procjenu dimenzija kao na slici možemo izračunati volumen:

$V \approx 7.45\ \text{m}^3$.



$AH = 1.5$ m
$BG = 2$ m
$DE = 1.2$ m
$KL = 1.6$ m
$JI = 1.2$ m
$JK = 0.4$ m

2.4. Matematika egipatskih piramida

U ovoj će aktivnosti učenici:

- izraditi modele egipatskih piramida
- računati omjere među stranicama, visinama i površinama
- rabiti vizualizacije i prostorni zor
- opisati obilježja i svojstva geometrijskih tijela
- primijeniti trigonometriju za računanje kutova i duljina.

Aktivnost je predviđena za dva školska sata.

Nastavna sredstva: Dokument *Egipatske piramide.gsp*

Nastavna pomagala: pribor za crtanje, papir za izradu mreže, ljepilo, škare, računalo za svakog učenika

Napravite model.

Učenici će izračunati duljine bridova u mjerilu i pomoću njih jednostavno nacrtati mrežu piramida.

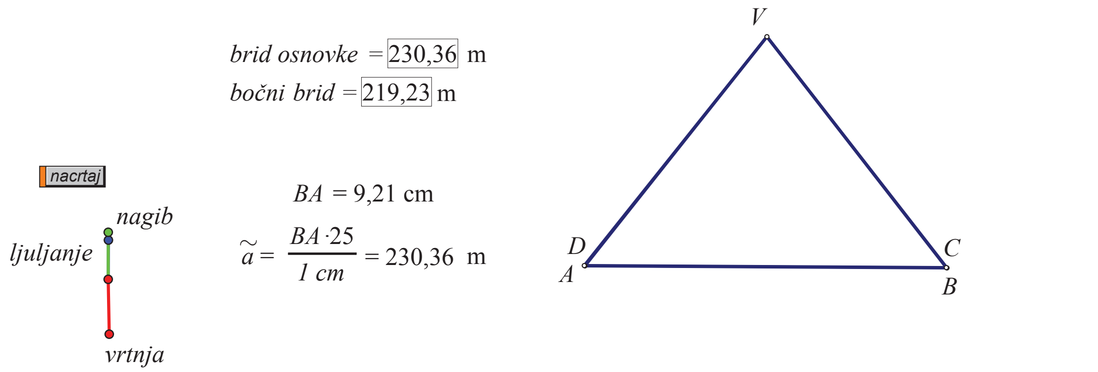
Na mreži mogu izmjeriti visinu pobočke, a na modelu približno visinu piramide, a zatim izračunati površinu pobočke i kvadrata čija je stranica jednaka visini piramide. U tablici su približno prikazane vrijednosti koje će dobiti.

	Naziv	Keopsova	Kefrenova	Mikerinova
Duljine u centimetrima u mjerilu 1 : 25000	Brid osnovke	9.2	8.6	4.2
	Bočni brid	8.8	8.4	4.0
	Visina pobočke	7.5	7.2	3.4
	Visina piramide	5.9	5.8	2.6
	Površina pobočke	34.5	30.96	7.14
	Površina kvadrata	34.81	33.64	6.76

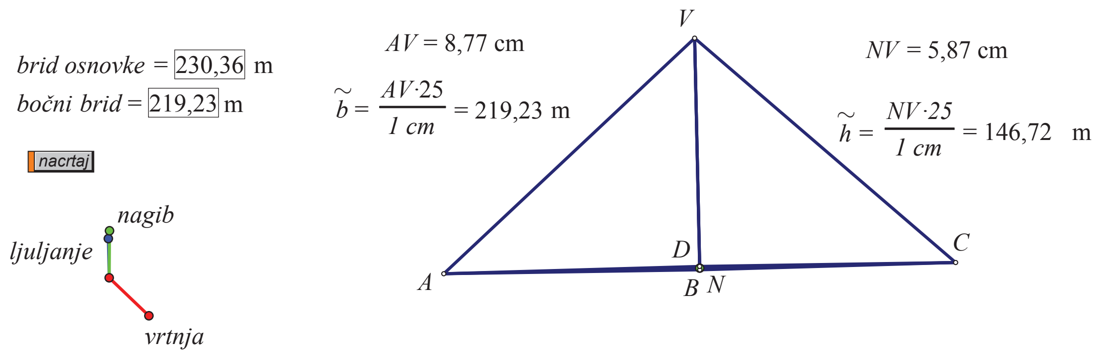
Učenici će zaključiti da je prva Taylorova pretpostavka približno točna za Keopsovu piramidu, a za ostale dvije nije. No, obzirom na moguće greške u mjerenju ne mogu biti sigurni da je zaista tako.

Potražite pomoć tehnologije.

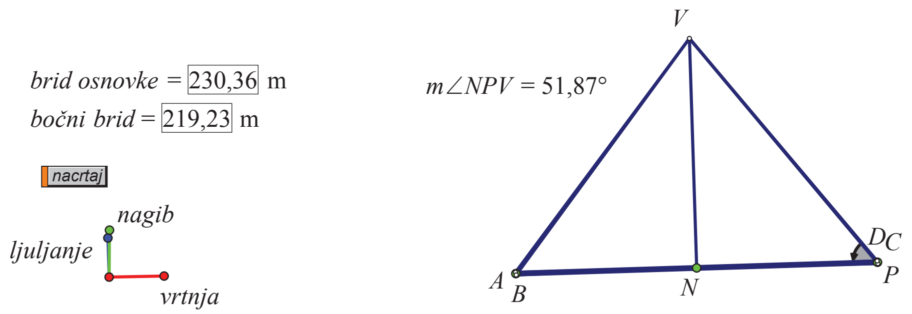
- Učenici će zaključiti da u dvodimenzionalnom prikazu trodimenzionalnih objekata izmjerene veličine ne odgovaraju stvarnim, ali da mogu pronaći pogled u kojem se vide stvarne veličine. Tako će na primjer za Keopsovu piramidu brid osnovke vidjeti u ovom prikazu:



Bočni brid i visinu piramide vidimo u ovom prikazu:



Kut između pobočke i osnovke vidimo u ovom prikazu:



U tablici su približno prikazane vrijednosti koje će dobiti.

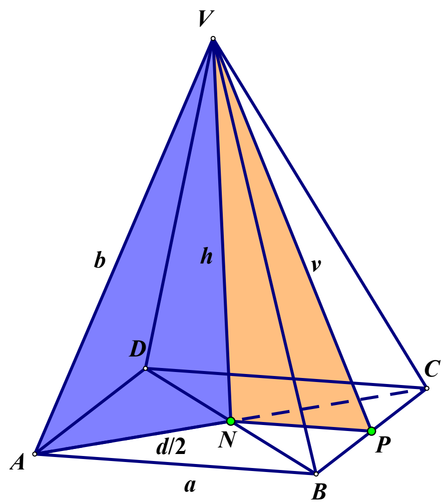
	Duljina brida osnovke $\tilde{a}$	Duljina bočnog brida $\tilde{b}$	Duljina visina piramide $\tilde{h}$	Omjer $\tilde{a}:\tilde{h}$	Kut između pobočke i osnovke
Keopsova piramida	230.36	219.23	146.72	1.386	51.87°
Kefrenova piramida	215.26	209.44	143.86	1.496	53.20°
Mikerinova piramida	105.5	99.31	65.55	1.609	51.18°

Kako bi to riješila teorija?

Primjenjujući Pitagorin poučak i trigonometriju pravokutnog trokuta, učenici će izračunati:

	Duljina brida osnovke a	Duljina bočnog brida b	Duljina visina piramide h	Omjer $a:h$	Kut između pobočke i osnovke	Visina pobočke v	Površina pobočke	Površina kvadrata
Keopsova piramida	203.36	219.23	146.72	1.386	51.87°	186.53	21484.4	21526.8
Kefrenova piramida	215.26	209.44	143.87	1.496	53.20°	179.67	19338.3	20698.6
Mikerinova piramida	105.5	99.31	65.55	1.609	51.18°	84.14	4438.3	4296.8

Učenici će zaključiti da prva Taylorova pretpostavka vrijedi za Keopsovu piramdu (približno) i ne vrijedi za ostale dvije. Također će izračunati:



	Opseg osnovke	Površina kruga
Keopsova piramida	921.44	921.87
Kefrenova piramida	861.04	903.96
Mikerinova piramida	422	411.86

Učenici će zaključiti da i druga Taylorova pretpostavka vrijedi za Keopsovu piramidu (približno) i ne vrijedi za ostale dvije.

- Pretpostavimo da je $P=\frac{xy}{2}=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{y^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=y^2$. Kvadriranjem ove jednadžbe dobivamo bikvadratnu jednadžbu $y^4-\frac{x^2}{4}y^2-\frac{x^4}{16}=0$ čije je jedno rješenje $y=\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$.

  Prikloni kut njezinih bočnih strana iznosi $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{2y}{x}=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=51°49'38''$.

  Konstanta proporcionalnosti zlatnog reza $\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ pojavljuje se u forumuli za y, ali osnovni brid i visina nisu u omjeru zlatog reza.

- Učenici će zaključiti da je Mikerinova piramida građena približno u omjeru zlatnog reza, a ostale dvije nisu. Učenici mogu primijetiti da je omjer $a:h$ za Kefrenovu piramidu približno 1.5 pa možemo zapisati $\frac{a}{h}=\frac{3}{2}$. Pomnožimo li jednakost sa $4h$, dobivamo da je opseg baze jednak opsegu pravilnog šesterokuta sa stranicom duljine h.

Možemo li više?

- Uz pretpostavku da vrijede obje Taylorove pretpostavke dobivamo:

  $y=\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}, 4x=2y\pi$.

  Izjednačavanjem omjera $\frac{y}{x}$ iz obje jednadžbe, dobivamo približnu vrijednost broja

  $\pi=\frac{4}{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}\approx 3.14$.

Zadatak 1.

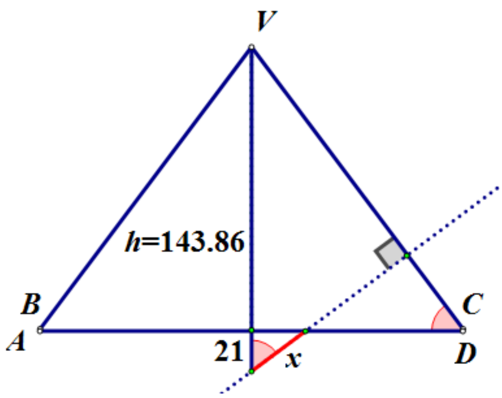
Uz pomoć računala i sljedećeg dvodimenzionalnog prikaza možemo približno odrediti mjesto početka kopanja tunela:

Uočimo da tunel treba početi kopati iz unutrašnjosti piramide ako je unutrašnjost prohodna, u protivnom na visini pobočke.

Označeni kut je već od ranije poznati kut između pobočke i baze piramide, a iznosi 53.20°.

Traženu duljinu tunela x možemo izračunati pomoću trigonometrijskih omjera:

$\cos 53.2°=\frac{21}{x}, \ x=\frac{21}{\cos 53.2°}\approx 35\,\text{m}$.



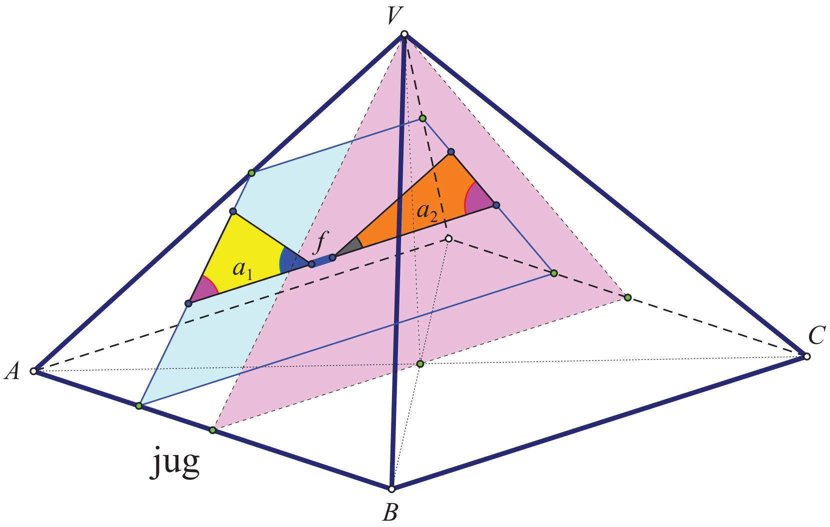
Tada je mjesto početka kopanja udaljeno približno 28 metara od središta baze, gledajući okomito na stranicu baze. Najmanji broj dana za kopanje tunela iznosi 35 : 3, što je 11.66 ili približno 12 dana.

Ako to mjesto nije dostupno, duljina tunela je $x=164.86\cdot\cos 53.2°=98.76\,\text{m}$ što je približno 33 dana kopanja, a mjesto početka kopanja je na visini pobočke i 132 metra je udaljeno od vrha piramide.

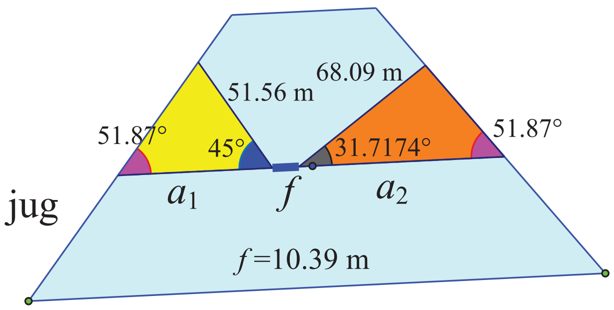
Duljina tunela može se dobiti i iz kuta pri vrhu piramide: $tg\gamma=\frac{h}{\frac{a}{2}}$ i iznosi $x=(h+21)\sin\gamma=98.76$ m. Dakle, za kopanje bi trebalo 33 dana.

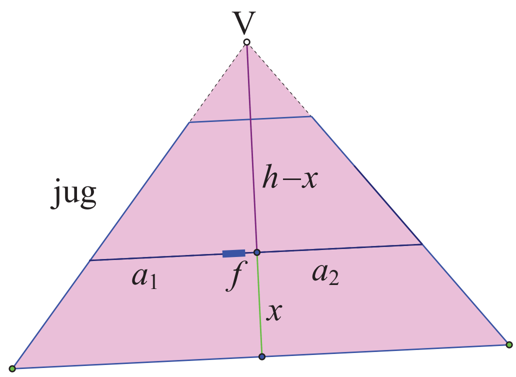
Zadatak 2.

Skica položaja faraonove grobnice će biti jasnija ako se pomoću danog predloška uoči i konstruira presjek piramide ravninom koja prolazi tim položajem, okomita je na osnovku i paralelna s visinom piramide. Na sljedećoj je slici pored tog presjeka nacrtan radi usporedbe sličan presjek piramide koji sadrži visinu.



Izdvojimo presjeke:





Izračunat ćemo prvo duljine a_1, a_2, a zatim traženu duljinu x.

Mjere u stopama pretvort ćemo u mjere u metrima. Prikloni kut pobočki je $\alpha = 51.87°$.

Primijenimo poučak o sinusima na žuti trokut.

$$\frac{a_1}{\sin 83.13°} = \frac{51.56}{\sin 51.87°}.$$

Odatle slijedi $a_1 = 65.076$ m.

Analogno,

$$\frac{a_2}{\sin 94.41°} = \frac{68.09}{\sin 51.87°},$$

odnosno $a_2 = 86.02$ m.

Duljina f je 10.39 m, pa je približna vrijednost zbroja $a_1 + a_2 + f = 161.5\,\text{m}$.

Sada primijenimo Talesov poučak o paralelnim pravcima na presjek koji sadrži visinu: $\frac{a_1 + f + a_2}{a} = \frac{h - x}{h}$. Odatle je $x \approx 43.86$ m.

Kraljeva grobnica se nalazi 43.86 m iznad osnovke piramide.

2.5. Polupravilni poliedri

U ovoj će aktivnosti učenici:

- izraditi modele Arhimedovih tijela
- odrediti oplošje i volumen tijela
- povezivati volumene različitih tijela i računati ih
- rabiti vizualizacije i prostorni zor
- opisati obilježja i svojstva geometrijskih tijela
- uočiti Arhimedova tijela u strarnosti.

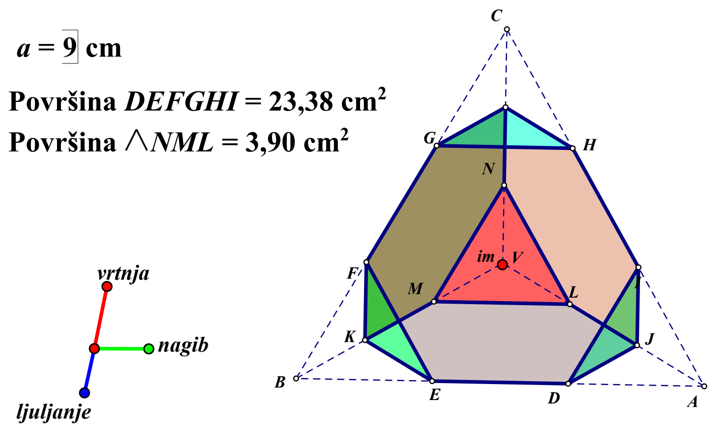
Aktivnost je predviđena za dva školska sata.

Nastavna sredstva: Dokument *Polupravilni poliedri.gsp*

Nastavna pomagala: ljepilo, škare, računalo za svakog učenika

Potražite pomoć tehnologije.

Učenici će postaviti poliedar u položaj poput ovog na slici, mjeriti površinu trokuta i šesterokuta i izračunati oplošje.



(Površina *DEFGHI*)·4 + (Površina △*NML*)·4 = 109,12 cm²

Kako bi to riješila teorija?

U jednom se vrhu ikosaedra sastaje 5 bridova pa odsijecanjem jednog vrha ikosaedra nastaje pravilni peterokut. Odsijecanjem svih 12 vrhova ikosaedra nastat će 12 pravilnih peterokuta. Jedna strana ikosaedra je trokut pa odsijecanjem sva 3 vrha na toj strani nastaje pravilni šesterokut. Odsijecanjem svih vrhova, od 20 strana ikosaedra nastat će 20 pravilnih šesterokuta. Stoga krnji ikosaedar ima 32 strane.

Odsijecanjem jednog vrha ikosaedra nastaje 5 vrhova krnjeg ikosaedra pa će odsijecanjem svih 12 vrhova ikosaedra nastati 60 vrhova ikosaedra.

Prebrojimo bridove. Krnji ikosaedar ima 12 strana koje su peterokuti što daje 60 bridova. Preostaju još bridovi strana koje su šesterokuti. Od šest bridova šesterokuta 3 brida su zajednički s peterokutima pa ste ih već računali, a 3 sa šesterokutima pa ih treba još dodati. Krnji ikosaedar ima 20 strana koje su šesterokuti što iznosi 60 bridova, a kako smo svaki od bridova zajedničkih šesterokutima računali 2 puta, broj novih bridova na šesterokutnim stranama je 30. Stoga krnji ikosaedar ima ukupno 90 bridova.

$S - B + V = 32 - 90 + 60 = 2$ pa Eulerova formula vrijedi.

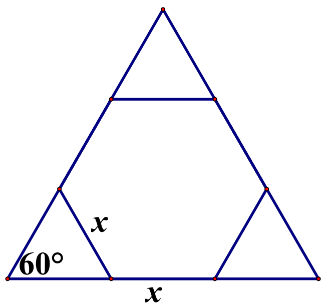
Možemo li više?

Zadatak 1.

Duljina stranice krnjeg tetraedra je 3 cm. Oplošje je $O = 4 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} + 4 \cdot 6 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = 63\sqrt{3} \approx 109.12 \text{ cm}^2$.

Zadatak 2.

Neka je duljina stranice tetraedra a. Tada je duljina stranice krnjeg tetraedra $x = \frac{a}{3}$.



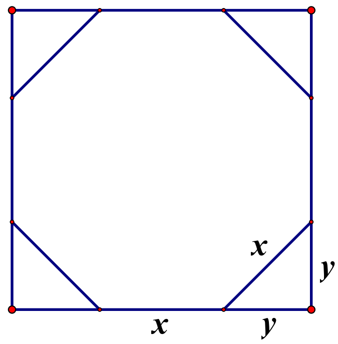
Volumen pravilnog tetraedra je $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Volumen krnjeg tetraedra je $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} - 4\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{23\sqrt{2}a^3}{324}$. Volumen možemo izraziti pomoću duljine stranice krnjeg tetraedra $V = \frac{23\sqrt{2}x^3}{12}$.

Oplošje krnjeg tetraedra je $O = 4\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 3\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}\right) + 4\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{7}{9}\sqrt{3}a^2 = 7\sqrt{3}x^2$.

Zadatak 3.

Neka je duljina stranice kvadrata a.



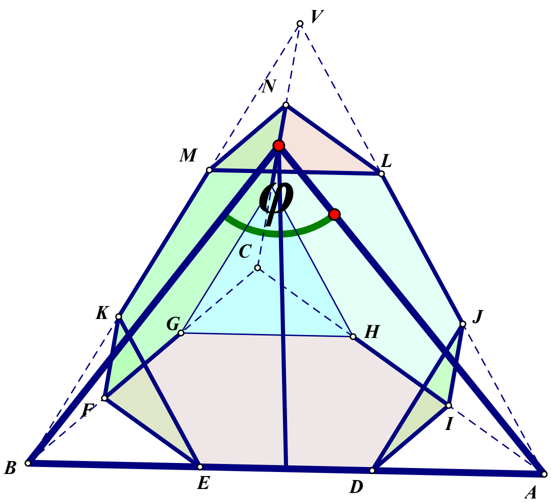
Vrijedi: $\left.\begin{array}{l} x = y\sqrt{2} \\ x = a - 2y \end{array}\right\} \Rightarrow 2y^2 - 4ay + a^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{2}\left(2-\sqrt{2}\right),\ x = \left(\sqrt{2}-1\right)a$.

Volumen krnjeg heksaedra je $V = a^3 - 8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{y^2}{2}\cdot y = a^3 - \frac{4}{3}\cdot\frac{a^3}{8}\left(2-\sqrt{2}\right)^3 = \frac{7a^3}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$. Volumen možemo izraziti pomoću duljine stranice krnjeg heksaedra $V = x^3\left(7+\frac{14}{3}\sqrt{2}\right)$.

Oplošje krnjeg heksaedra je $O = 6\left(a^2 - 4\cdot\frac{y^2}{2}\right) + 8\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = a^2\left(12\sqrt{2}-12+6\sqrt{3}-4\sqrt{6}\right)$ ili pomoću duljine stranice krnjeg heksaedra $O = x^2\left(12\sqrt{2}+12+2\sqrt{3}\right)$.

Zadatak 4.

Kut između dviju šesterokutnih strana krnjeg tetraedra jednak je kutu između strana tetraedra od kojeg je nastao.

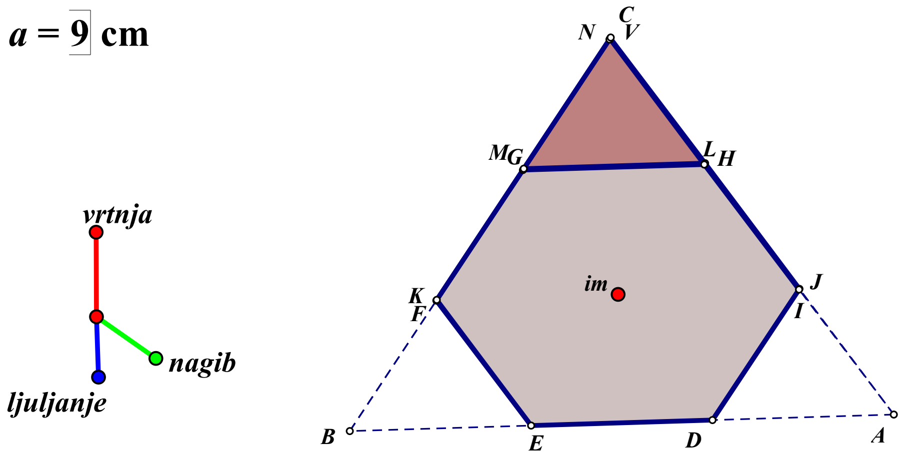


$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 70.53^\circ$$

Učenici će tetraedar zarotirati u „povoljan" položaj (pravac po kojem se sijeku ravnine mora biti okomit na zaslon računala) kako bi izmjerili kut između šesterokutnih strana.

Duljina stranice tetraedra

$a = 9$ cm

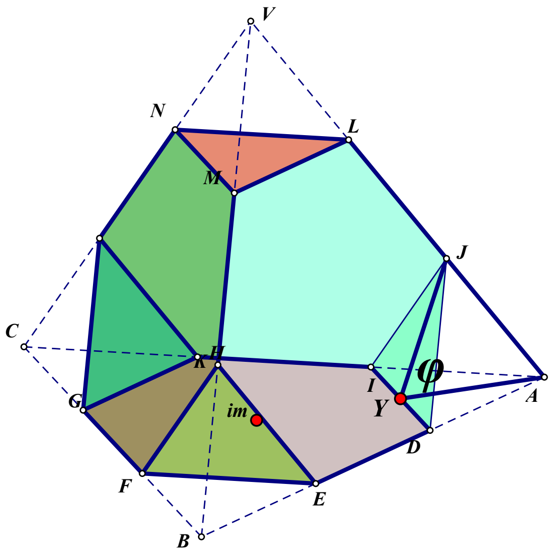


$m\angle BCA = 70{,}39°$

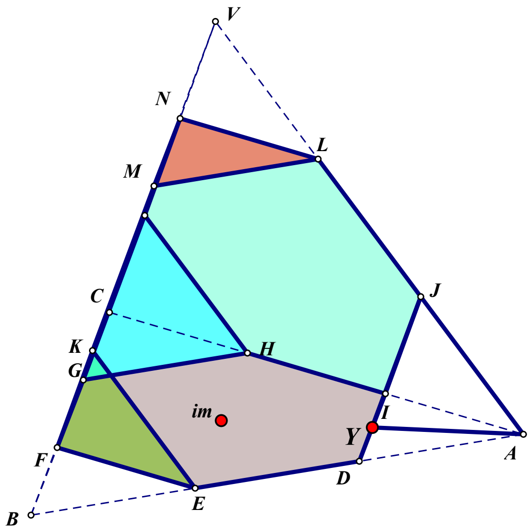
Zadatak 5.

Promatramo kut između jedne trokutne strane i šesterokutne strane parelelne s drugom trokutnom stranom.

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a/3}{2}}{\frac{a/3\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 70.53°.$$



Učenici će ponovo tetraedar zarotirati u „povoljan" položaj (pravac po kojem se sijeku ravnine mora biti okomit na zaslon računala) kako bi izmjerili kut između trokutnih strana.



$m\angle JYA = 72{,}26°$

3. Funkcije 1

3.1. O funkcijama

U ovoj će aktivnosti učenici:

- usvojiti pojam funkcije
- određivati domenu, kodomenu i sliku funkcije
- računati vrijednost funkcije za zadani argument
- računati argument funkcije za zadanu vrijednost funkcije
- provjeriti injektivnost funkcije iz njezinoga grafa.

Oblik rada: individualni

Kako to izgleda?

Na sredinu ploče napišemo pojam „funkcija“. Učenike treba potaknuti da ispišu što više pojmova koje mogu povezati s pojmom funkcije. Ti se pojmovi napišu na ploču i uspostave se veze sa središnjim pojmom i njihove međusobne veze (mentalna mapa). Zatim učenici definiraju funkciju.

Možete li pretpostaviti?

Očekujemo da će se učenici sjetiti vertikalnog testa za provjeru funkcije.

Primijenite naučeno.

Rješenja zadataka:

1. a. da

   b. da

   c. ne, element – 1 preslikava se u tri različita elementa

   d. ne, element – 2 preslikava se u dva različita elementa.

2. a. da

   b. da

   c. ne, element d nije nikome pridružen

   d. ne, element c preslikava se u dva različita elementa

   e. da

   f. da.

3. a. da b. ne c. da d. ne e. ne f. ne.

4. a. $D=\{a,b,c\}$, $K=Im=\{\triangle, \bigcirc, \square\}$

   b. i e. $D=\{a,b,c,d\}$, $K=Im=\{\triangle, \bigcirc, \square\}$

   f. $D=\{a,b,c\}$, $K=\{\triangle, \bigcirc, \square, ⬠\}$, $Im=\{\triangle, \bigcirc, \square\}$.

5. a. da b. da c. da d. ne e. ne f. da g. da h. ne i. da.

6. a. $D = Im = R$

   b. $D=R,\ Im=\langle -1,\infty\rangle$

   c. $D=R\setminus\{-2\},\ Im=R\setminus\{1\}$

   d. $D=R,\ Im=[-1,\infty\rangle$

   e. $D=R\setminus\{-3,3\},\ Im=R\setminus\{1\}$

   f. $D=R,\ Im=\langle 0,3]$.

7. a. $f(1) = -2$

   b. $f(-2) = -14$

   c. $f(1.5) = -5.25$

   d. $f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{25}$

   e. $f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-6$.

8. a. $x = -1$ b. $x = 3.5$ c. $x = 0.8$ d. ne postoji takav x.

Možemo li više?

Očekujemo da će se učenici sjetiti horizontalnog testa.

9. a. da b. ne c. da d. da e. ne f. ne.

3.2. Polinomi

U ovoj aktivnosti učenici će otkriti kako uz pomoć vodećeg koeficijenta polinoma, nultočaka funkcije i njihovih strukosti mogu skicirati graf odnosno prepoznati kojim funkcijama pripadaju već nacrtani grafovi.

Učenici će:

- skicirati grafove linearnih i kvadratnih funkcija koristeći vodeći koeficijent i nultočku/e
- opisati tijek funkcije čiji graf su prethodno skicirali
- otkriti vezu između strukosti nultočaka i izgleda grafa zadane funkcije
- otkriti kako vodeći koeficijent utječe na izgled grafa funkcije
- primijeniti uočena pravila u crtanju grafova
- odrediti polinome čiji su grafovi zadani
- rješavati nejednadžbe poznavajući izgled grafa zadane funkcije.

Organizacija rada: individualni rad

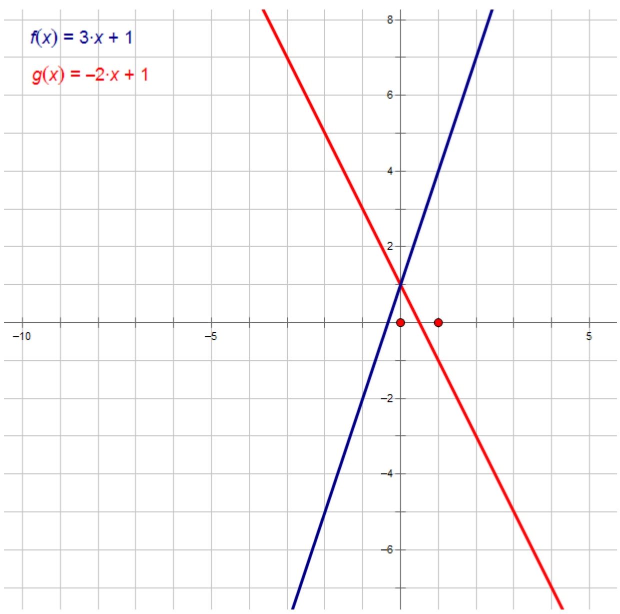
Nastavna pomagala: računalo za svakog učenika

Ova aktivnost predviđena je za dva nastavna sata.

U čemu je problem?

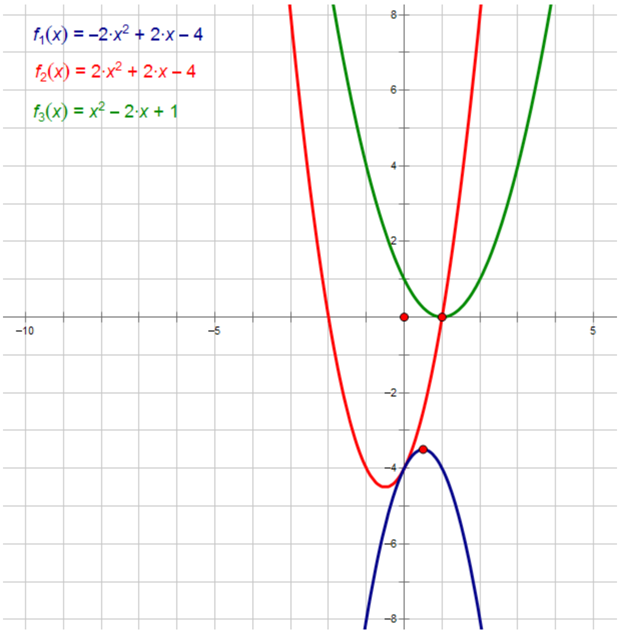
Za skiciranje grafa funkcije dovoljno je znati vodeći koeficijent i nultočke.

1. Učenici će skicirati grafove funkcija zadanih s $f(x)=3x+1$ i $g(x)=-2x+1$ koristeći vodeći koeficijent i nultočku.



2. Učenici će odrediti broj nultočka i skicirati grafove funkcija zadanih s $f_1(x) = -2x^2 + 2x - 4$, $f_2(x) = 2x^2 + 2x - 4$, $f_3(x) = x^2 - 2x + 1$.

   Funkcija f_1 nema nultočaka, funkcija f_2 ima dvije nultočke, a funkcija f_3 jednu.



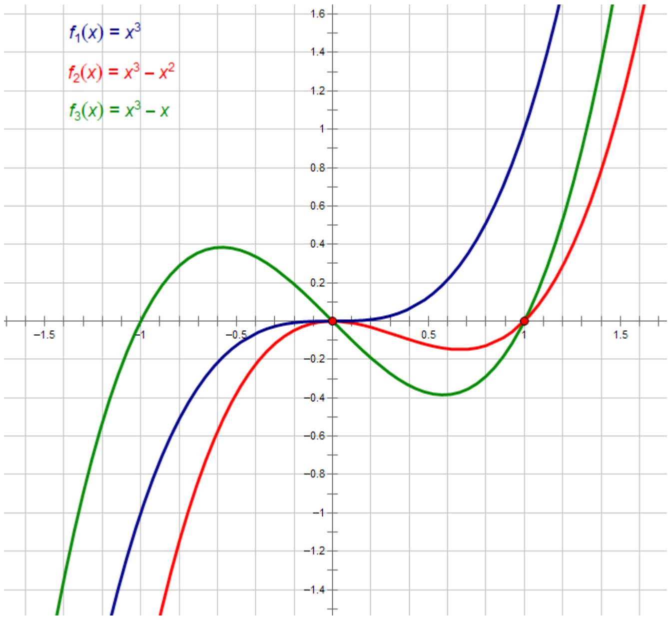
- Funkcija f_1 raste na intervalu $\left\langle -\infty, \frac{1}{2} \right\rangle$, a pada na intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$ i njezin graf ne siječe os apscisa.
- Funkcija f_2 pada na intervalu $\left\langle -\infty, -\frac{1}{2} \right\rangle$, a raste na intervalu $\left\langle -\frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$ i njezin graf siječe os apscisa.
- Funkcija f_3 pada na intervalu $\langle -\infty, 1 \rangle$, a raste na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$ i njezin graf dira os apscisa.

Kako to izgleda?

- Broj 1 je **jednostruka** nultočka funkcije f_2, a **dvostruka** nultočka funkcije f_3.
- Graf funkcije f_2 siječe os aspscisa u točkama (– 2,0) i (1,0).
- Graf funkcije f_1 ne siječe os apscisa.
- Graf funkcije f_3 dira os apscisa u točki (1,0).

Možete li pretpostaviti?

Učenici će odrediti da funkcija f_1 ima jednu nultočku, funkcija f_2 dvije, a funkcija f_3 tri i nacrtati grafove funkcija zadanih s $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^3 - x^2$, $f_3(x) = x^3 - x$.

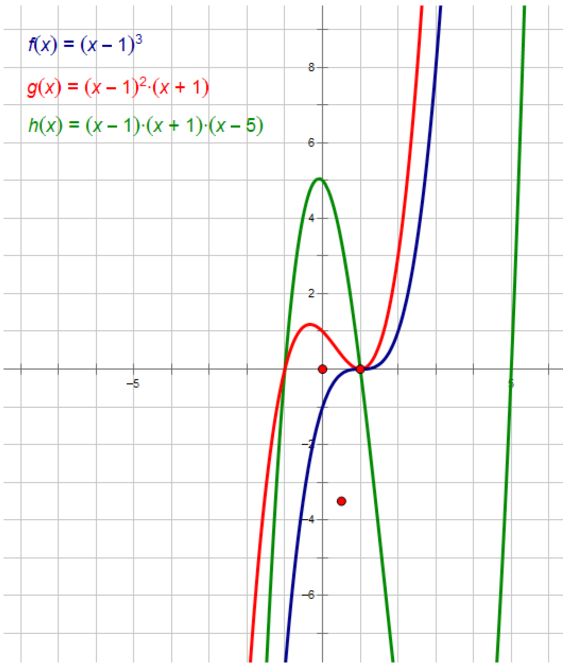


Potražite pomoć tehnologije.

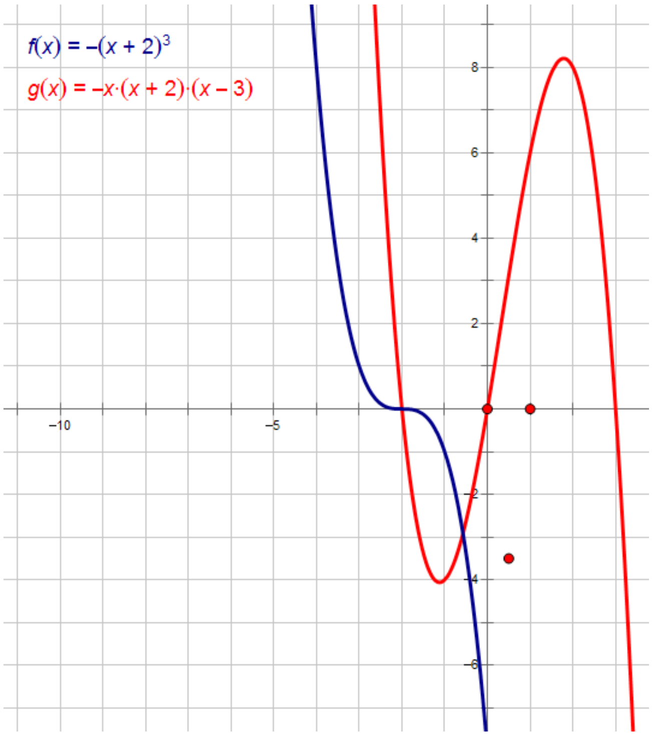
Učenici će odrediti nultočke funkcija zadanih s

$f(x)=(x-1)^3$, $g(x)=(x-1)^2(x+1)$, $h(x)=(x-1)(x+1)(x-5)$.

- Nultočka funkcije f ima koordinate (1,0) i u njoj će graf dirati os apscisa.
- Funkcija g ima dvije nultočke: A (1,0) i B (–1,0). U točki A graf te funkcije dirat će os apscisa, a u točki B će ju sjeći.
- Funkcija h ima tri nultočke: A (1,0), B (–1,0) i C (5,0). U svim trima nultočkama graf te funkcije će sjeći os apscisa.



Učenici će pomoću tehnologije nacrtati grafove funkcija: $f(x) = -(x+2)^3$, $g(x) = -x(x+2)(x-3)$.



Za razliku od prethodnih primjera, kod ovih funkcija vodeći je koeficijent negativan tako da se mijenjaju intervali rasta/pada funkcija, ali zaključci vezani za utjecaj nultočaka i njihovih strukosti na izgled grafa i dalje su isti.

Kako bi to riješila teorija?

- Ako je nultočka **parne** strukosti, onda su na intervalu blizu te nultočke vrijednosti funkcije istog predznaka, pa graf funkcije *dira* os apscisa.
- Ako je nultočka **neparne** strukosti, onda su na intervalu blizu te nultočke vrijednosti funkcije *različitog* predznaka, pa graf funkcije *siječe* os apscisa.

Možemo li više?

Pomoću prethodno uočenog, učenici će riješiti sljedeću nejednadžbu:

$$\frac{(x-2)^3(3+2x)^{11}x(x^2+2)}{(x-1)(-5x+3)^{44}} \leq 0.$$

Rješenje:

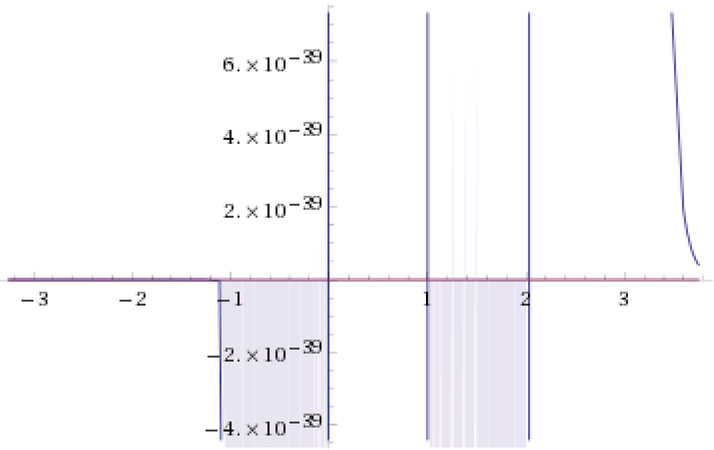
$$x \in \left[-\frac{3}{2}, 0\right] \cup \langle 1, 2].$$

Skica:

Input:

$$\frac{(x-2)^3\,(3+2\,x)^{11}\,x\left(x^2+2\right)}{(x-1)\,(-5\,x+3)^{44}} \le 0$$

Inequality plot:



(Izvor: www.wolframalpha.com, preuzeto: 29. 4. 2016.)

Primijenite naučeno.

a. $f(x) = -2(x+1)^2(x-2)(x-3)$

b. $f(x) = 0.1(x+4)^2(x-1)(x-5)^2$

c. S obzirom na strukost nultočaka postoje tri mogućnosti:

$f_1(x) = a(x+3)^3(x-1)^2(x-2)$, $f_2(x) = b(x+3)(x-1)^2(x-2)^3$ ili
$f_3(x) = c(x+3)(x-1)^4(x-2)$.

Koeficijente a, b, c možemo odrediti jer točka (– 1, – 100) pripada grafu.

Rješenja su $a = c = \dfrac{25}{24}, b = \dfrac{25}{54}$.

Uz pomoć tehnologije učenici mogu provjeriti da je rješenje $f_1(x) = \dfrac{25}{24}(x+3)^3(x-1)^2(x-2)$.

3.3. Racionalne funkcije

U ovoj aktivnosti učenici će otkriti kako izgledaju grafovi različitih racionalnih funkcija te kako se mijenja njihov oblik.

Učenici će:

- crtati grafove racionalnih funkcija
- odrediti domenu zadanih funkcija
- otkriti pojam asimptote te ih odrediti na primjerima
- uočiti kako se mijenjaju grafovi racionalnih funkcija zadanih različitim pravilima
- odrediti intervale rasta i pada funkcije
- povezati funkcije zadane pravilima s pripadajućim grafovima
- primijeniti naučeno u rješavanju zadataka.

Organizacija rada: individualni rad

Nastavna pomagala: računalo za svakog učenika

Ova aktivnost predviđena je za dva nastavna sata.

U čemu je problem?

Domena funkcije $f(x)=\frac{1}{x}$ je $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

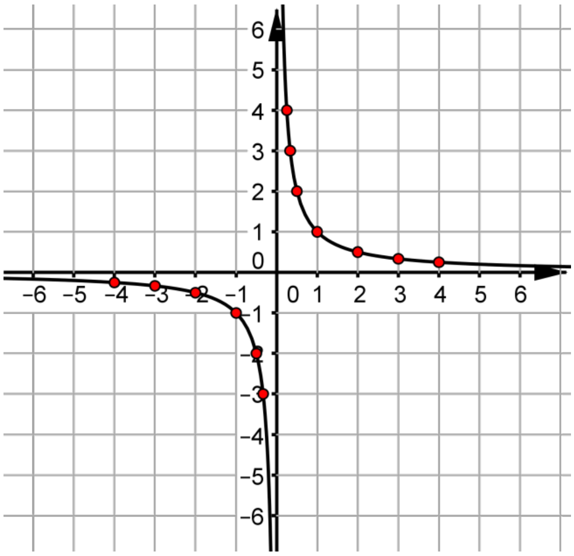
Popunjena tablica:

x	-10	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{10}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	-4	-10

x	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	10
$f(x)=\frac{1}{x}$	10	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$

Kako to izgleda?

Graf funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

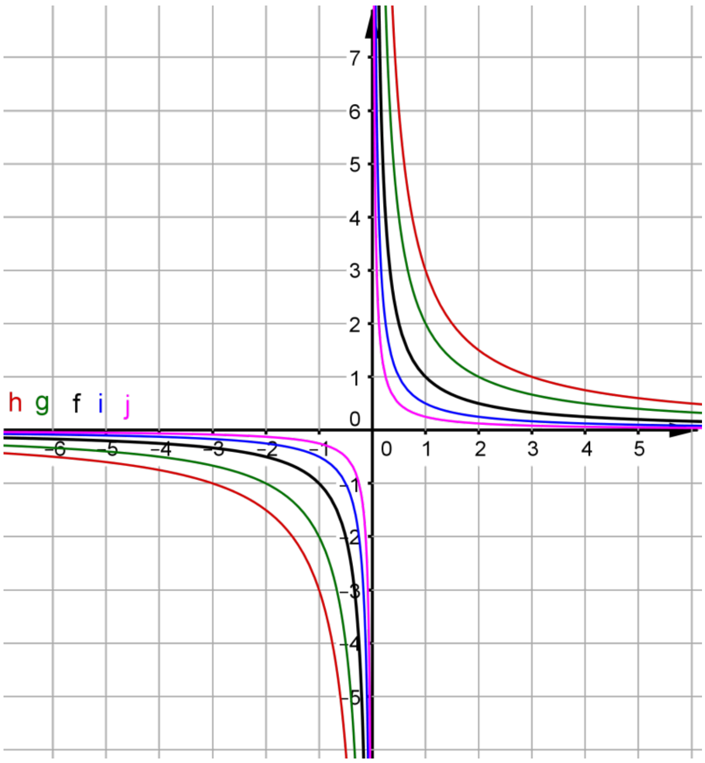


- Dobiveni graf ima dva dijela koja zovemo *grane*.
- Graf funkcije približava se osi apscisa i osi ordinata.

Potražite pomoć tehnologije.

1. **Graf funkcije** $f(x)=\dfrac{a}{x}, a\in R$**.**

   a.

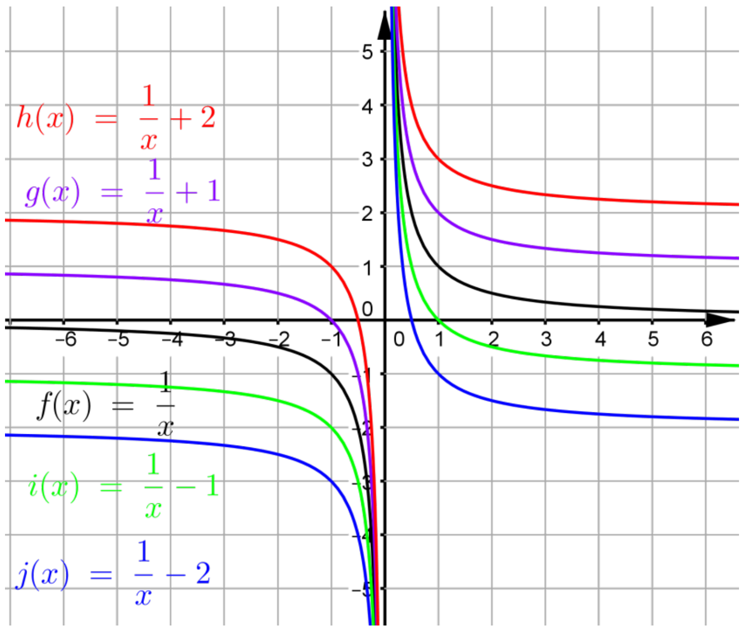


Što je a po apsolutnoj vrijednosti veći, graf funkcije $f(x)=\frac{a}{x}$ udaljeniji je od koordinatnih osi i ishodišta. Što je a po apsolutnoj vrijednosti manji, graf je bliži koordinatnim osima i ishodištu.

b.

- Domena funkcije $f(x)=\frac{a}{x}$ je $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- Funkcija $f(x)=\frac{a}{x}$ pada na intervalima $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, \infty\rangle$ ako je $a>0$.
- Funkcija $f(x)=\frac{a}{x}$ raste na intervalima $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, \infty\rangle$ ako je $a<0$.
- Asimptote funkcije $f(x)=\frac{a}{x}$ su os apscisa i os ordinata.

2. **Graf funkcije** $f(x)=\frac{1}{x}+b, b\in R$.



Oblik grafa funkcije $y=\frac{1}{x}+b, b\in R$ se ne mijenja u odnosu na graf funkcije $f(x)=\frac{1}{x}$. Mijenja se samo položaj, a dobiven je translacijom grafa funkcije $f(x)=\frac{1}{x}$ za vrijednost parametra b duž osi y.

Asimptote:

– funkcije f su os apscisa i os ordinata

– funkcije g su pravac $y = 1$ i os ordinata

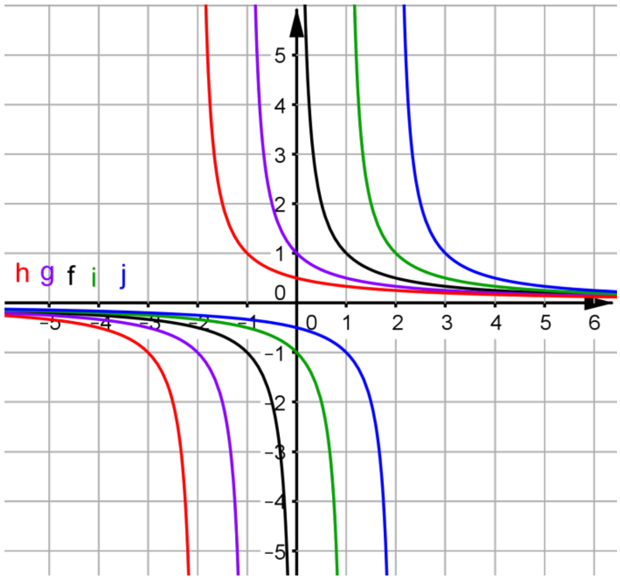
– funkcije h su pravac $y = 2$ i os ordinata

– funkcije i su pravac $y = -1$ i os ordinata

– funkcije j su pravac $y = -2$ i os ordinata.

- Domena funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x}+b, b\in R$ jest $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- Asimptote funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x}+b, b\in R$ su pravac $y=b$ i os ordinata.

3. **Graf funkcije** $f(x)=\dfrac{1}{x+c}, c\in R$.



Oblik grafa funkcije $y=\dfrac{1}{x+c}, c\in R$ ne mijenja se u odnosu na graf funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Mijenja se samo položaj, a dobiven je translacijom grafa funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x}$ za vrijednost $-c$ duž osi x.

Asimptote:

– funkcije f su os apscisa i os ordinata

– funkcije g su pravac $x=-1$ i os apscisa

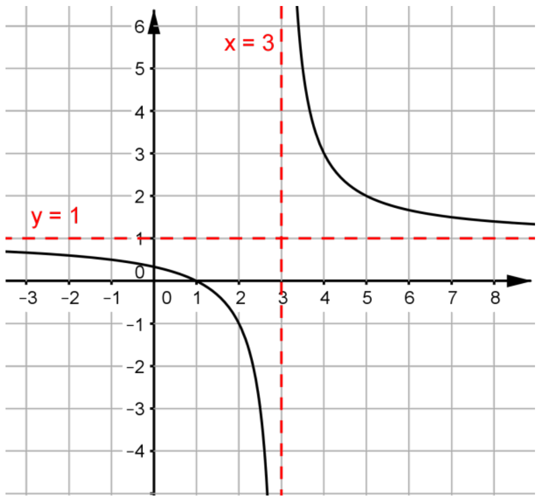
– funkcije h su pravac $x=-2$ i os apscisa

– funkcije i su pravac $x=1$ i os apscisa

– funkcije j su pravac $x=2$ i os apscisa.

- Domena funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x+c}, c\in R$ jest $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- Asimptote funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x+c}, c\in R$ su pravac $x=-c$ i os apscisa.

Kako bi to riješila teorija?

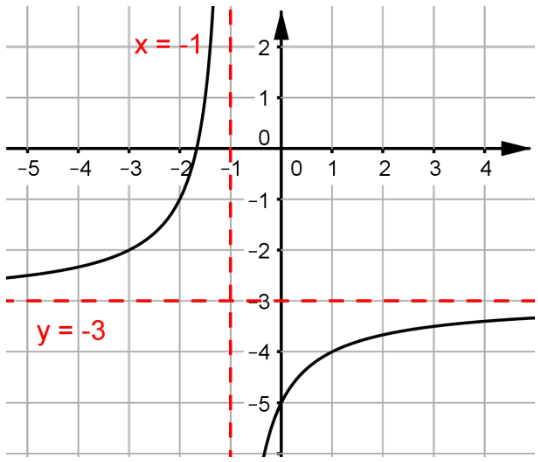


a. $f(x)=\dfrac{2}{x-3}+1$

$\mathfrak{D}(f)=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Asimptote: $x = 3$ i $y = 1$.

Funkcija pada na intervalima $\langle -\infty, 3\rangle$ i $\langle 3, \infty\rangle$.



b. $f(x)=\dfrac{-3x-5}{x+1}=-\dfrac{2}{x+1}-3$

$\mathfrak{D}(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Asimptote $x = -1$ i $y = -3$.

Funkcija raste na intervalima $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle -1, \infty\rangle$.

Primijenite naučeno.

Funkcije pridružene grafovima u tablici u sljedećem su redoslijedu:

A. $h(x)$	B. $i(x)$
C. $\begin{cases} f(x) \\ k(x) \end{cases}$	D. $g(x)$
E. $\begin{cases} l(x) \\ n(x) \end{cases}$	F. $j(x)$

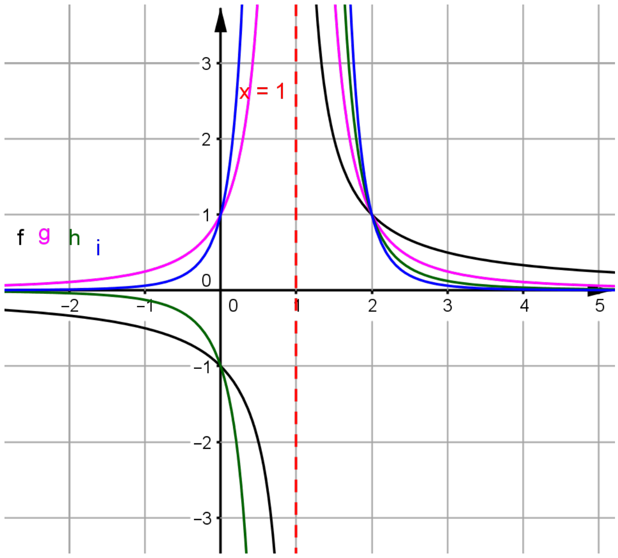
Možemo li više?

Zadatak 1.

$\mathfrak{D}(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Asimptote su pravac $x = 1$ i os ordinata.

- Vrijednosti funkcije $f(x)=\dfrac{1}{(x-c)^n}$ za $x<c$ i $x>c$ istog su predznaka ako je n paran.
- Vrijednosti funkcije $f(x)=\dfrac{1}{(x-c)^n}$ za $x<c$ i $x>c$ različitog su predznaka ako je n neparan.



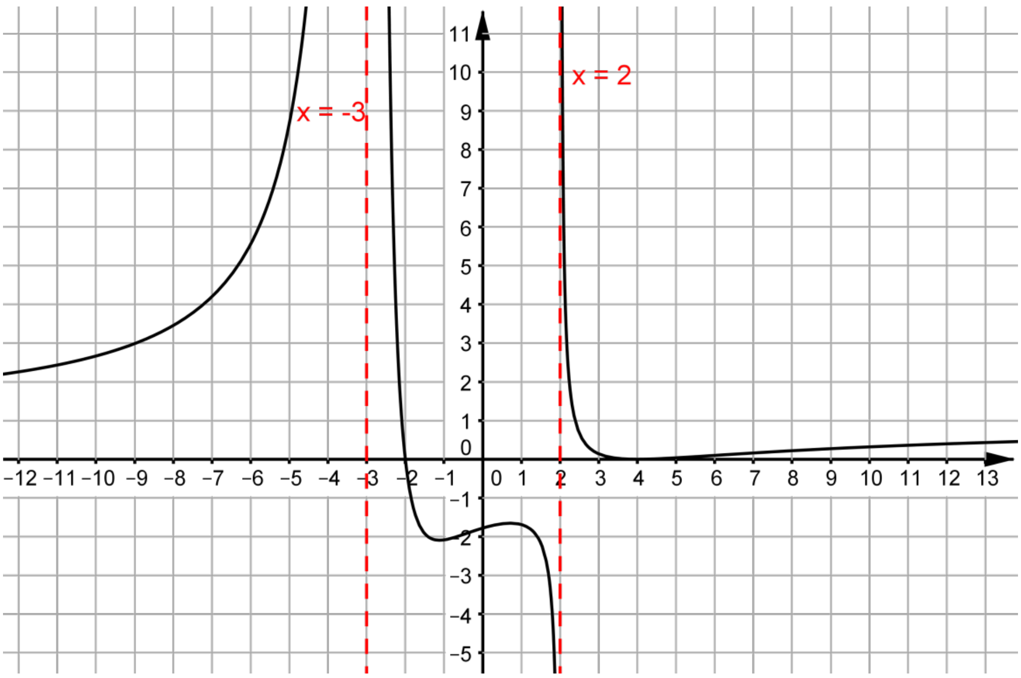
Zadatak 2

a. $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-4)^2}{(x+3)^2(x-2)}$

Nultočke:

- $x_1 = -1$, jednostruka
- $x_2 = 4$, dvostruka

Vertikalne asimptote: $x = -3$, $x = 2$

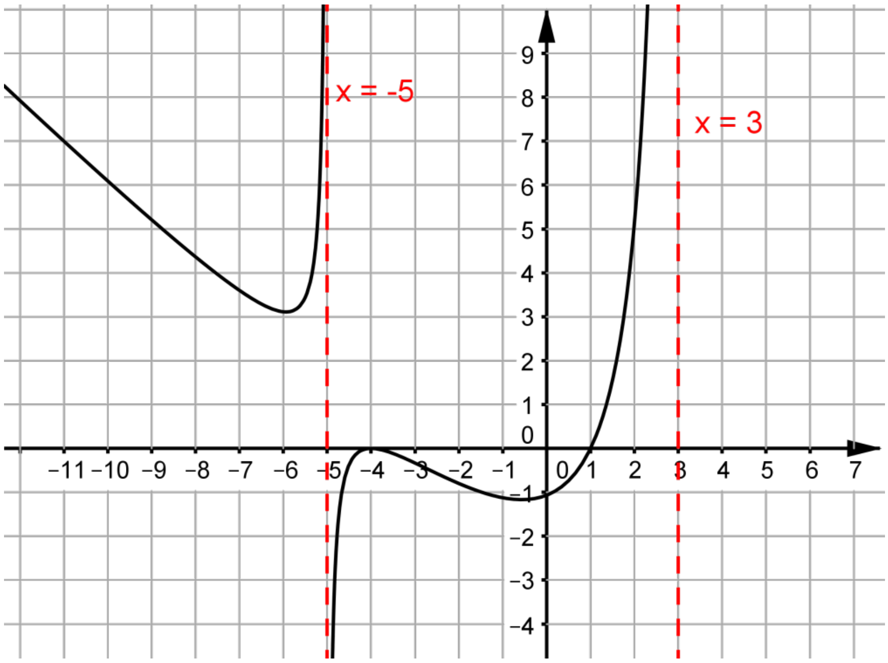


$f(x)\geq 0$ za $x\in\langle -\infty,-3\rangle\cup\langle -3,-2]\cup\langle 2,\infty\rangle$.

b. $f(x)=\dfrac{(1-x)(x+4)^2}{(x-3)^2(x+5)}$

Nultočke: $x_1 = 1$, jednostruka, $x_2 = -4$, dvostruka.

Vertikalne asimptote: $x = 3$, $x = -5$.



$f(x)\geq 0$ za $x\in\langle -\infty,-5\rangle\cup[1,3\rangle$.

3.4. Graf eksponencijalne funkcije

Učenici će:

- prepoznati eksponencijalnu funkciju zadanu tablicom vrijednosti
- odrediti pravilo pridruživanja
- interpretirati utjecaj koeficijenata na oblik grafa
- istraživati svojstva eksponencijalne funkcije primjenom alata dinamične geometrije
- odrediti domenu
- odrediti vrijednost funkcije za zadani argument
- predvidjeti izgled grafa funkcije zadane formulom.

Aktivnost je predviđena za dva školska sata.

Kako to izgleda?

Oblik rada: individualni.

Učenici samostalno skiciraju graf na papiru.

Možete li pretpostaviti?

Oblik rada: individualni.

Nakon što nacrtaju graf učenici će pretpostaviti da se radi o eksponencijalnoj funkciji.

Potražite pomoć tehnologije.

Oblik rada: individualni ili u paru.

Nastavna pomagala: računalo za svakog učenika ili za par.

Učenici će definirati klizače *a, b, c, d* i *e*. Zatim će crtati graf funkcije $f(x)=a\cdot b^{cx+d}+e$. Mijenjat će vrijednosti parametara dok se graf ne poklopi s ucrtanim točkama.

Kao rezultat dobiva se funkcija $f(x)=3\cdot 2^{x}$.

Kako bi to riješila teorija?

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{8}}=2,\ \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}}=2,\ \frac{3}{\frac{3}{2}}=2,\ \frac{6}{3}=2,\ \frac{12}{6}=2,\ \frac{24}{12}=2$$

$f(0)=3,\ f(x)=3\cdot 2^{x}$

Možemo li više?

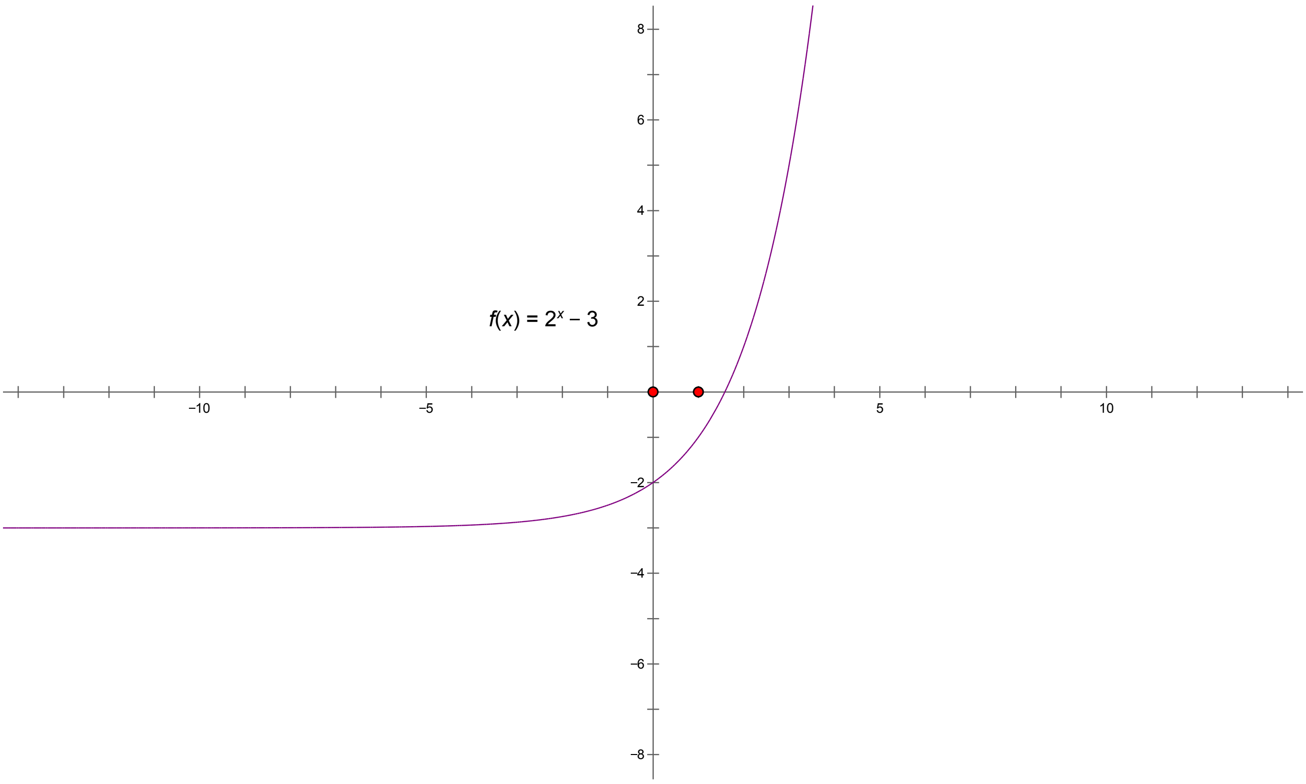
Oblik rada: u skupinama.

Učenici će unutar skupine, koristeći program dinamične geometrije, zaključiti kako promjena parametara utječe na oblik grafa funkcije.

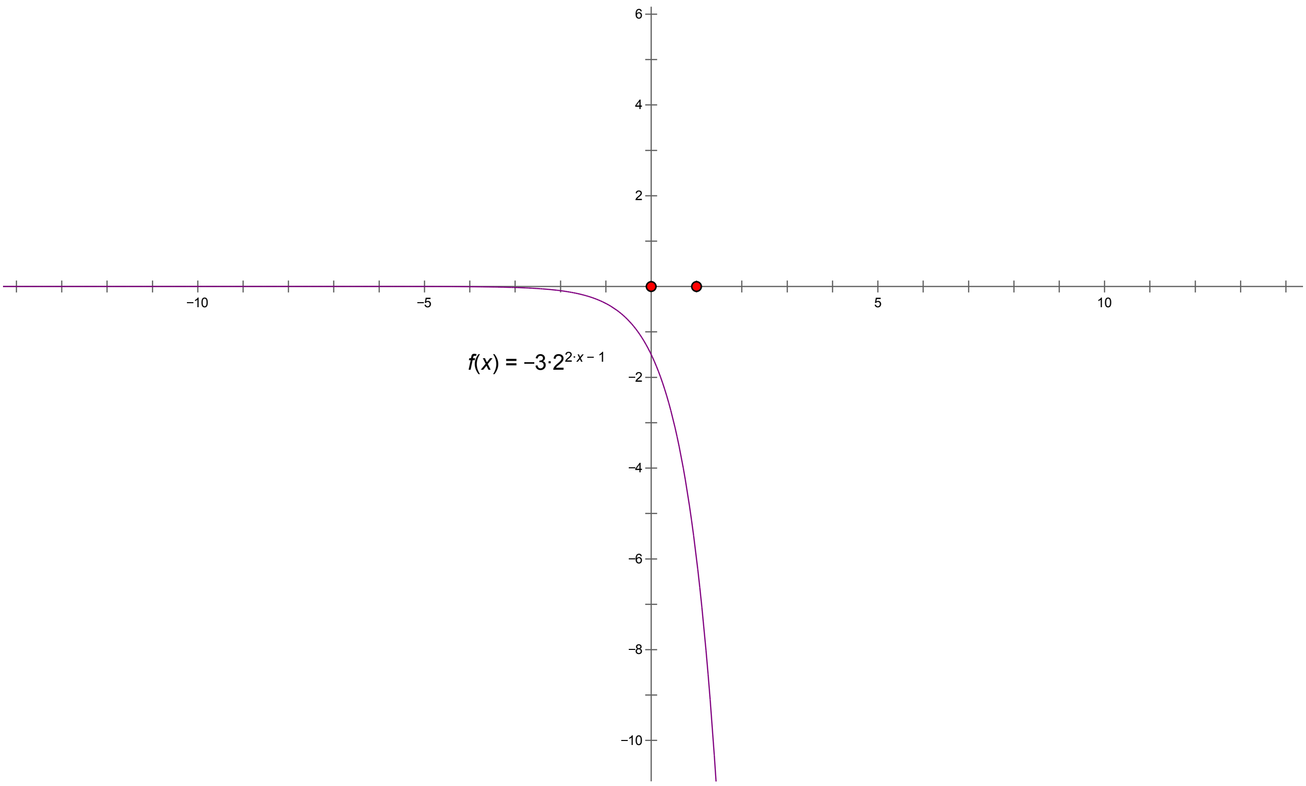
Primijenite naučeno.

Oblik rada: u skupinama.

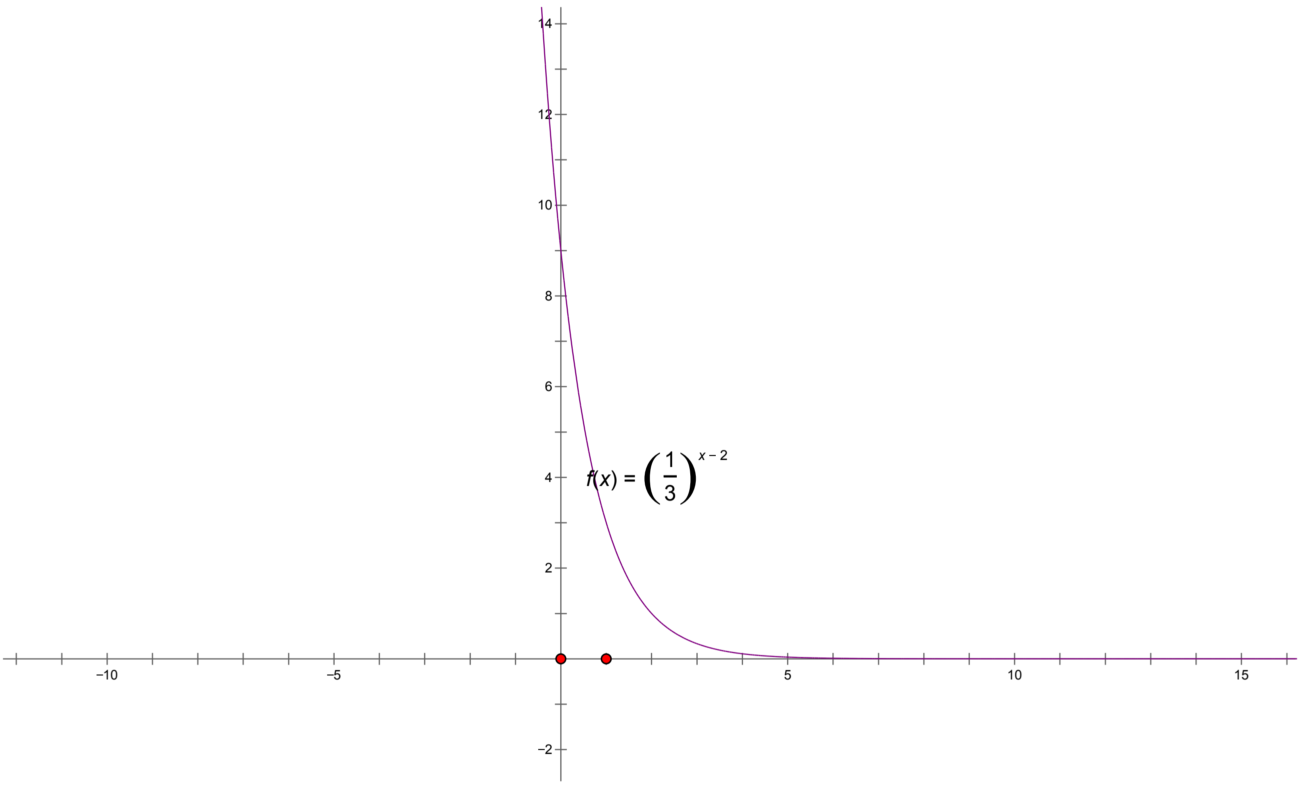
a.



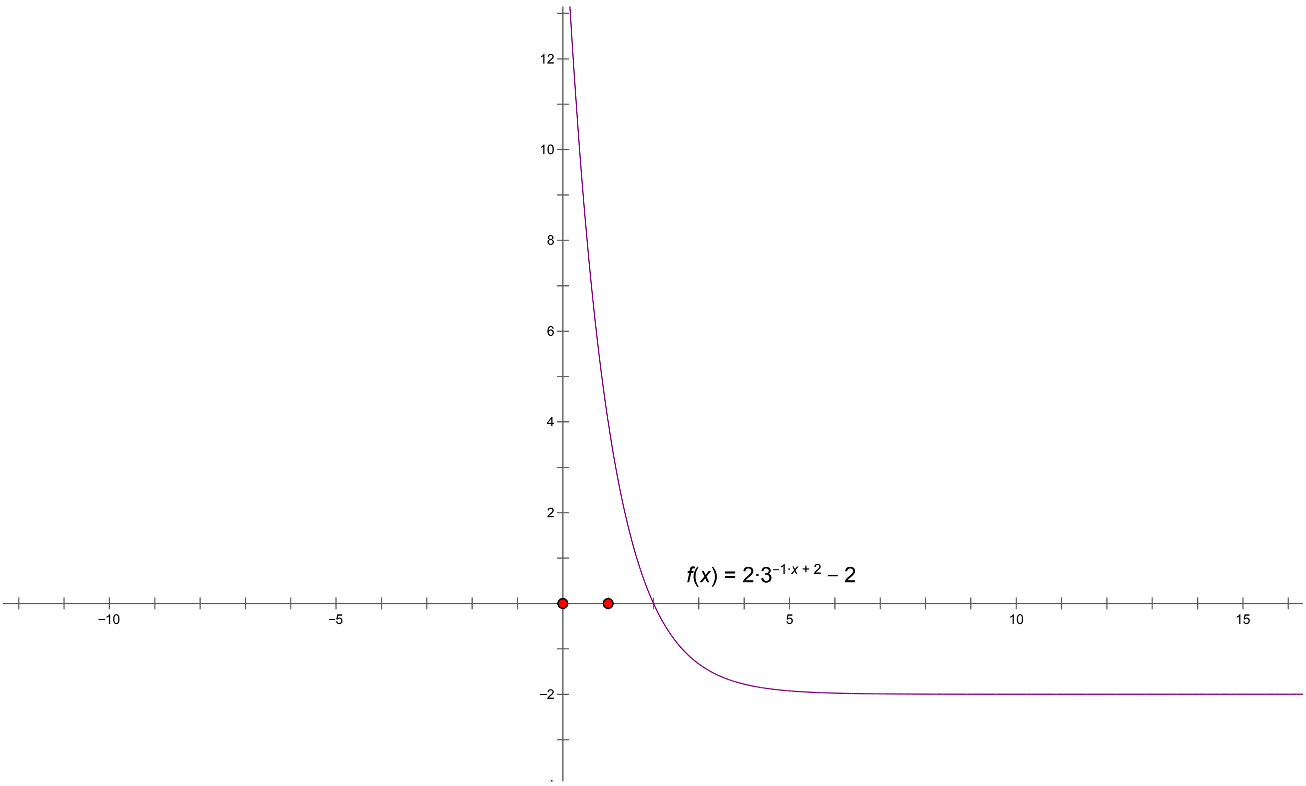
b.



c.


$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$
14
12
10
8
6
4
2
−2
−10
−5
5
10
15

d.


$f(x) = 2 \cdot 3^{-1 \cdot x + 2} - 2$
12
10
8
6
4
2
−2
−10
−5
5
10
15

3.5. Grafovi trigonometrijskih funkcija

U ovoj će aktivnosti učenici:

- crtati grafove trigonometrijskih funkcija uz pomoć tehnologije i bez nje
- opisati utjecaj koeficijenata na oblik grafa
- otkriti kako se računa period, amplituda, pomak po osi x i osi y
- primijeniti grafove trigonometrijskih funkcija u problemskim zadatcima.

Potražite pomoć tehnologije.

Učenike podijelimo u četiri skupine. Rad je organiziran u četirima radnima centrima. U svakom od radnih centara učenici na konkretnim primjerima istražuju utjecaj koeficijenata na period, amplitudu, pomak po osi x ili osi y. Kad riješe zadatke u svom radnom centru, učenici prelaze u drugi radni centar.

Radni centar 1

Funkcija	Amplituda	Nultočke	Minimalna vrijednost	Maksimalna vrijednost
$y_1 = \sin x$	1	$k\pi$	–1	1
$y_2 = 2\sin x$	2	$k\pi$	–2	2
$y_3 = -3\sin x$	3	$k\pi$	–3	3

Učenici zaključuju da je iznos amplitude apsolutna vrijednost koeficijenta a.

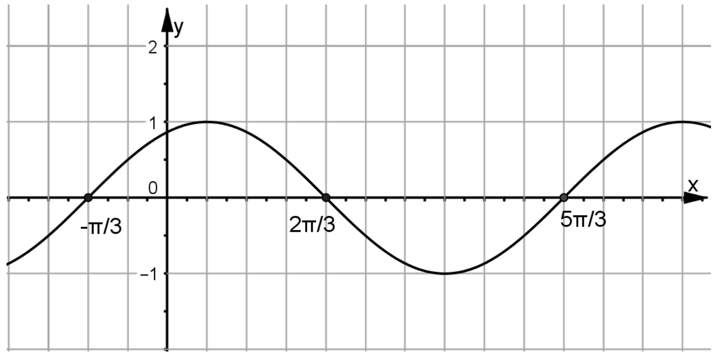
Radni centar 2

Funkcija	Period	Nultočke	Minimalna vrijednost	Maksimalna vrijednost
$y_1 = \sin x$	2π	$k\pi$	–1	1
$y_2 = \sin 2x$	π	$\frac{k\pi}{2}$	–1	1
$y_3 = \sin 3x$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{k\pi}{3}$	–1	1

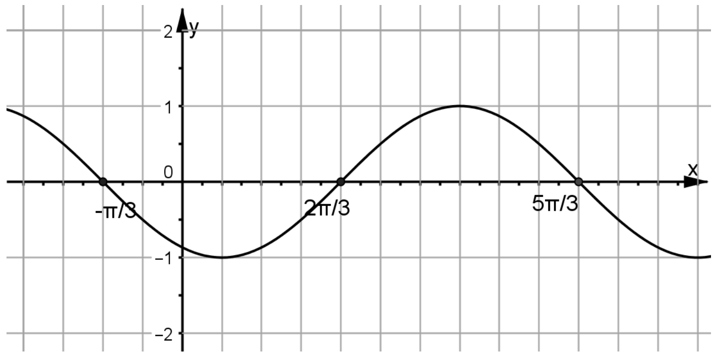
Učenici zaključuju da se period računa formulom $T = \frac{2\pi}{|b|}$.

Radni centar 3

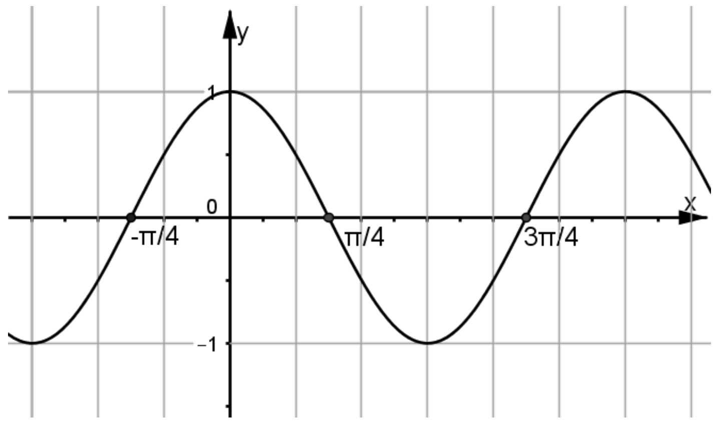
$y_1 = \sin(x + \frac{\pi}{3})$



$y_2 = \sin(x - \frac{2\pi}{3})$



$y_3 = \sin(2x - \frac{3\pi}{2})$

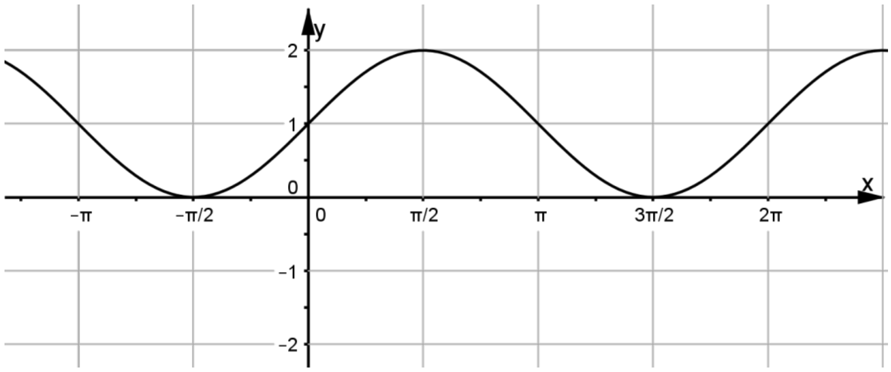


Funkcija	Pomak po x osi	Nultočke	Minimalna vrijednost	Maksimalna vrijednost
$y_1 = \sin(x + \frac{\pi}{3})$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3} + k\pi$	-1	1
$y_2 = \sin(x - \frac{2\pi}{3})$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3} + k\pi$	-1	1
$y_3 = \sin(2x - \frac{3\pi}{2})$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$	-1	1

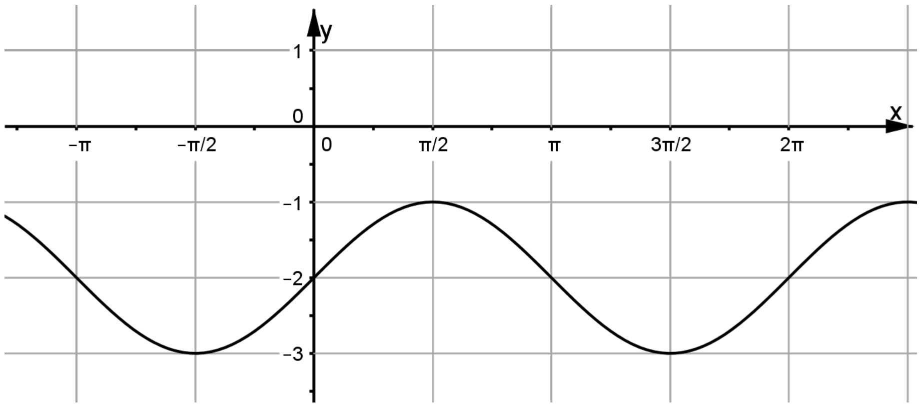
Učenici zaključuju da se pomak po *x* osi računa formulom $-\frac{c}{b}$.

Radni centar 4

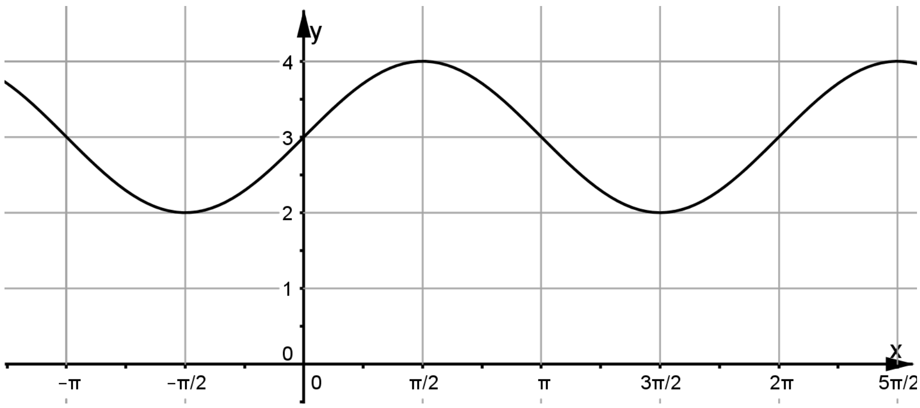
$y_1 = \sin x + 1$



$y_2 = \sin x - 2$



$y_3 = \sin x + 3$



Funkcija	Pomak po y osi	Nultočke	Minimalna vrijednost	Maksimalna vrijednost
$y_1 = \sin x + 1$	1	$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$	0	2
$y_2 = \sin x - 2$	– 2	Nema nultočaka	– 3	– 1
$y_3 = \sin x + 3$	3	Nema nultočaka	2	4

Učenici zaključuju da je pomak po y osi iznos koeficijenta d.

Kako bi to riješila teorija?

Amplituda funkcije $f(x) = a\sin(bx + c)$ apsolutna je vrijednost parametra a. Period se računa formulom $T = \frac{2\pi}{|b|}$. Pomak po x-osi dobivamo formulom $-\frac{c}{b}$, dok je pomak po y osi d. Nultočke dobivamo rješavajući trigonometrijsku jednadžbu $f(x) = 0$.

Možemo li više?

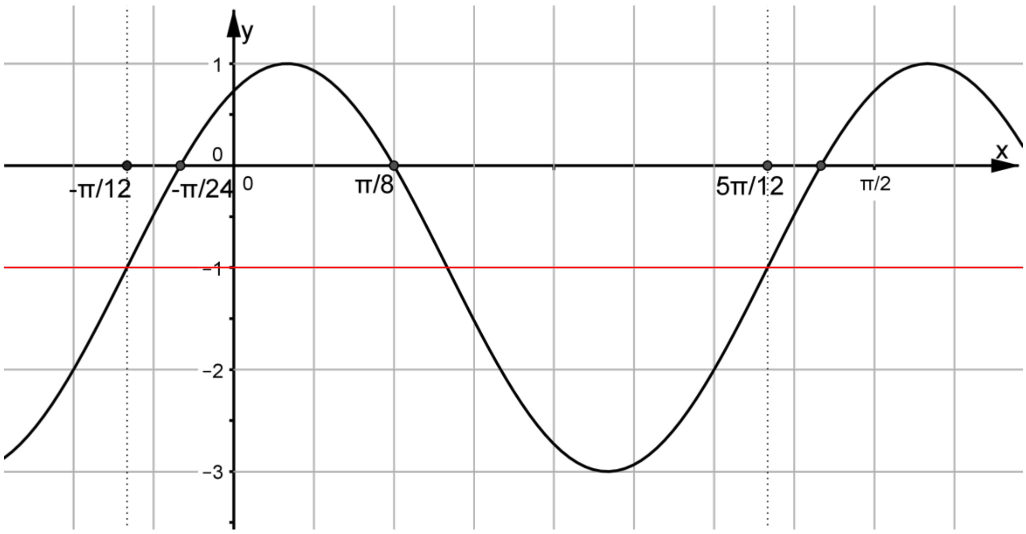
Učenici u programu dinamične geometrije kreiraju parametre i crtaju graf funkcije
$f(x) = a\sin(bx + c) + d$.

Mijenjajući parametre, provjeravaju zaključke iz prethodnih aktivnosti.

Primijenite naučeno.

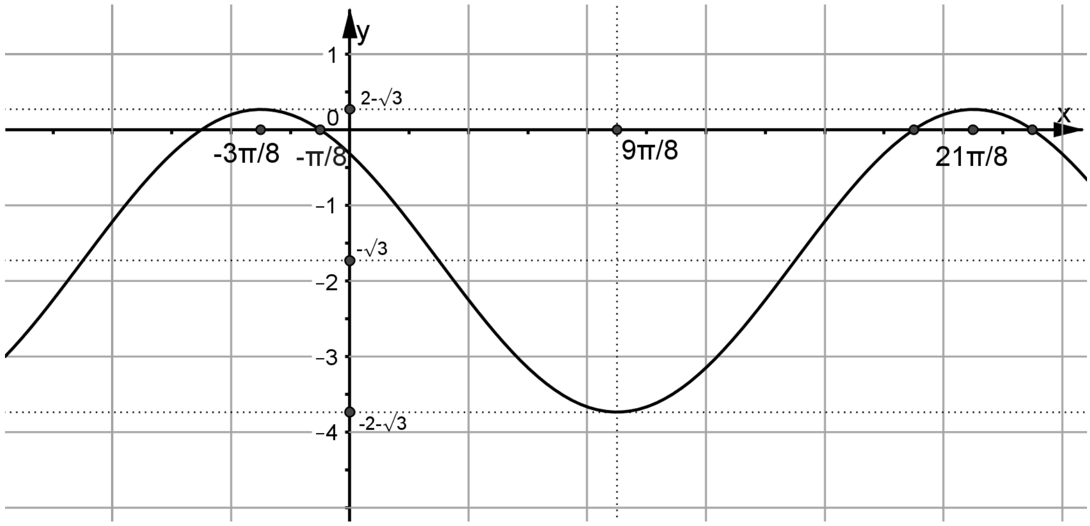
Zadatak 1.

a. $f(x) = 2\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) - 1.$



Funkcija	Pomak po y osi	Nultočke	Minimalna vrijednost	Maksimalna vrijednost	Pomak po x osi
$f(x) = 2\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$	-1	$x_1 = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$	-3	1	$-\frac{\pi}{12}$

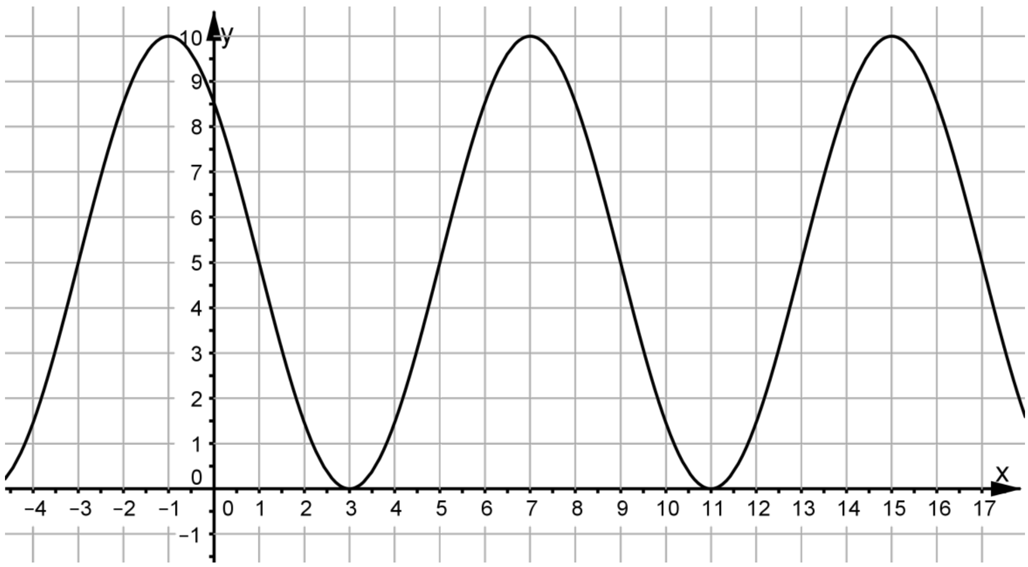
b. $f(x)=2\cos\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}$



Funkcija	Pomak po y osi	Nultočke	Minimalna vrijednost	Maksimalna vrijednost	Pomak po x osi
$f(x)=2\cos\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$x_1=-\frac{\pi}{8}+3k\pi$ $x_2=-\frac{5\pi}{8}+3k\pi$	$-2-\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$-\frac{3\pi}{8}$

Zadatak 2.

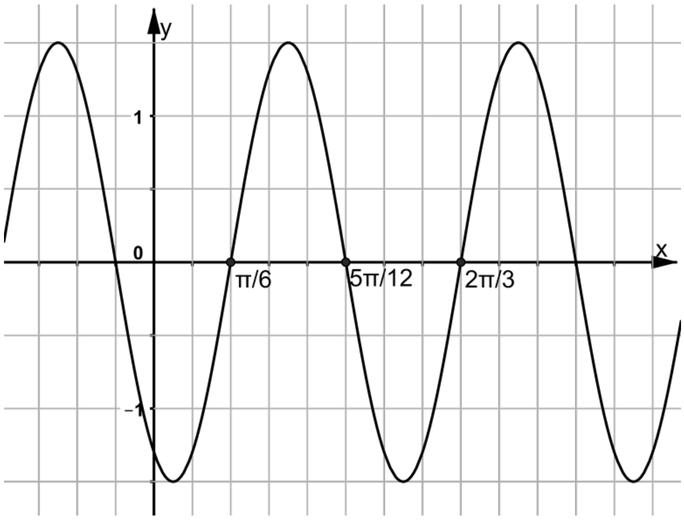
a. Graf funkcije $5\sin\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{5\pi}{4}\right)+5$



b. Broj tjedana između dvaju maksimalnih intenziteta učenja period je funkcije, a iznosi 8.

c. Minimalni intenzitet funkcije minimalna je vrijednost funkcije, a ona iznosi 0.

Zadatak 3.



Iz grafičkog prikaza iščitavamo tri nultočke $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{12}$ i $x_3 = \frac{2\pi}{3}$, amplitudu a = 1.5, pomak po x osi iznosi $\frac{\pi}{6}$. Period dobivamo pomoću nultočaka $x_3 - x_1 = \frac{\pi}{2}$. Koeficijent b izračunamo iz jednadžbe $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$ te dobivamo b = 4. Iz jednadžbe $-\frac{c}{b} = \frac{\pi}{6}$ dobivamo $c = -\frac{2\pi}{3}$. Uvrstimo li to sve u $f(x) = a\sin(bx + c) + d$, dobivamo jednadžbu grafa funkcije sa slike $f(x) = 1.5\sin(4x - \frac{2\pi}{3})$.

3.6. Funkcija, graf i pomak

U ovoj će aktivnosti učenici:

- prepoznati klasu funkcije u različitim zapisima (pravilom pridruživanja, tekstualno, tablicom zadanih vrijednosti, grafom)
- interpretirati značenje koeficijenata istaknutih klasa funkcija (funkcija apsolutne vrijednosti, kvadratna, eksponencijalna i logaritamska)
- istraživati svojstva funkcija primjenom alata dinamične geometrije (monotonost, ekstremi)
- odrediti domenu, sliku, sjecišta grafa funkcije s koordinatnim osima
- predvidjeti izgled grafa funkcije zadane formulom
- crtati grafove funkcija zadanih na različite načine (formulom, tablično, …)
- generalizirati pravilnosti i veze među zadanim veličinama
- odabrati odgovarajuću klasu funkcija u modeliranju i rješavanju problema iz matematike i svakodnevnog života
- vrednovati svoj rad.

Aktivnost je predviđena za dva školska sata.

Kako to izgleda?

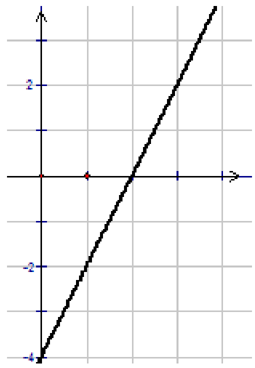
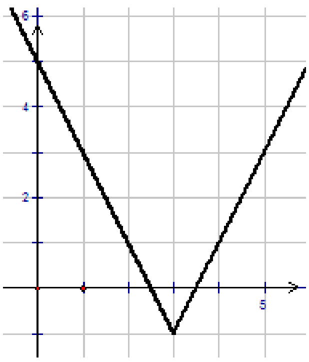
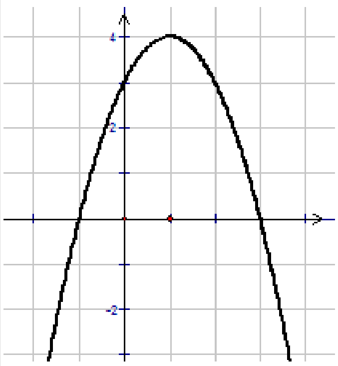
Oblik rada: rad u skupinama

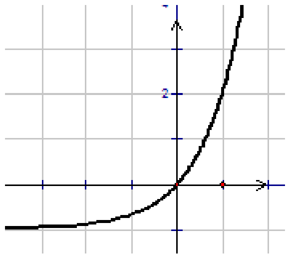
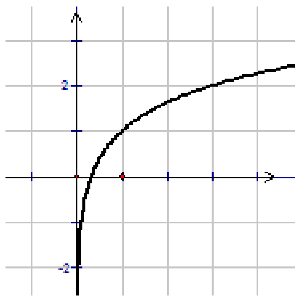
1. Formiranje ekspertnih skupina:

Koliko je skupina, toliko je članova u skupini. Ako je u razredu više učenika, neki će raditi u paru. Ako je u razredu manje učenika, može se, na primjer, po jedna kartica u svakoj skupini ostaviti praznom pa je prvi zadatak nakon formiranja skupine da ju ispune.

Za pet skupina (A, B, C, D, E) po pet članova:

Izrezati 25 papirića od dane tablice:

<table>
<tr><td>Linearna funkcija</td><td>$f(x) = 2x - 4$</td><td></td><td><table><tr><th>x</th><th>$f(x)$</th></tr><tr><td>– 1</td><td>– 6</td></tr><tr><td>0</td><td>– 4</td></tr><tr><td>1</td><td>– 2</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td></tr></table></td><td>Jednoliko raste</td></tr>
<tr><td>Funkcija apsolutne vrijednosti</td><td>$f(x) = |2x - 6| - 1$</td><td></td><td><table><tr><th>x</th><th>$f(x)$</th></tr><tr><td>– 1</td><td>7</td></tr><tr><td>0</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>–1</td></tr></table></td><td>Pada, pa raste</td></tr>
<tr><td>Kvadratna funkcija</td><td>$f(x) = -x^2 + 2x + 3$</td><td></td><td><table><tr><th>x</th><th>$f(x)$</th></tr><tr><td>– 1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td></tr></table></td><td>Raste, pa pada</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Eksponencijalna funkcija</td>
<td>$f(x)=3^x-1$</td>
<td></td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$f(x)$</td></tr><tr><td>-1</td><td>$-\frac{2}{3}$</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td>26</td></tr></table></td>
<td>Raste polako, pa brzo</td>
</tr>
<tr>
<td>Logaritamska funkcija</td>
<td>$f(x)=\log_3 x+1$</td>
<td></td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$f(x)$</td></tr><tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>9</td><td>3</td></tr><tr><td>27</td><td>4</td></tr></table></td>
<td>Raste brzo, pa polako</td>
</tr>
</table>

Svaki učenik (ili par učenika) dobiva jedan od papirića slučajnim odabirom, te oni traže članove svoje skupine – one koji imaju papiriće koji pripadaju istoj funkciji.

2. Nakon što su formirane skupine, svaka skupina dobiva funkciju i tablice (za svakog člana po jedna tablica):

A: $f(x)=|x|$ B: $f(x)=x^2$ C: $f(x)=-x^2$ D: $f(x)=2^x$ E: $f(x)=\log_2 x$

Učenici trebaju u programu dinamične geometrije nacrtati graf zadane funkcije i ispuniti prvi stupac tablice.

<table>
<tr><th>Funkcija $f(x)=$</th><th>$f(x)$</th><th>$g(x)=f(x-a)$</th><th colspan="2">$h(x)=f(x)+b$</th><th colspan="2">$k(x)=f(x-a)+b$</th></tr>
<tr><td>Domena</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Slika</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nultočke</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>$b<0$</td><td></td><td>$b<0$</td><td></td></tr>
<tr><td>$b>0$</td><td></td><td>$b>0$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sjecište s osi x</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>$b<0$</td><td></td><td>$b<0$</td><td></td></tr>
<tr><td>$b>0$</td><td></td><td>$b>0$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sjecište s osi y</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>$b<0$</td><td></td><td>$b<0$</td><td></td></tr>
<tr><td>$b>0$</td><td></td><td>$b>0$</td><td></td></tr>
<tr><td>Intervali rasta</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Intervali pada</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Ekstremi</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Potražite pomoć tehnologije.

Definirajte parametre a i b.

Mijenjajući parametre a i b, ispunite ostale stupce tablice.

3. Idemo u goste. Formiranje drugih skupina.

Nove skupine se formiraju tako da se u svakoj od njih nalazi po jedan član svake ekspertne skupine (A', B', C', D', E'). Svaki član nosi svoju tablicu te predstavlja rezultate svoje ekspertne skupine ostalima.

Kako bi to riješila teorija?

Učenici zajednički zaključuju:

Graf funkcije $g(x)=f(x-a)$ dobiva se translacijom grafa funkcije f po osi $\underline{x}$ za $\underline{a}$.

Graf funkcije $h(x)=f(x)+b$ dobiva se translacijom grafa funkcije f po osi $\underline{y}$ za $\underline{b}$.

Graf funkcije $k(x)=f(x-a)+b$ dobiva se translacijom grafa funkcije f po osi $\underline{x}$ za $\underline{a}$ i po osi $\underline{y}$ za $\underline{b}$.

Učenici opisuju utjecaj parametara a i b na domenu, sliku, nultočke, sjecišta grafa s koordinatnim osima, intervale rasta i pada i ekstreme.

Možemo li više?

Učenici će istražiti kako promjena parametara a i b utječe na promjenu grafova funkcija zadanih s: $f(x)=\left|(x-a)^2+b\right|$, $g(x)=2^{|x-a|}$, $h(x)=\left|2^{x-a}+b\right|$, $i(x)=\log_2|x|+b$, $j(x)=\left|\log_2(x-a)+b\right|$.

Osim zadanih funkcija, učenici mogu i sami zadati funkcije i promatrati grafove.

Primijenite naučeno.

Oblik rada: rad u paru ili skupinama

Materijal u programu dinamične geometrije nalazi se u digitalnim sadržajima pod nazivom superman i lois sms.gsp. Učenici će, promatrajući stazu u programu dinamične geometrije, pogađati o kojoj se funkciji radi.

superman i lois sms.gsp

3.7. Grafičko rješavanje jednadžbi i nejednadžbi

U ovoj će aktivnosti učenici:

- odrediti rješenja jednadžbi i nejednadžbi prikazujući ih grafički
- istražiti vezu među zadanim veličinama rabeći program dinamične geometrije
- odrediti egzaktnu formulu koja povezuje zadane veličine
- opisati ovisnost rješenja sustava linearnih jednadžbi o realnom parametru
- vrednovati svoj rad.

Oblik rada: rad u skupini.

Nastavna pomagala: računalo za svaku skupinu učenika

Zadatke učenici dobivaju na papiru.

Kako to izgleda?

Funkcije su linearne, a brzine predstavljaju koeficijent smjera.

Napravite model.

Neka je y u metrima, a t u sekundama.

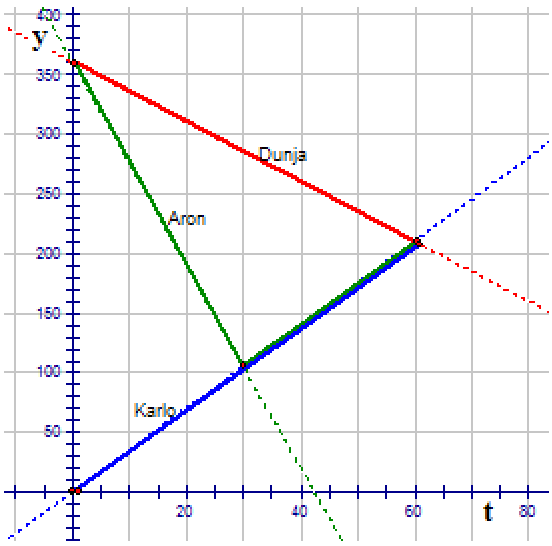
Karlo $y = 3.5t$, Dunja $y = -2.5t + 360$, Aron $y = \begin{cases} -8.5t + 360, & 0 \leq t \leq 30 \\ 3.5t, & \mathrm{t} > 30 \end{cases}$.

Možete li pretpostaviti?

Učenici će procijeniti koliko je vremena potrebno da Aron dođe do Karla, da se Dunja i Karlo sretnu, kao i udaljenosti od klupe i put koji su prešli do susreta. Kasnije mogu usporediti svoje procjene s izračunatim vrijednostima.

Potražite pomoć tehnologije.

Učenici će nacrtati grafove dobivenih funkcija u odabranom pravokutnom koordinatnom sustavu.



Kako bi to riješila teorija?

Koordinate sjecišta grafova određuju vrijeme i udaljenost od klupe u trenutku susreta.

a. 30 sekundi

b. $3.5t = -2.5t + 360$, 60 sekundi

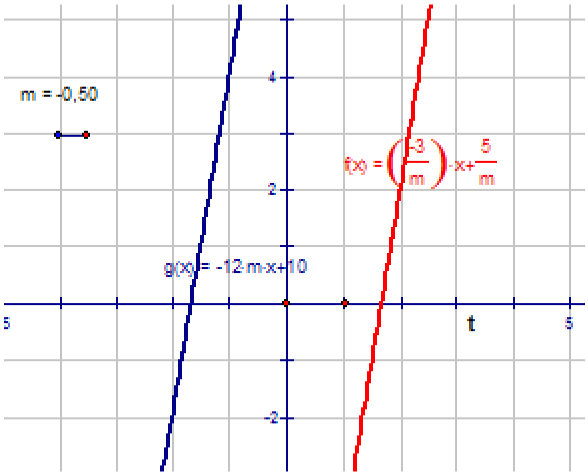
c. 210 metara

d. Dunja je prešla 360 – 210 = 150 metara, a Aron za prvih 30 s prešao 360 – 105 = 255 m i idućih 30 sekundi još 105 m, što je ukupno 315 metara.

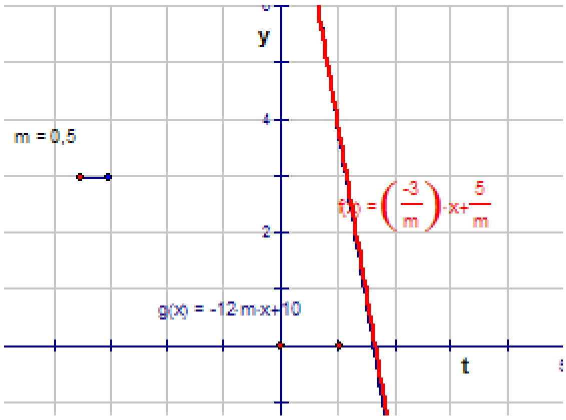
Možemo li više?

Izrazimo y iz jednadžbi: A: $y = -\frac{3}{m}t + \frac{5}{m}$, B: $y = -12mt + 10$. U programu dinamične geometrije odredimo promjenjivi parametar m (konstrukcija točke S na osi x, mjerenje koordinate x, bilo koja točka u ravnini P, označi ishodište i P, transformacije – označi vektor, označi točku S – translatiraj, dužina $\overline{PS'}$ je parametar m). Nacrtajte pravce i mijenjajte parametar.

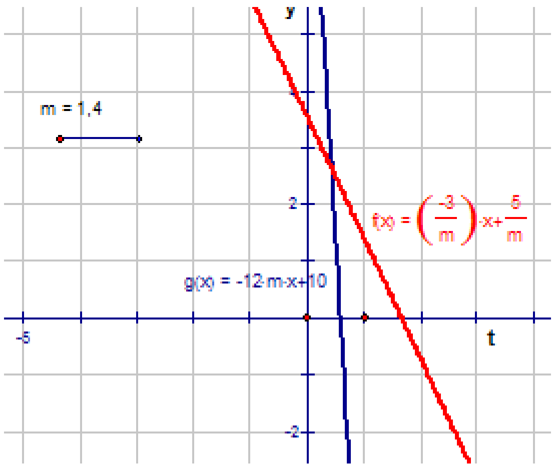
Za $m = -\frac{1}{2}$ djevojčice neće nikada biti jednako udaljene od klupe – pravci su paralelni.



Za $m = \frac{1}{2}$ djevojčice će u svakom trenutku biti jednako udaljene od klupe – pravci se podudaraju.

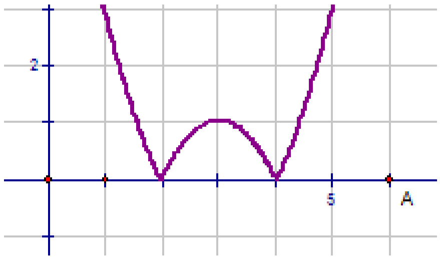


Za $m \neq \pm\frac{1}{2}$ samo u jednom trenutku bit će jednako udaljene od klupe.

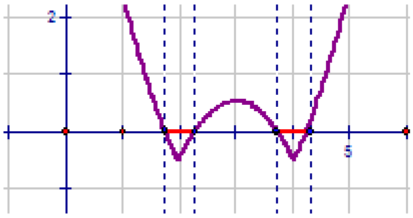


Primijenite naučeno.

Prikažimo funkciju $y=\left|x^2-6x+8\right|$ grafički.

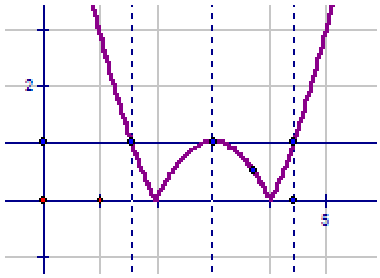


Riješimo nejednadžbu $\left|x^2-6x+8\right|<\frac{1}{2}$, odnosno $\left|x^2-6x+8\right|-\frac{1}{2}<0$

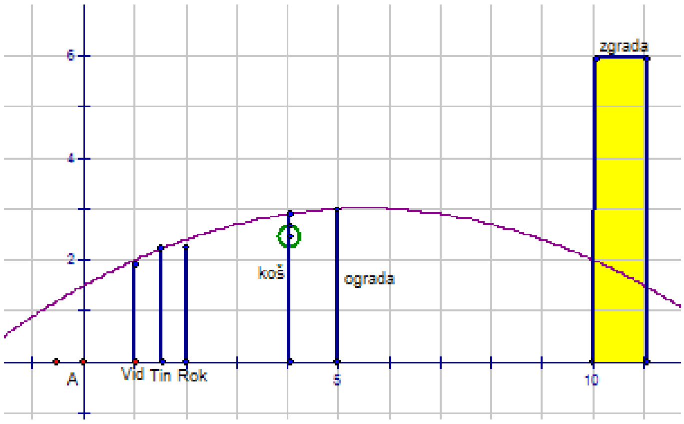


$x\in\left\langle\frac{6-\sqrt{6}}{2},\frac{6-\sqrt{2}}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{6+\sqrt{2}}{2},\frac{6+\sqrt{6}}{2}\right\rangle$.

Iz grafa je očito da lopta postiže visinu 1 m tri puta za $x_1=3-\sqrt{2}$, $x_2=3$ i $x_3=3+\sqrt{2}$ što su rješenja jednadžbe $\left|x^2-6x+8\right|=1$, a visine manje od 1 metra 4 puta za $x\in\left\langle 3-\sqrt{2},3+\sqrt{2}\right\rangle$, što je rješenje nejednadžbe $\left|x^2-6x+8\right|<1$.



Rješavajući problem razbijenog prozora, učenici će podatke iz zadatka prikazati u koordinatnom sustavu. Najprije će odabrati prikladan koordinatni sustav. Na primjer, mogu odabrati tako da linija igrališta bude u ishodištu. Točke (4,2.9), (5,3) i (10,2) pripadaju grafu funkcije, pa se rješavanjem sustava jednadžbi dobiva funkcija zadana s $f(x)=-\frac{1}{20}x^2+\frac{11}{20}x+\frac{3}{2}$.



Za Vida je $x = 1$, za Tina $x = 1.5$, a za Roka $x = 2$. Ako uvrstimo te vrijednosti u pravilo pridruživanja dobivamo: $f(1) = 2$, $f(1.5) = 2.2125$ i $f(2) = 2.4$, što znači da je jedino Tin mogao baciti loptu.

3.8. Složi kartice

U ovoj će aktivnosti učenici utvrditi i primijeniti usvojena pravila i činjenice koje znaju o linearnoj funkciji.

Trajanje aktivnosti: 45 minuta

Materijal: škare, ljepilo (ili već pripremljene izrezane kartice) i podloga za slaganje

U ovoj će aktivnosti učenici:

- povezati linearnu funkciju i njezin graf
- primijeniti različita svojstva linearne funkcije
- odrediti linearnu funkciju iz zadanog svojstva
- aktivno sudjelovati u timskom radu uz razmjenu matematičkih ideja, mišljenja i stavova.

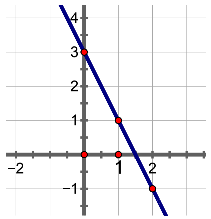
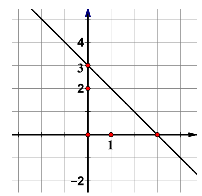
Kako to izgleda?

Nastavnik može već unaprijed izrezati kartice i podijeliti ih skupinama spremne za slaganje ili će učenici sami izrezati kartice iz dane tablice gdje su sve kartice pomiješane.

Učenici će u skupinama od četiriju ili pet članova slagati kartice i lijepiti ih na podlogu tako da će u svakom od pet redaka imati jednu linearnu funkciju i neka njezina obilježja. Kako bi izbjegli pogađanje, nisu dana ista obilježja u svakom retku, za svaku linearnu funkciju. Neke funkcije nisu zadane formulom, a nije dan ni njihov grafički prikaz. Dobra strategija rješavanja u skupini bila bi da učenici prvo otkriju sve formule kojima su zadane linearne funkcije, koristeći one kartice na kojima za to ima dovoljno podataka.

Na kraju, ovisno o vremenu, na prazna mjesta u tablici, na podlozi, učenici mogu dodati neko novo svojstvo ili obilježje linearne funkcije iz pripadajućeg retka. To može biti graf, formula i slično.

Linearna funkcija $f(x) = kx + l$ (rješenja)

$f(x) = -\frac{2}{3}x + 3$	Graf sadrži točku $\left(\frac{1}{2}, \frac{8}{3}\right)$	Koeficijent smjera pripadajućeg grafa je $-\frac{2}{3}$	Nultočka je $x = \frac{9}{2}$	Implicitna jednadžba grafa je $2x + 3y = 9$	Ako se vrijednost varijable x poveća za 6, vrijednost funkcije će se smanjiti za 4
		$f(-5) = 13$	Graf sadrži točku (0, 3) i paralelan je s pravcem $8x + 4y + 1 = 0$	Nagib grafa funkcije je $k = -2$	
$f(x) = \frac{3}{2}x - 3$		Iz $f(x) = 12$ Slijedi $x = 10$	Odsječak grafa na osi ordinata je $y = -3$.	Graf funkcije s koordinatnim osima zatvara trokut površine $P = 3$.	
$f(2) = 1$ $f(-1) = 4$	$f(x) > 0$, za sve $x < 3$	Nultočka $x = 3$	Ako je $f(m) - f(n) = 2$ onda je $m - n = -2$		
	Graf sadrži točku (2,–3) i paralelan je s pravcem $y = 2x + 2$	Nultočka je $\frac{7}{2}$.	Odsječak na y osi je – 7.	$f\left(\frac{1}{2}\right) = -6$	

3.9. Crni Petar – funkcije

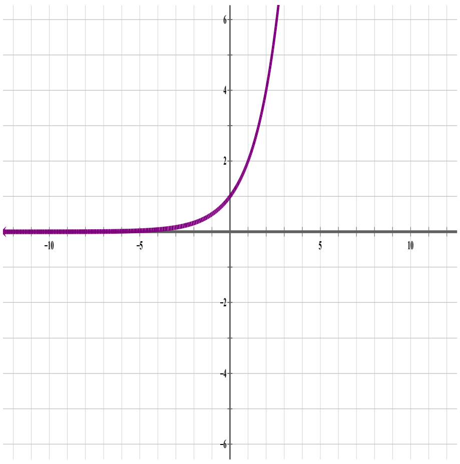
U ovoj će aktivnosti učenici:

- povezati grafove funkcija i pravila pridruživanja
- vrednovati svoj rad.

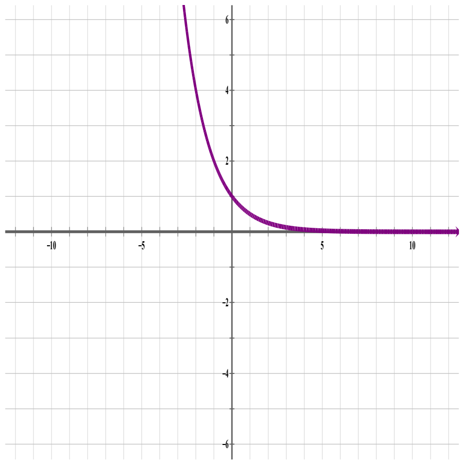
Potrebni materijal: kartice

Kako to izgleda?

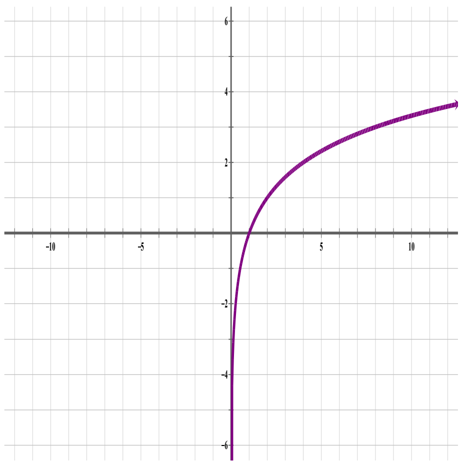
Učenike podijelimo u manje grupe. Svaka grupa dobiva svoje kartice za igru.



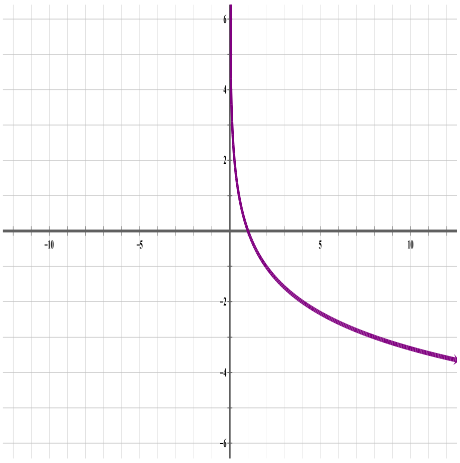
$$f(x) = 2^x$$



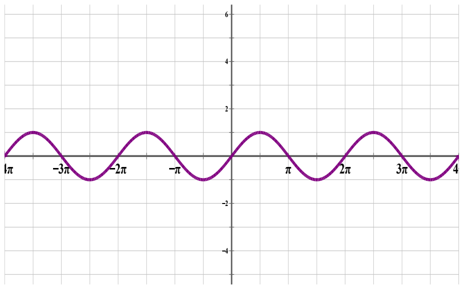
$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



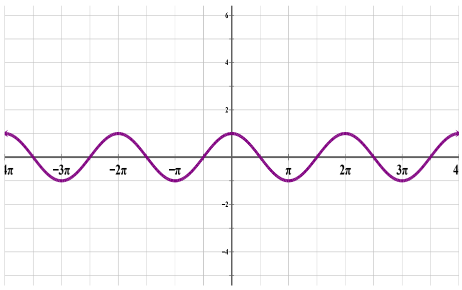
$$f(x) = \log_2 x$$



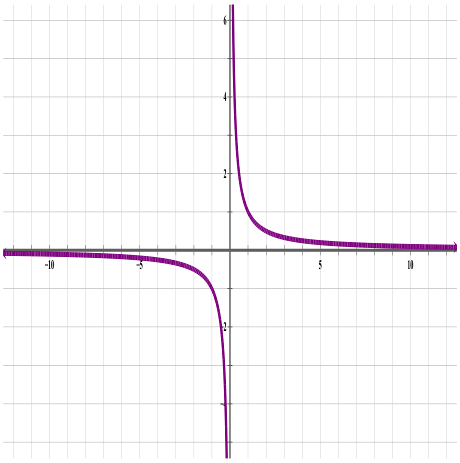
$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$



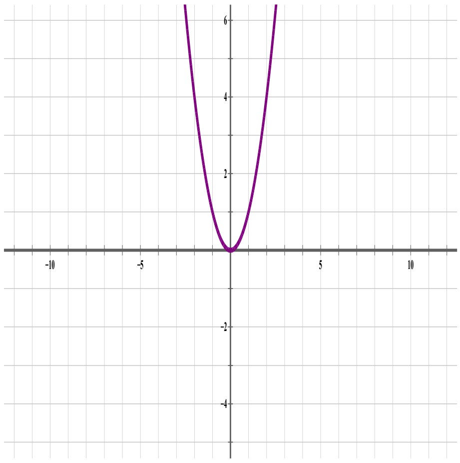
$$f(x) = \sin x$$



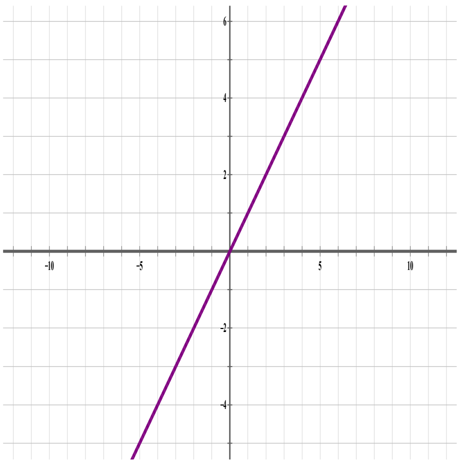
$$f(x) = \cos x$$



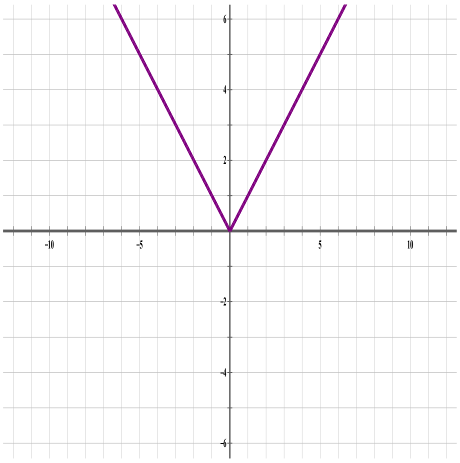
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



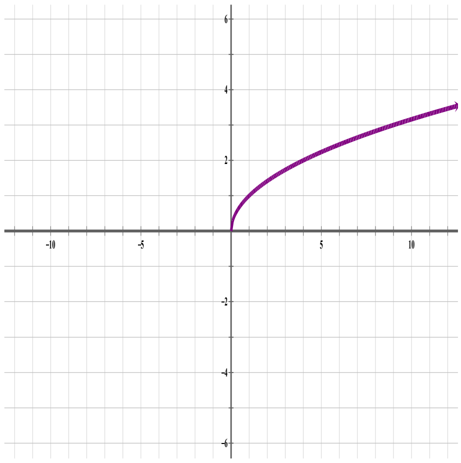
$$f(x) = x^2$$



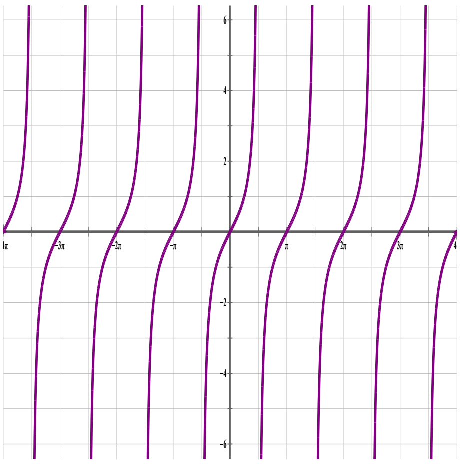
$$f(x) = x$$



$$f(x)=|x|$$

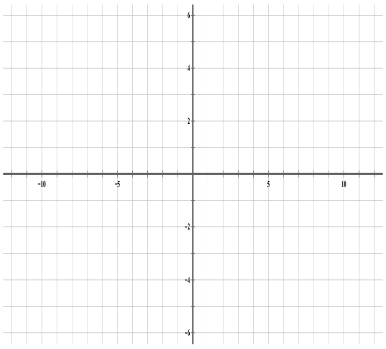


$$f(x)=\sqrt{x}$$



$$f(x)=\operatorname{tg} x$$

Crni Petar $f\left(x\right)=....$



4. Funkcije 2

4.1. Niz i konvergencija niza

Učenici će:

- računati članove niza koji su zadani riječima, općim članom ili rekurzivnom formulom
- odrediti konvergenciju niza prikazujući članove niza tablično i u koordinatnom sustavu
- dokazati monotonost i omeđenost niza
- riješiti zadatak realnog konteksta modelirajući nizovima.

Potrebno vrijeme: dva školska sata

Organizacija rada: učenici rade samostalno na računalima.

U čemu je problem?

Dani problem promatramo kroz model a. i b. Do 1940. godine, prema modelu a., danim prirastom opisan je eksponencijalni rast populacije slonova. Nakon 1940. godine primjenjuje se logistički model rasta populacije slonova. On je ograničen brojem od 7 500 slonova. U ovom trenutku ne očekujemo od učenika da donesu zaključak o graničnom broju. Oni će uočiti da se u oba modela populacija slonova povećava, ali koristimo li samo prvi model rast je puno brži. Stoga, drugi je model realniji.

Kako to izgleda?

a. $a_1 = 17.25 \approx 18$, $a_2 \approx 20$, $a_3 \approx 23$, $a_4 \approx 27$, $a_5 \approx 31$, $a_{10} \approx 61$, $a_{35} \approx 1998$.

Opći član niza je $a_n = 15 \cdot 1.15^n$. $a_{55} \approx 32695$, što je prilično velik broj i nije realno da će se dostići. Članovi niza rastu u beskonačnost. Kažemo da niz divergira.

b. $a_1 = 2227.5 \approx 2228$,

$a_2 \approx 2470$, $a_3 \approx 2724$, $a_4 \approx 2989$, $a_5 \approx 3263$,
$a_{10} \approx 4648$, $a_{20} \approx 6597$, $a_{30} \approx 7278$, $a_{60} \approx 7498$, $a_{70} \approx 7500$.

Računajući broj jedinki slonova, uočavamo da članovi toga niza rastu i konvergiraju broju 7 500.

Potražite pomoć tehnologije.

n	Model a.	Model b.
1	2300	2228
5	4023	3263
10	8092	4648
15	16275	5815
20	32734	6597
25	65838	7045
30	132424	7278
35	266351	7394
40	535728	7450
45	1077538	7476
50	2167315	7489

Kako bi to riješila teorija?

Dokaz monotonosti za niz $a_n = 15 \cdot 1.15^n$.

$a_{n+1} \geq a_n$

$\Leftrightarrow 10 \cdot 1.15^{n+1} \geq 10 \cdot 1.15^n$

$\Leftrightarrow 1.15^{n+1} \geq 1.15^n$

$\Leftrightarrow n+1 \geq n$ Niz je monotono rastući.

Niz $a_n = 15 \cdot 1.15^n$ odozdo je omeđen brojem 15, ali nema gornju među.

Niz $a_n = 15 \cdot 1.15^n$ monoton je, ali nije omeđen. Dani niz nije konvergentan, kažemo da divergira.

Dokaz monotonosti za niz $b_n = \dfrac{7500}{1+2.75e^{-0.15n}}$.

$b_{n+1} \geq b_n$

$\Leftrightarrow \dfrac{7500}{1+2.75e^{-0.15(n+1)}} \geq \dfrac{7500}{1+2.75e^{-0.15n}}$

$\Leftrightarrow 1+2.75e^{-0.15n} \geq 1+2.75e^{-0.15(n+1)}$

$\Leftrightarrow e^{-0.15n} \geq e^{-0.15(n+1)}$

$\Leftrightarrow 1 \geq \dfrac{1}{e^{0.15}}$, $e^{0.15} > 1$ pa je niz monotono rastući.

Pokažimo da vrijedi: $2000 \leq \dfrac{7500}{1+2.75e^{-0.15n}} \leq 7500$

Lijeva nejednakost $2000 \leq \frac{7500}{1+2.75e^{-0.15n}}$ ekvivalentna je nejednakosti

$2000+5500e^{-0.15n} \leq 7500$

$\Leftrightarrow e^{-0.15n} \leq 1 \Leftrightarrow n \geq 0$.

Ova nejednakost vrijedi za sve prirodne brojeve n.

Desna nejednakost $\frac{7500}{1+2.75e^{-0.15n}} \leq 7500$ ekvivalentna je nejednakosti

$7500 \leq 7500\left(1+2.75e^{-0.15n}\right)$

$\Leftrightarrow 1 \leq 1+2.75e^{-0.15n} \Leftrightarrow e^{-0.15n} \geq 0$. Ova nejednakost vrijedi za sve prirodne brojeve n.

Stoga je niz $b_n = \frac{7500}{1+2.75e^{-0.15n}}$ omeđen. Već smo ranije uočili da taj niz konvergira broju 7500.

Zaključak: Niz koji je monoton i omeđen je konvergentan.

Možemo li više?

Rekurzija: $a_1 = x,\ a_{n+1} = \frac{a_n+5}{3}$, gdje je x broj koji je učenik zamislio.

Ovaj niz konvergira prema broju 2.5.

a. Niz konvergira prema broju 2.5.

b. Niz konvergira prema polovini broja koji se dodaje.

c. Za pozitivne brojeve manje od 1 niz će divergirati. Za sve ostale niz konvergira broju $\frac{5}{b-1}$.

d. Niz konvergira prema broju 2.7913.

Obrazloženje.

Ni u jednom slučaju limes ne ovisi o zamišljenom broju.

Neka je $a_1 = x, a_n = \frac{a_{n-1}+a}{b}$ rekurzivna formula kojom je zadan niz.

Pretpostavimo da limes niza (a_n) postoji i da je L broj kojem konvergiraju članovi niza. Tada iz $n \to \infty$ slijedi $a_n \to L,\ a_{n-1} \to L$ i $L = \frac{L+a}{b}$. Odatle dobivamo $L = \frac{a}{b-1}$.

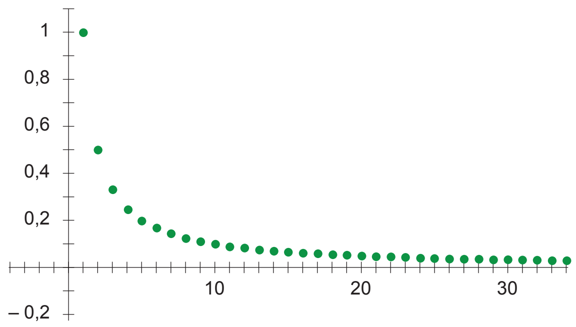
Ako je $a_1 = x,\ a_n = \sqrt{a_{n-1}+a}$ rekurzivna formula kojom je zadan niz, dobivamo

$L = \sqrt{L+a} \Rightarrow$ limes L pozitivno je rješenje jednadžbe $L^2 - L - a = 0$.

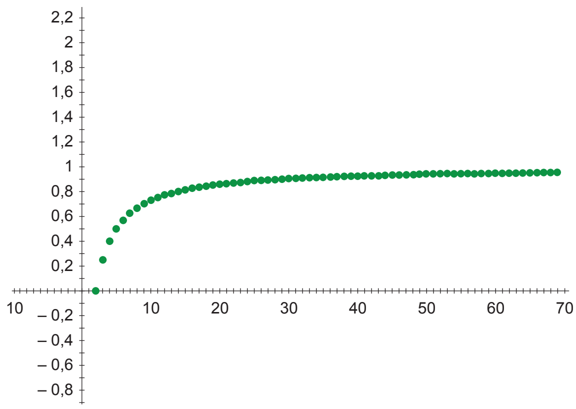
Primijenite naučeno.

Grafički prikazi nekih od nizova:

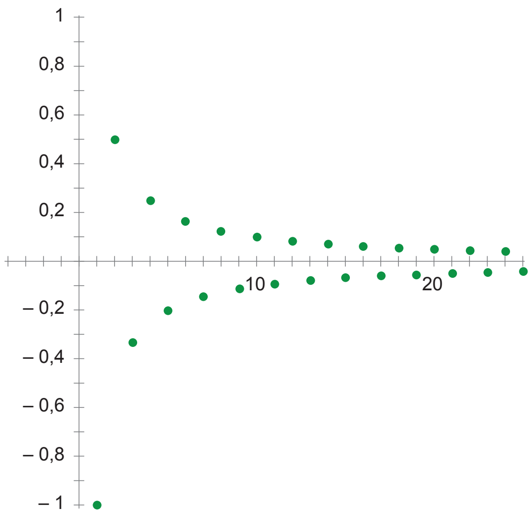
a. $a_n = \dfrac{1}{n}$



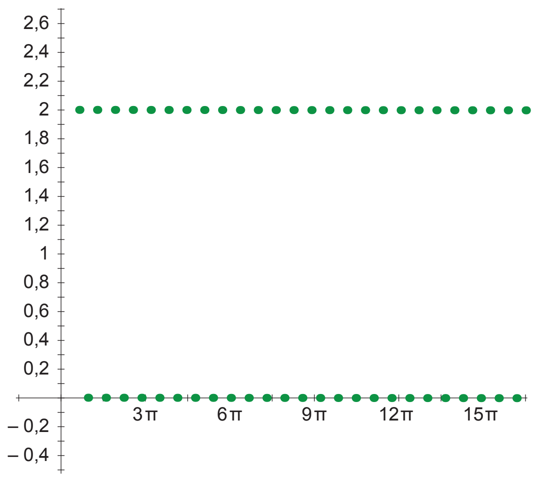
b. $a_n = \dfrac{n-2}{n+1}$



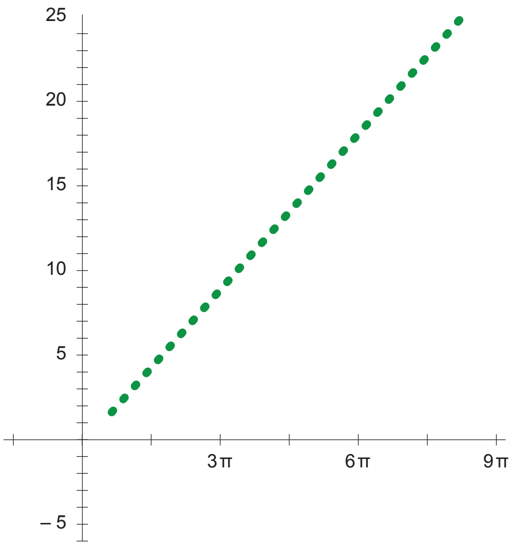
c. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$



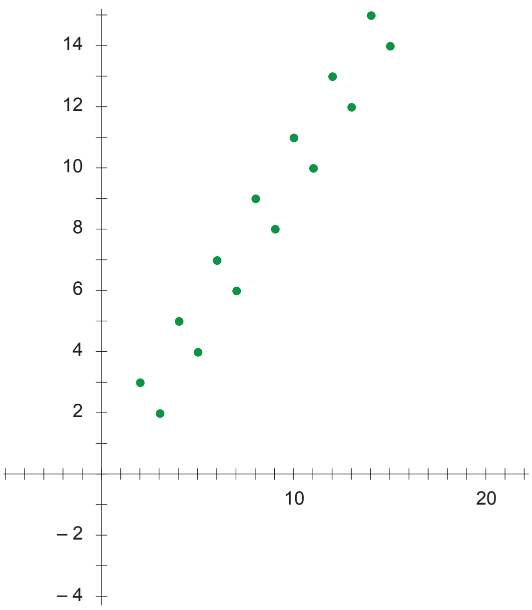
d. $a_n = 1 + \cos(n\pi)$



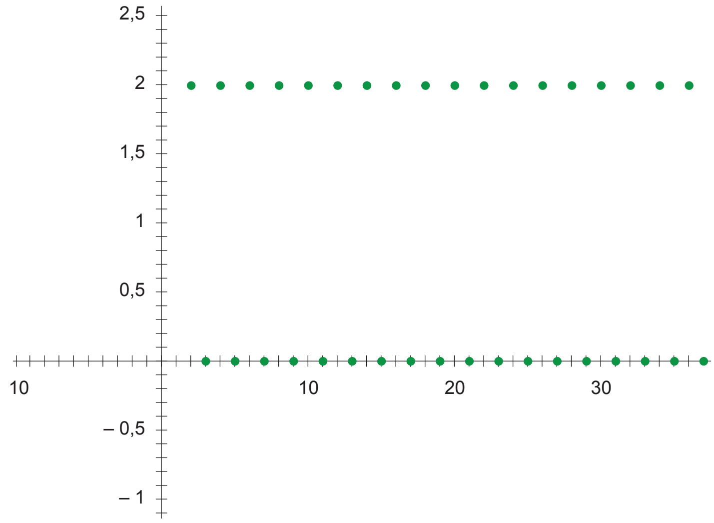
e. $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$



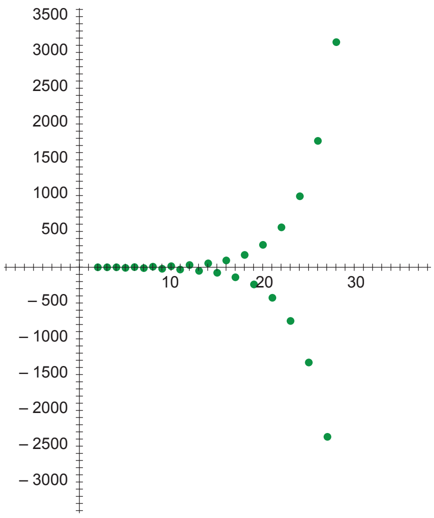
f. $a_n = n + (-1)^n$



g. $a_n = 1 + (-1)^n$



h. $a_n = \left(-\frac{4}{3}\right)^n$



4.2. Fraktali

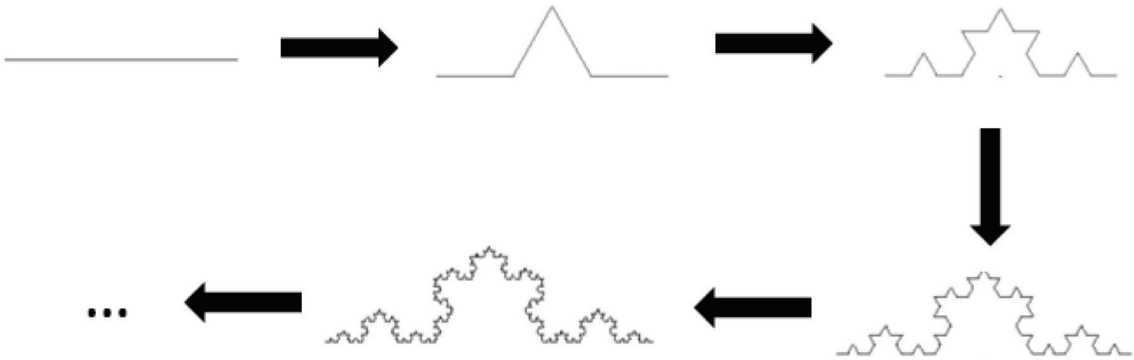
U ovoj će aktivnosti učenici:

- istražiti svojstva Kochove pahuljice i tepiha Sierpinskog
- primijeniti geometrijski red u računanju opsega i površine fraktala
- konstruirati fraktale pomoću tehnologije.

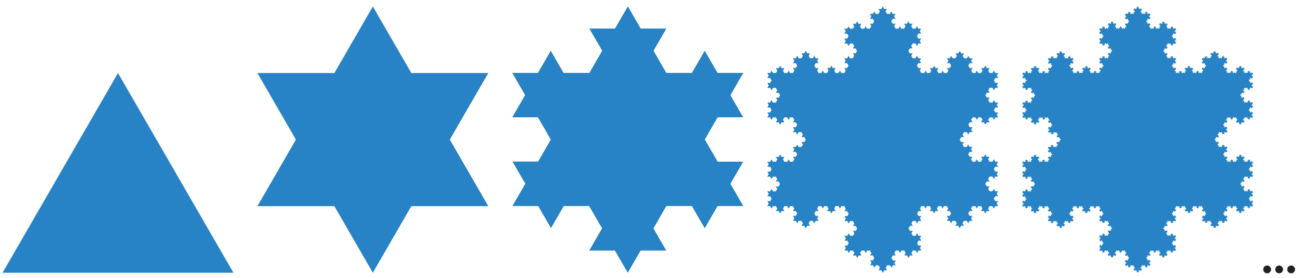
U čemu je problem?

Učenicima na početku ove aktivnosti treba predočiti Kochovu krivulju, Kochovu pahuljicu i tepih Sierpinskog te način na koji se formiraju.

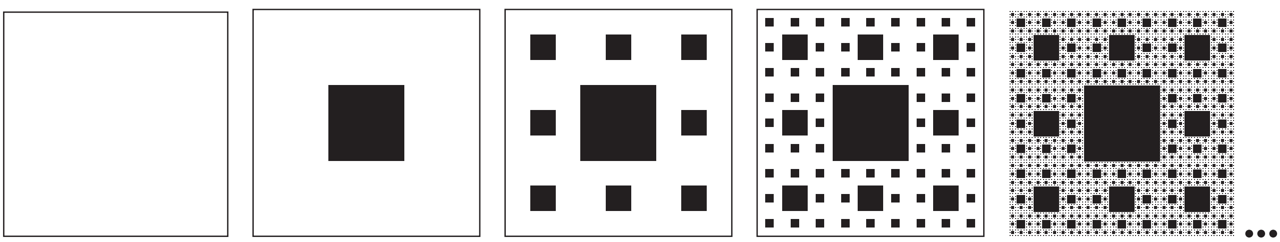
Konstrukciju Kochove krivulje započinjemo dijeljenjem zadane dužine na tri jednaka dijela. Nad srednjim dijelom dužine konstruiramo prema van jednakostranični trokut, a srednji dio dužine uklonimo. Tako smo umjesto jedne dužine dobili četiri nove dužine jednakih duljina. Ovaj korak nazivamo prvom iteracijom. Drugu iteraciju dobivamo tako da primijenimo prethodni postupak na svaku od četiriju dužina dobivenih prvom iteracijom. Kochova krivulja nastaje kada broj iteracija teži u beskonačnost.



Kochova se pahuljica formira tako da prethodni postupak primijenimo na svaku od triju stranica jednakostraničnog trokuta.



Konstrukciju tepiha Sierpinskog započinjemo dijeljenjem kvadrata na devet sukladnih kvadrata kojima je duljina stranice jednaka 1/3 duljine stranice početnog kvadrata. Srednji kvadrat uklonimo i time je gotova prva iteracija. Sljedeća je iteracija ponavljanje prethodnog postupka za preostalih osam kvadrata. Tepih Sierpinskog nastaje kada broj iteracija teži u beskonačnost.



Kako to izgleda?

Kochova pahuljica:

Ako duljina stranice početnog trokuta iznosi 1, njegov je opseg $O_0 = 3$, a $P_0 = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Prva iteracija.

$a_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$, broj stranica je $4 \cdot 3 = 12$

$O_1 = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4$

$P_1 = P_0 + 3 \cdot \frac{a_1^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

Druga iteracija.

$a_2 = \frac{1}{3} a_1 = \frac{1}{9}$, broj je stranica $4 \cdot 12 = 48$

$O_2 = 48 \cdot \frac{1}{9} = \frac{16}{3}$

$P_2 = P_0 + P_1 + 12 \cdot \frac{a_2^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + 12 \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{27}\right) = \frac{10\sqrt{3}}{27}$

Tepih Sierpinskog:

Neka je duljina stranice početnog kvadrata $a = 1$. Tada je $O_0 = 4, P_0 = 1$.

Prva iteracija.

Stranica uklonjenog kvadrata iznosi $a_1 = \frac{1}{3}$, a površina uklonjenog kvadrata $\frac{1}{9}$.

Nakon prve je iteracije površina $P_1 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, a opseg $O_1 = O_0 + 4a_1 = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$.

Druga iteracija.

Stranica uklonjenog kvadrata iznosi $a_2 = \frac{1}{9}$, a površina uklonjenog kvadrata $\frac{1}{81}$.

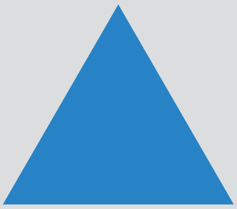
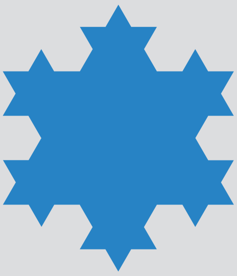
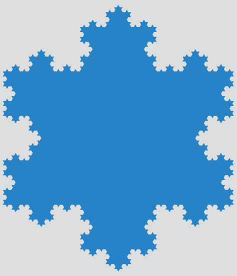
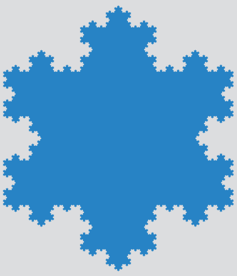
Nakon druge je iteracije površina $P_2 = P_1 - 8 \cdot \frac{1}{81} = \frac{8}{9} - \frac{8}{81} = \frac{64}{81}$, a opseg

$O_2 = O_1 + 8 \cdot 4 \cdot a_2 = \frac{16}{3} + 32 \cdot \frac{1}{9} = \frac{80}{9}.$

Možete li pretpostaviti?

U svakoj sljedećoj iteraciji opseg Kochove pahuljice povećavat će se i nakon beskonačno mnogo koraka bit će beskonačan. Površina Kockove pahuljice bit će konačna nakon beskonačno koraka. Opseg tepiha Sierpinskog također će biti beskonačan nakon beskonačno koraka, no njegova je površina konačna, točnije jednaka je nuli.

Napravite model.

Generiranje Kochove pahuljice		Opseg lika	Površina lika
Korak 0		$O_0 = 3$	$P_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$
Korak 1		$O_1 = 4$	$P_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$
Korak 2		$O_2 = \frac{48}{9}$	$P_2 = \frac{29\sqrt{3}}{54}$
Korak *n*		$O_n = ?$	$P_n = ?$
Beskonačan korak Kochove pahuljice		$\lim\limits_{n\to\infty} O_n = ?$	$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = ?$

Nakon 1, 2, 3, 4,...n, provedenih koraka dobivamo redom sljedeće podatke.

Broj stranica: 12, 48, 192, 768, ..., $3\cdot 4^n$. Duljine stranica: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, ..., \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Opseg: $\frac{12}{3}, \frac{16}{3}, \frac{64}{9}, \frac{256}{27}, ..., 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

Ukupna površina novih trokuta koji se pridodaju nakon n koraka

$$P_n = 3\cdot\frac{1}{9}P_0 + 12\cdot\frac{1}{81}P_0 + 48\cdot\frac{1}{243}P_0 + 192\cdot\frac{1}{729}P_0 + \ldots + 3\cdot 4^{n-1}\left(\frac{1}{9}\right)^n P_0$$
$$= P_0\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{16}{81} + \frac{64}{243} + \ldots + \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

Niz opsega O_n jest geometrijski niz kvocijenta $\frac{4}{3}$, što znači da nije konvergentan. Stoga, opseg Kochove pahuljice nema graničnu vrijednost. Pišemo $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \infty$.

Ukupnu površinu Kochove pahuljice, nakon beskonačno mnogo provedenih koraka, računat ćemo kao zbroj geometrijskog reda

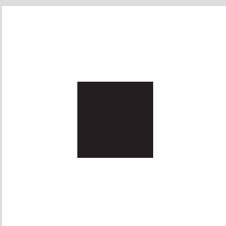
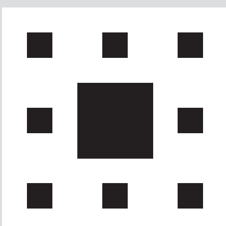
$$\frac{1}{3}P_0 + \frac{4}{27}P_0 + \frac{16}{81}P_0 + \frac{64}{243}P_0 + \ldots + \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n P_0 + \ldots$$

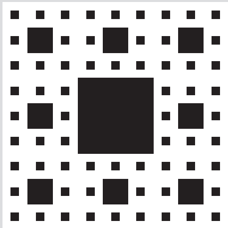
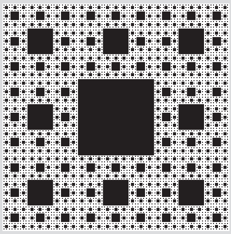
i tome dodati površinu početnog trokuta. Kako je kvocijent reda $\frac{4}{9} < 1$, to red konvergira i njegov zbroj iznosi

$$P = \frac{\frac{1}{3}P_0}{1-\frac{4}{9}} = \frac{3}{5}P_0.$$

Ako tome pridodamo i površinu početnog trokuta, ukupna površina Kochove pahuljice je

$$\frac{8}{5}P_0 = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Generiranje tepiha Sierpinskog		Opseg lika	Površina lika
Korak 0		$O_0 = 4$	$P_0 = 1$
Korak 1		$O_1 = \frac{16}{3}$	$P_1 = \frac{8}{9}$
Korak 2		$O_2 = \frac{80}{9}$	$P_2 = \frac{64}{81}$

Korak 3		$O_3 = \frac{496}{27}$	$P_3 = \frac{512}{729}$
Korak *n*		$O_n = ?$	$P_n = ?$
Beskonačan korak tepiha Sierpinskog		$\lim\limits_{x\to\infty} O_n = ?$	$\lim\limits_{x\to\infty} P_n = ?$

Opseg tepiha Sierpinskog:

0. iteracija $O_0 = 4$

1. iteracija $O_1 = 4 + 4\cdot\frac{1}{3}$

2. iteracija $O_2 = 4 + 4\cdot\frac{1}{3} + 8\cdot 4\cdot\frac{1}{9}$

3. iteracija $O_3 = 4 + 4\cdot\frac{1}{3} + 8\cdot 4\cdot\frac{1}{9} + 64\cdot 4\cdot\frac{1}{27}$

n-ta iteracija $O_n = 4 + 4\cdot\frac{1}{3} + 8\cdot 4\cdot\frac{1}{9} + 8^2\cdot 4\cdot\frac{1}{27} + \cdots + 8^{n-1}\cdot 4\cdot\frac{1}{3^n} = 4 + \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8}{3}\right)^{k-1}$

Beskonačan korak:

$$O = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty}\left(4 + \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{3}\right)^{n-1}\right) = \infty\,.$$

Površina tepiha Sierpinskog ako je stranica početnog kvadrata 1.

0. iteracija $P_0 = 1^2$

1. iteracija $P_1 = 1^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$

2. iteracija $P_2 = 1^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{9}\right)^2$

3. iteracija $P_3 = 1^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{9}\right)^2 - 64\left(\frac{1}{27}\right)^2$

n-ta iteracija

$$P_n = a^2\left[1-\left(\frac{1}{9}+\frac{8}{81}+\frac{64}{729}+\frac{512}{6561}+\ldots\right)\right]$$

$$= a^2\left[1-\left(\frac{8^0}{9^1}+\frac{8^1}{9^2}+\frac{8^2}{9^3}+\ldots+\frac{8^n}{9^{n+1}}\right)\right]$$

$$= a^2\left[1-\frac{1}{9}\left(\left(\frac{8}{9}\right)^0+\left(\frac{8}{9}\right)^1+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\ldots+\left(\frac{8}{9}\right)^n\right)\right]$$

Beskonačan korak:

$$P=\lim_{n\to\infty} P_n = a^2\left[1-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{1-\frac{8}{9}}\right)\right] = a^2\left(1-\frac{1}{9}\cdot 9\right) = a^2\cdot 0 = 0$$

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Ako je duljina stranice kvadrata x, a duljina stranice trokuta a, tada iz sličnosti zadanog trokuta i jednog od trokuta nastalih upisivanjem kvadrata slijedi:

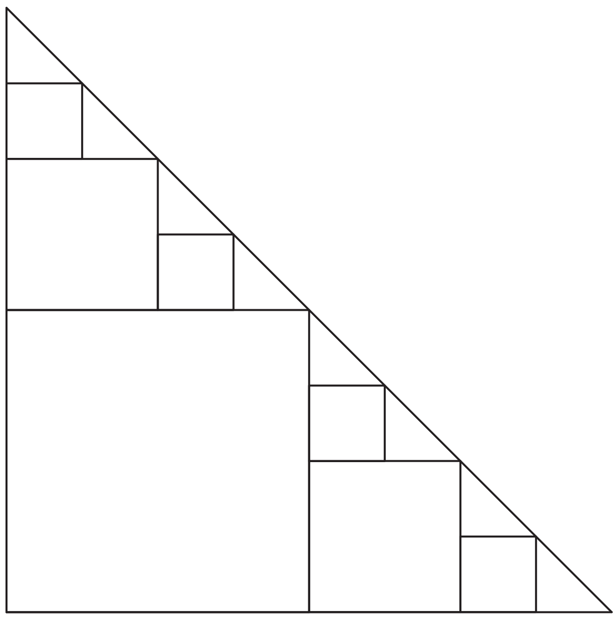
$$\frac{x}{a}=\frac{a-x}{a}\Rightarrow x=\frac{a}{2}.$$

$P_1=\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$ jedan kvadrat

$P_2=2\left(\frac{a}{4}\right)^2=\frac{a^2}{8}$ dva nastala kvadrata

$P_3=4\left(\frac{a}{8}\right)^2=\frac{a^2}{16}$ četiri nastala kvadrata

$P_4=8\left(\frac{a}{16}\right)^2=\frac{a^2}{32}$ osam nastalih kvadrata



Površina svih nastalih kvadrata:

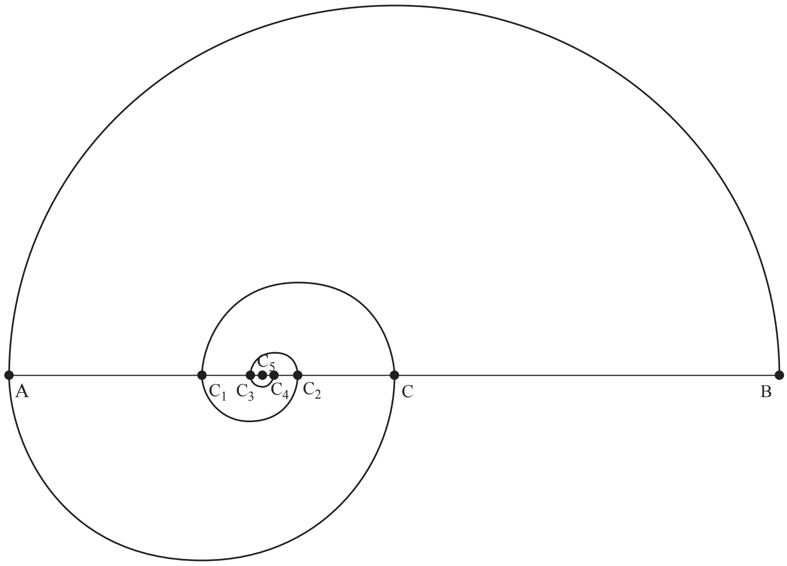
$$P=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{8}+\frac{a^2}{16}+\frac{a^2}{32}+\ldots=\frac{\frac{a^2}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{a^2}{2}.$$

Zadatak 2.

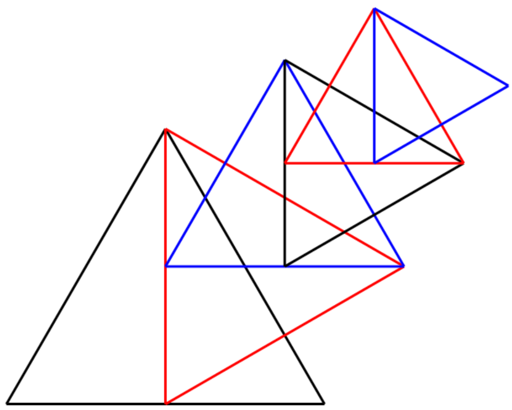
$$l_1 = r_1\pi = \frac{a}{2}\pi$$
$$l_2 = r_2\pi = \frac{a}{4}\pi$$
$$l_3 = r_3\pi = \frac{a}{8}\pi \quad \ldots$$

Duljina krivulje:

$$l_1 + l_2 + l_3 + \ldots = \frac{l_1}{1-q} = \frac{\frac{a}{2}\pi}{1-\frac{1}{2}} = a\pi \; .$$



Zadatak 3.



$$P_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$a_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \; P_2 = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$$

$$a_2 = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}, \; P_3 = \frac{\left(\frac{3a}{4}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{64}$$

Zbroj površina svih trokuta: $P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{3}{4}} = a^2\sqrt{3}$.

Napomena.

Ovaj zadatak, a i svi zadaci u kojima se prema nekom pravilu formira beskonačan niz **sličnih** geometrijskih likova ili tijela, može se riješiti jednostavnije koristeći koeficijent sličnosti tih likova ili tijela. Pri tome koristimo svojstvo da se opsezi sličnih likova odnose kao i stranice s istim koeficijentom k, površine sličnih likova odnose se kao k^2, a volumeni sličnih geometrijskih tijela kao k^3.

Primjerice, u ovom zadatku svi su konstruirani trokuti slični jer imaju sve kutove $60°$ (poučak KK) . Ako promatramo prva dva trokuta ili bilo koja dva uzastopna trokuta u nizu, koeficijent sličnosti jednak je omjeru njihovih stranica: $k = \frac{v_a}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tada je omjer njihovih površina $k^2 = \frac{3}{4}$. Prema tome zbroj svih površina geometrijski je red s kvocijentom $\frac{3}{4}$, a zbroj iznosi $P = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{3}{4}} = a^2\sqrt{3}$.

4.3. Složi funkciju

U ovoj će aktivnosti učenici:

- primijeniti značenje koeficijenata u pravilu pridruživanja linearne, racionalne i eksponencijalne funkcije pri odabiru klase funkcija
- rabiti svojstva funkcija pri izradi matematičkog modela
- računati kompoziciju funkcija
- kreirati funkciju koristeći podatke iz svakodnevnog konteksta
- predstaviti svoj rad.

Oblik rada: u četveročlanim skupinama

Trajanje aktivnosti: 90 minuta

U čemu je problem?

Učenici rade u četveročlanim skupinama. Svaka skupina sama odabire koji će zadatak rješavati ili to određuje nastavnik. Očekujemo da će učenici napraviti kompoziciju linearne funkcije s eksponencijalnom ili / i racionalnom i smjestiti je u realni kontekst pažljivim odabirom koeficijenata. Učenike treba potaknuti da koriste tehnologiju i da provjere zadovoljava li njihov model početne uvjete te jesu li odabrani brojevi realni za dani problem. Neke su od funkcija koje bismo željeli dobiti od učenika oblika:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d},\ y=N_o\cdot e^{kx+l},\ y=\frac{M}{l+e^{mx}}.$$

Učenici bi nakon predstavljanja svog modela, u okviru predstavljanja, trebali izvijestiti o tome kako su podijelili uloge, kako su radili članovi skupine, na koje su poteškoće naišli te kako su ih riješili.

4.4. Skijanje na vodi

U ovoj će aktivnosti učenici:

- modelirati situaciju realnog konteksta derivabilnom funkcijom
- rješavati probleme iz fizike
- povezati vektor brzine i tangentu na krivulju.

Oblik rada: rad u skupini

Možete li pretpostaviti?

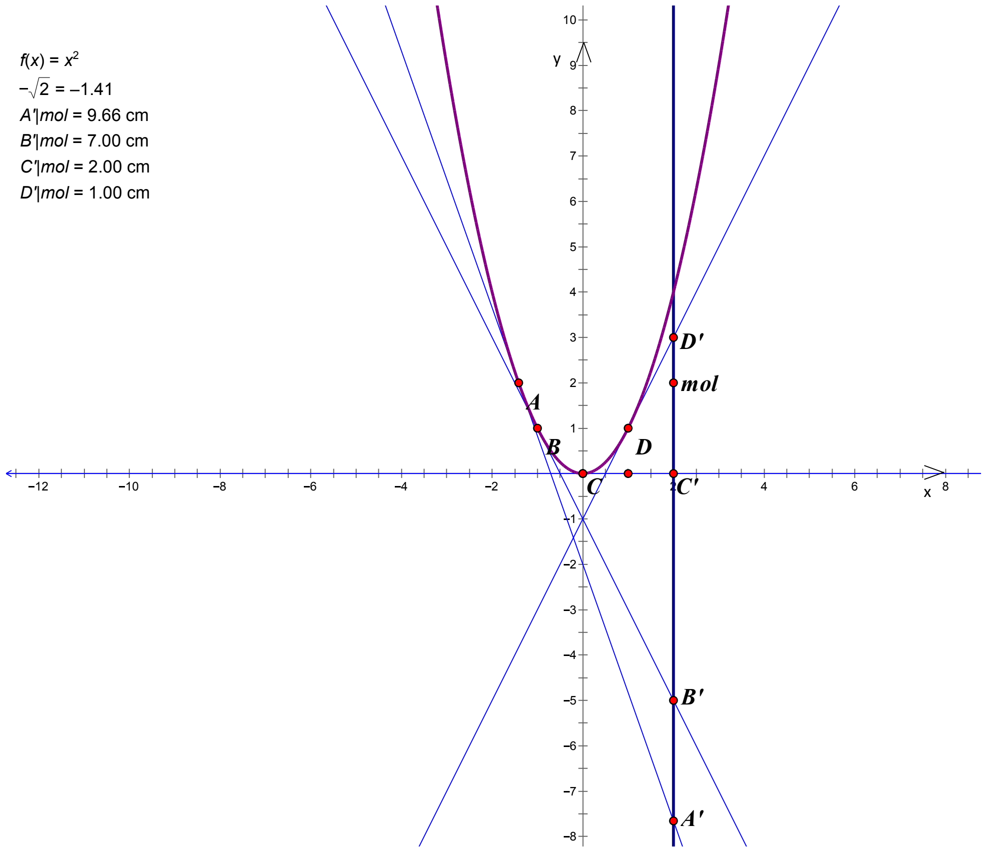
Budući da su sve točke koje Bruno razmatra „ispod" mola, očito je lošije pustiti uže za vrijeme dok je funkcija koja odgovara putanji padajuća, nego dok je rastuća (nastavak putanje Brunu će odvesti još niže jer će i tangenta biti zadana padajućom funkcijom). Kako je C točka ekstrema, u njoj će tangenta biti horizontalna i završiti „ispod" mola, dok će u točki D biti graf rastuće funkcije te će završiti „iznad" mola. Teško je sigurno procijeniti koja će točka na obali na kraju biti bliže molu, ali pretpostavljamo da će odgovarati puštanju užeta u točki D.

Napravite model.

Kao što je rečeno u opisu modela, jednadžba parabole je $y = x^2$, a mol ima koordinate (2,2). Iz slike i činjenice da su im ordinate cjelobrojne, zaključujemo da su točke koje Bruno razmatra $A\left(-\sqrt{2},2\right)$, B (– 1,1), C (0,0) i D (1,1). Sada možemo preciznije povući tangente i vidjeti da je najpovoljnija točka upravo D.

Potražite pomoć tehnologije.

U programu dinamične geometrije dobivamo sljedeću sliku iz koje se precizno vidi udaljenost svih presjecišta s obalom od mola, kao i to da je D' dvostruko bliža molu nego C'.



Kako bi to riješila teorija?

Neka je $T\left(t,t^2\right)$ proizvoljna točka na paraboli. Koeficijent smjera tangente na parabolu u točki T je $2t$, pa je njezina jednadžba $y-t^2=2t\left(x-t\right)$, odnosno nakon sređivanja $y=2tx-t^2$. Presjek s obalom dobivamo tako da uvrstimo x = 2, odakle je $y=4t-t^2$. Dakle, udaljenost od mola je $\left|2-\left(4t-t^2\right)\right|=\left|t^2-4t+2\right|$. Sada možemo ne samo izračunati egzaktne vrijednosti za 4 razmatrane točke, nego i rješavanjem kvadratne jednadžbe možemo dobiti egzaktno točku u kojoj Bruno mora pustiti uže da bi stigao točno na mol: $t_{1,2}=2\pm\sqrt{2}$. Očito da samo rješenje t_2 ima smisla (t_1 je „iza“ obale), dakle optimalna je točka za puštanje užeta $\left(t_2,{t_2}^2\right)=\left(2-\sqrt{2},6-4\sqrt{2}\right)$.

4.5. Kako računa kalkulator ili kako računati bez kalkulatora

U ovoj će aktivnosti učenici:

- interpretirati pravac koji se „najbolje“ prislanja uz graf funkcije f kao tangentu
- odrediti tangentu na graf zadane funkcije
- računati derivacije zadane funkcije i polinoma
- postavljati sustave jednadžbi iz uvjeta jednakosti derivacija u točki
- rješavati sustave jednadžbi
- generalizirati polinome koji dobro aproksimiraju zadanu funkciju
- otkriti Taylorove polinome za funkciju f
- vrednovati svoj rad.

Oblik rada: gostionica

U čemu je problem?

Nastavnik može učenicima pokazati logaritamske tablice i šiber.

Kako to izgleda?

Učenike je moguće podijeliti u heterogene ili homogene skupine po sposobnostima. Ako dijelimo učenike u homogene skupine trebamo paziti na složenost zadataka. Najjednostavniji je primjer e., dok je, s obzirom na deriviranje, najsloženiji primjer d. Primjer a. neće se jednostavno moći generalizirati, dok su u primjerima b. i c. neparni, odnosno parni koeficijenti jednaki 0 što može stvarati poteškoće pri generalizaciji za taj primjer.

Učenici će u svim skupinama zaključiti da bez kalkulatora mogu odrediti koliko je $f(0)$, ali da ne mogu odrediti koliko je $f(0.1)$.

Napravite model.

- U svim će skupinama biti $t = 0$ pa će graf polinoma sadržavati točku $(0, f(0))$. „Najbolje“ se uz graf funkcije f u točki $(0, f(0))$ prislanja tangenta. Koeficijent smjera tangente učenici će dobiti deriviranjem. Rješenja su:

  a. $P_1(x)=x$ b. $P_1(x)=x$ c. $P_1(x)=1$

  d. $P_1(x)=1+\frac{x}{2}$ e. $P_1(x)=1+x$

- Učenici će postaviti uvjete: $f(0)=P_2(0)$, $f'(0)=P_2'(0)$, $f''(0)=P_2''(0)$

  a. $P_2(x)=x-\frac{x^2}{2}$ b. $P_2(x)=x$ c. $P_2(x)=1-\frac{x^2}{2}$

  d. $P_2(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ e. $P_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2}$

- Dalje rade na isti način. Zaključuju da se koeficijenti koje su već izračunali ne mijenjaju, za polinom višeg stupnja samo se dodaje novi član.

  a. $P_4(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$ b. $P_4(x)=x-\frac{x^3}{6}$ c. $P_4(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

  d. $P_4(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}$ e. $P_4(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$

Možete li pretpostaviti?

Učenici će na osnovu primjera pretpostaviti:

a. $P_{10}(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots-\frac{x^9}{9}+\frac{x^{10}}{10}$

b. $P_{10}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}$

c. $P_{10}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}$

d. $P_{10}(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^2\cdot 2!}+\frac{3x^3}{2^3 3!}-\frac{3\cdot 5x^4}{2^4\cdot 4!}+\frac{3\cdot 5\cdot 7x^5}{2^5\cdot 5!}-\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9x^6}{2^6\cdot 6!}+\ldots-\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 17x^{10}}{2^{10}\cdot 10!}$

e. $P_{10}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{10}}{10!}$

Dobiveni niz brojeva $P_1(0.1),\ldots, P_{10}(0.1)$ sve se više približava broju $f(0.1)$.

Potražite pomoć tehnologije.

Crtajući grafove učenici će primijetiti da dobiveni polinomi sve bolje aproksimiraju zadanu funkciju za brojeve x koji su blizu 0 pa vrijednosti zadane funkcije možemo aproksimirati vrijednostima polinoma. Vrijednosti polinoma možemo računati pomoću osnovnih računskih operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja.

Možemo li više?

U ovom dijelu aktivnosti učenici idu u goste. Na osnovu svih primjera mogu pretpostaviti da je za proizvoljnu funkciju f polinom $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$. Nastavnik će im reći da se dobiveni polinomi nazivaju Taylorovi polinomi. Ako bismo ovaj postupak nastavili u beskonačnost, dobili bismo razvoj funkcije u Taylorov red.

4.6. Staza u naselju

U ovoj će aktivnosti učenici:

- crtati pravac i kružni luk
- crtati grafove kvadratne funkcije pomoću tehnologije
- odrediti kvadratnu funkciju iz zadanih uvjeta
- povezati pojmove glatka staza, tangenta i derivacija
- analizirati uvjete pod kojim se grafovi funkcija glatko nadovezuju jedna na drugu
- kreirati funkciju koja zadovoljava zadane uvjete
- vrednovati svoj rad.

Kako to izgleda?

Prijedlog 1: ne spaja se glatko s južnim zidom

Prijedlog 2: staza nije glatka

Prijedlog 3: stablo nije sačuvano.

Učenici će promatrajući slike moći vizualno odrediti koje su staze glatke, a koje nisu.

Možete li pretpostaviti?

Staza ne može biti ravna što učenici mogu provjeriti crtanjem (nije glatko u točki B). Staza ne može biti ni kružni luk što će možda neki učenici pretpostaviti, a provjerit će u idućoj aktivnosti. Ako se staza glatko spaja s južnim zidom istočne zgrade u točki B, tangenta na stazu u točki B mora biti u pravcu južnog zida.

Napravite model.

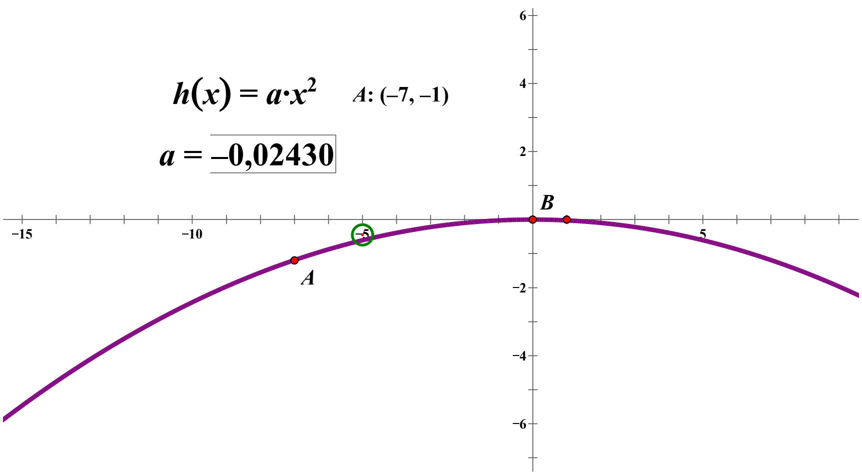
Tangenta na stazu u točki B mora biti u pravcu južnog zida, dakle središte kružnice mora biti na pravcu koji sadrži točku B i okomit je na južni zid. Točke A i B su na kružnici, središte kružnice je na simetrali dužine $\overline{AB}$. Odredimo središte kao sjecište tih dvaju pravaca i nacrtamo kružni luk. Vidi se da stablo nije sačuvano.

Potražite pomoć tehnologije.

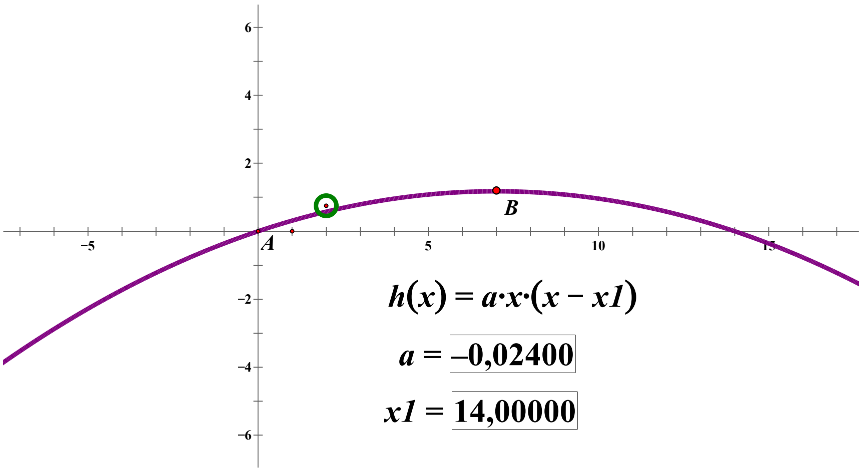
Funkcija ne može biti linearna. Kvadratna funkcija mogla bi biti rješenje. Graf će se glatko spajati s južnim zidom ako je tjeme parabole u točki B.

Koordinatni sustav se može odabrati na različite načine i treba učenicima dozvoliti da ga biraju te na kraju diskutirati o prednostima i nedostacima pojedinih odabira. Najvjerojatniji odabiri su s ishodištem u točki A ili B. Treba odabrati i mjerilo te odlučiti kako će se skica prikazati u tom koordinatnom sustavu, odnosno kako će se uskladiti mjerila. Jedan od načina je da se odrede koordinate točaka A, B i središta stabla u odabranome koordinatnom sustavu te da se crtaju samo te točke. Ovisno o odabranom koordinatnom sustavu učenici mogu birati prikladni oblik kvadratne funkcije o čemu će ovisiti broj parametara. Pri određivanju vrijednosti parametara učenici mogu nasumice mijenjati vrijednosti ili neke (ili sve) izračunati tako da zadovoljavaju zadane uvjete. Ponovno treba diskutirati o učinkovitosti odabranih metoda.

Moguće rješenje za ishodište u točki B:



Moguće rješenje za ishodište u točki A:



U oba slučaja zaključujemo da staza ne zadovoljava uvjete jer ne zaobilazi stablo.

Tražimo funkciju u obliku $f(x)=ax^2+bx+c$. Točke A i B pripadaju grafu pa se za ishodište u točki A dobiva:

$$A(0,0)\Rightarrow 0=c$$

$$B(7,1.2)\Rightarrow 1.2=49a+7b+c$$

Točka B tjeme je grafa funkcije pa vrijedi:

$$7=-\frac{b}{2a}.$$

Rješavanjem ovog sustava dobiva se $f(x)=-\frac{12}{490}x^2+\frac{12}{32}x$.

Za ishodište u točki B dobiva se $f(x)=-\frac{12}{490}x^2$.

Crtanjem će se učenici uvjeriti da stablo nije očuvano.

Kako bi to riješila teorija?

Staze se glatko nadovezuju na drugoj slici. Tangente u točki C podudaraju se. Vrijedi:

$$y_1=f(x_1)=g(x_1) \quad \text{i} \quad f'(x_1)=g'(x_1)$$

Tražimo funkcije u obliku:

$$f(x)=ax^2+bx+c,\ f'(x)=2ax+b$$

$$g(x)=dx^2+ex+f,\ g'(x)=2dx+e.$$

Zajednička točka ima koordinate (x_1,y_1). Jednadžbe su (za ishodište u točki A):

$1.2 = 49d + 7e + f$
$y_1 = dx_1^{\ 2} + ex_1 + f$
$7 = -\frac{e}{2d}$
$0 = c$
$ax_1^{\ 2} + bx_1 + c = y_1$
$2dx_1 + e = 2ax_1 + b.$

Ima beskonačno mnogo rješenja. Točka u kojoj se grafovi nadovezuju može se odabrati proizvoljno tako da graf ne siječe kružnicu. Učenici će uvrstiti vrijednosti za (x_1, y_1). Sustav mogu rješavati pisano ili uz pomoć tehnologije.

Možemo li više?

Funkcije koje dolaze u obzir moraju imati horizontalnu tangentu u točki B, odnosno ekstrem ili točku infleksije u B. Stoga, tražena funkcija ne može biti: linearna, funkcija apsolutne vrijednosti, logaritamska, eksponencijalna. Može biti trigonometrijska.

4.7. Problem površine

Što ćemo raditi?

U ovoj ćemo aktivnosti pokušati učenicima predočiti problem računanja površine, odnosno određenog integrala i upoznati ih s nekim numeričkim metodama. Cilj aktivnosti je da učenici primjene trapeznu formulu za računanje određenog integrala, odnosno površine ispod grafa neke funkcije. Aktivnost se, izuzev nekih dijelova ili uz prilagodbu, može provesti s učenicima i prije nego su usvojili pojam određenog integrala, a može se provesti i kao uvod u integralni račun.

U ovoj će aktivnosti učenici:

- procijeniti iznos površine bazena nepravilnog oblika
- odrediti aproksimaciju površine bazena nepravilnog oblika koristeći različite metode
- modelirati krivulje, koje opisuju rub bazena koristeći tehnologiju
- dokazati trapeznu formulu
- primijeniti trapeznu formulu u računanju određenog integrala
- usporediti rezultate računanja površine dobivene različitim metodama
- odrediti preciznost dobivenih rezultata.

Trajanje aktivnosti: dva školska sata.

Oblik rada: rad u skupinama.

Potrebno: nastavni listić, grafički kalkulator i/ili računalo.

Kako to izgleda?

Na početku ćemo nekoliko minuta, zajedno s učenicima, prokomentirati zadatak, podijeliti učenike u skupine i podijeliti zaduženja. Rad u skupinama možete organizirati tako da jedna (ili više njih) skupina računa površinu bazena predloženom metodom, druga skupina (ili više njih) koristeći grafički kalkulator ili računalo, a treća možda nekom svojom metodom.

Druga je varijanta da se u okviru svake skupine podijele zaduženja i provedu obje ponuđene metode.

Možete li pretpostaviti?

Nakon podjele u skupine svaka skupina neka na temelju zadanih podataka donese zajedničku procjenu površine bazena bez imalo računanja. Ograničite im vrijeme procjene na, primjerice, 30-ak sekundi i u tom roku neka vam donesu na papiru zapisanu procjenu s točnošću na dvije decimale. Bit će zanimljivo usporediti rezultate.

Napravite model.

U ovom dijelu aktivnosti sugeriramo učenicima koju će metodu koristiti za računanje površine bazena jer nam je cilj da učenici dođu do trapezne formule. Učenici bi trebali prepoznati da nacrtane točke na rubu bazena po dijelovima određuju trapeze koji dosta dobro aproksimiraju površinu na tom intervalu. Svi su trapezi različiti, ali imaju istu visinu koja je jednaka 1 m jer je Ante svoja mjerenja radio na svaki metar duljine bazena. Početni i završni lik jest trokut ili možemo reći trapez kojemu je kraća osnovica duljine 0. Tada je ukupna je površina svih trapeza jednaka:

$$P=\frac{0+2.71}{2}\cdot 1+\frac{2.71+3.79}{2}\cdot 1+\frac{3.79+3.64}{2}\cdot 1+\frac{3.64+3.15}{2}\cdot 1+\frac{3.15+3.23}{2}\cdot 1+$$
$$+\frac{3.23+3.53}{2}\cdot 1+\frac{3.53+3.04}{2}\cdot 1+\frac{3.04+0}{2}\cdot 1$$
$$P=\frac{1}{2}\left(0+2\cdot 2.71+2\cdot 3.79+2\cdot 3.64+2\cdot 3.15+2\cdot 3.23+2\cdot 3.53+2\cdot 3.04+0\right)=23.09$$

Približna površina bazena je 23.09 m^2.

Potražite pomoć tehnologije.

Ako učenici imaju iskustva u radu s grafičkim kalkulatorom, onda će relativno brzo, uz osnovne upute, doći do funkcijskog modela za rub bazena.

Ako nemaju iskustvo, upute su sljedeće:

Pritisnite STAT → EDIT → 1: → ENTER

U listu L1 treba upisati x koordinate točaka $A, B, C, D, E, F, G, H, I$, odnosno brojeve 0,1,2,3,4,5,6,7,8.

U L2 treba upisati y koordinate točaka $A, B, C, D, E, F, G, H, I$, odnosno brojeve 2.43, 0.96, 0.97, 1.27, 1.35, 1.14, 0.89, 1.13, 2.43.

U L3 treba upisati y koordinate točaka $A, P, O, N, M, L, K, J, I$, odnosno brojeve 2.43, 3.67, 4.78, 4.91, 4.50, 4.37, 4.42, 4.17, 2.43.

Uključite STAT PLOT1 za L1 i L2, te STAT PLOT2 za L1 i L3 i ZoomStat kako biste ucrtali upisane podatke.

Izbor regresije kojom ćete pokušati *pokriti* rub bazena prepustite za početak učenicima za samostalno istraživanje. Ako ne uspijevaju sami, sugerirajte im sljedeće:

Funkcija donjeg ruba:

STAT → CALC → 7:QuartReg →

Xlist: L1

Ylist: L2

Store RegEQ: Y1 (VARS → Y-VARS → 1:Y1)

ENTER

Jednako se napravi i za funkciju gornjeg ruba samo kod Y liste umjesto L2 treba upisati L3, a kod Store RegEQ umjesto Y1 upišite Y2.

U Y= meniju pojavit će se funkcije donjeg i gornjeg ruba:

Funkcija donjeg ruba je (Y1) $g(x)=0.01448x^4-0.23075x^3+1.21498x^2-2.35602x+2.40044$, a gornjeg ruba je (Y2) $f(x)=-0.0097x^4+0.16024x^3-0.97374x^2+2.52502x+2.31313$.

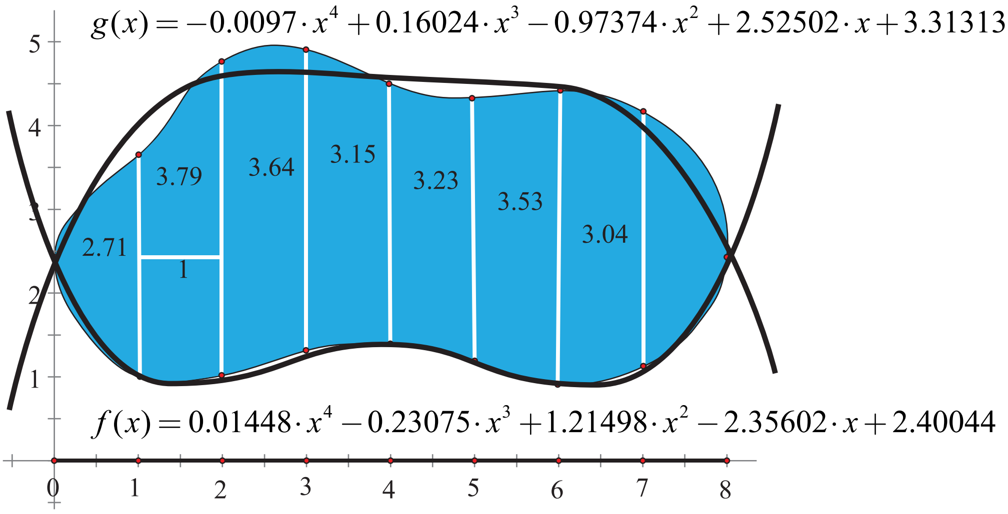
Preciznost koeficijenata mora biti najmanje na 5 decimala da bismo dobili dobru aproksimaciju.

Nacrtajte dobivene podatke. (GRAPH)

Ako želimo pomoću kalkulatora izračunati površinu omeđenu dvjema funkcijama, otvorite meni CALC (2ND → TRACE), zatim odaberite 7: $\int f(x)dx$, donju granicu 0 i gornju 8 → ENTER

Sve to još jednom napravite, ali odabirom druge funkcije (pomicanjem strelica gore - dolje).

Površina ispod grafa funkcije g je 9.77559 m², a ispod grafa funkcije f 33.63656 m². Njihova je razlika približna površina bazena: 23.86 m².



Kako bi to riješila teorija?

Nakon predstavljanja rezultata i metoda kojim su do njih došli može se postaviti i pitanje preciznosti ili pogreške koja se javlja pri ovakvom računanju. Što mislite kako je kalkulator računao površinu? Možete li povezati ove dvije metode koje ste koristili? Svakako treba primijetiti da smo i u prvoj metodi (pomoću trapeza) zapravo računali razliku površine ispod gornjeg ruba i površine ispod donjeg ruba bazena. Nakon toga učenici su spremni za samostalan rad i dokaz trapezne formule uz priloženu skicu i upute.

$$
\begin{aligned}
P &\approx \frac{f(a)+f(x_1)}{2}\cdot\Delta x+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot\Delta x+\frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}\cdot\Delta x+\cdots+\frac{f(x_{n-1})+f(b)}{2}\cdot\Delta x\\
&=\frac{\Delta x}{2}\left[f(a)+2\left(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\right)+f(b)\right]\\
&=\frac{\Delta x}{2}\left(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n\right)
\end{aligned}
$$

Možemo li više?

Ako ostane vremena na kraju učenici mogu istražiti neke druge numeričke metode kao što je Simpsonova formula.

Kod trapezne formule funkciju smo po intervalima aproksimirali nizom linearnih funkcija, a kod Simpsonove formule aproksimacija se provodi kvadratnom funkcijom, a dani interval dijelimo na parni broj pod intervala. Uz iste oznake, kao i za trapeznu formulu, vrijedi

Simpsonova formula

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)+\cdots+f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\}$$

$$=\frac{\Delta x}{3}\{f(a)+f(b)+2[f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{2n-2})]+4[f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{2n-1})]\}$$

$$=\frac{\Delta x}{3}\{y_0+2[y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2}]+4[y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1}]+y_n\}$$

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Rješenje. $\Delta x=\frac{2-1}{10}=0.1$. Interval $[1,2]$ podijelimo na 10 podintervala točkama $x_0=1, x_1=1.1, x_2=1.2, x_3=1.3, x_4=1.4,\cdots, x_9=1.9, x_{10}=2$. Tada je

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{0.1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{2}{1.1}+\frac{2}{1.2}+\frac{2}{1.3}+\frac{2}{1.4}+\frac{2}{1.5}+\frac{2}{1.6}+\frac{2}{1.7}+\frac{2}{1.8}+\frac{2}{1.9}+\frac{1}{2}\right)\approx 0.693771$$

Računamo li direktno određeni integral:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2 \approx 0.693147,$$

iznosi se podudaraju u prvim trima decimalama. Ako želimo veću preciznost, moramo povećati broj podintervala.

Zadatak 2.

Računamo $\int_0^1 e^{x^2}dx$. Prvo ćemo podijeliti interval $[0,1]$ na 10 podintervala i izračunati vrijednost funkcije e^{x^2} u djelišnim točkama.

x	e^{x^2}
0	1.0
0.1	1.01005
0.2	1.04081
0.3	1.09417
0.4	1.17351
0.5	1.28403
0.6	1.43333
0.7	1.63232
0.8	1.89648
0.9	2.24791
1	2.71828

Koristeći trapeznu formulu traženi integral je:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx = \frac{0.1}{2}[1+2.71828+2\cdot(1.01005+1.04081+1.09417+$$
$$+1.17351+1.28403+1.43333+1.63232+1.89648+$$
$$+2.24791)=1.467175$$

Zadatak 3.

Ukupan broj ljudi koji prijeđe ulicu tijekom dana možemo predvidjeti računajući određeni integral $\int_6^{24} v(x)dx$ gdje je $v\,(x)$ brzina protoka ljudi koji pređu ulicu u sat vremena.

Računat ćemo pomoću trapezne formule:

$$\int_6^{24} v(x)dx \approx \frac{3}{6}\left(150+2\cdot1320+2\cdot810+2\cdot760+2\cdot1540+2\cdot360+120\right)=9850 \text{ ljudi.}$$

5. Matrice i vektori

5.1. Linearna kombinacija vektora

U ovoj će aktivnosti učenici:

- povezati operacije s vektorima i prikaz vektora kao linearnu kombinaciju vektora
- prikazati jedan vektor kao linearnu kombinaciju dvaju vektora u specifičnim situacijama i procijeniti koja je jednostavnija
- povezati prikaz vektora koordinatama s prikazom linearnom kombinacijom jediničnim vektorima
- primijeniti rastav vektora u problemima.

Nastavna sredstva: *Linearna kombinacija vektora.gsp*

Kako to izgleda?

Učenici će tražene vektore ucrtati u koordinatni sustav.

Možete li pretpostaviti?

Očekujemo da će neki učenici uočiti vezu s prethodnim zadatkom.

Napravite model.

Rješenja:

1. a. $\vec{c}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$; b. $\vec{c}=\frac{7}{8}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$; c. $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{5}{4}\vec{b}$;
   d. $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; e. $\vec{c}=-\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}$; f. $\vec{c}=-\frac{1}{4}\vec{b}$.
2. a. $\vec{c}=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; b. $\vec{c}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; c. $\vec{c}=\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}$; d. $\vec{c}=-\frac{4}{3}\vec{b}$.

Učenici bi trebali zaključiti da je 2. zadatak lakši jer su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ pod pravim kutom.

Potražite pomoć tehnologije.

Oblik rada: individualni

U datoteci *Linearna kombinacija vektora.gsp* učenici mogu zadatke riješiti grafički i zapisati zaključke.

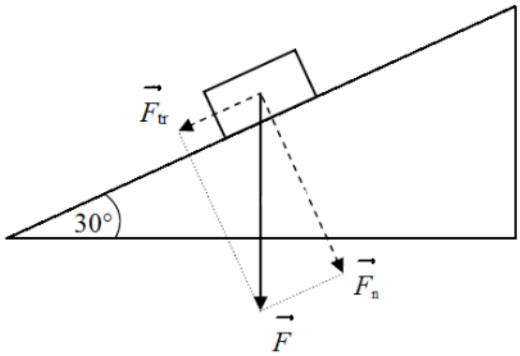
Kako bi to riješila teorija?

Oblik rada: rad u skupini

Učenici zadatke rješavaju algebarski.

Možemo li više?

Učenici će primijeniti rastav vektora na linearnu kombinaciju na zadatku iz fizike. Potrebno je odrediti komponentu vektora koja djeluje u smjeru kosine.



$\left|\vec{F}_{tr}\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot \sin 30° = 5 \cdot 9.81 \cdot 0.5 = 24.525$ N.

5.2. Vektori – domino lanac

U ovoj će aktivnosti učenici:

- odrediti suprotni vektor
- odrediti duljinu vektora u koordinatnom sustavu
- prikazati vektor kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$
- zbrajati i oduzimati vektore u koordinatnom sustavu
- provjeriti kolinearnost i okomitost vektora.

Oblik rada: suparnički u četveročlanim skupinama

Potreban materijal: domino pločice za svaku skupinu.

Potrebno je izrezati pločice po iscrtanim linijama. Svaka pločica ima dvije sličice i za svaku sličicu postoji točno jedna koja joj odgovara. Učenik koji ima odgovarajuću sličicu stavlja ju uz sličicu koja je već odložena.

Rješenje:

2, 8, 1, 23, 15, 17, 4, 22, 13, 7, 9, 18, 16, 21, 6, 10, 19, 26, 3, 5, 11, 28, 14, 27, 20, 24, 12, 25

5.3. Potencije matrice

Za odvijanje aktivnosti predviđena su dva školska sata. Pretpostavlja se da će učenici svoj račun i rezultate istraživanja zapisivati u bilježnicu. Poželjna je upotreba kalkulatora koji omogućuje izvođenje operacije množenja matrica reda 2 × 2.

U ovoj će aktivnosti učenici:

- množiti matrice reda 2 × 2
- množiti matrice skalarom
- pronaći opći član niza na temelju poznatih prvih nekoliko članova niza
- dokazati tvrdnju matematičkom indukcijom.

Kako to izgleda?

P	R	S
$P^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$R^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	$S^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$
$P^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$	$R^3 = 4 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$	$S^3 = 4 \cdot \begin{pmatrix} 28 & 26 \\ 26 & 28 \end{pmatrix}$

Možete li pretpostaviti?

$$P^4 = P^3 \cdot P = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$R^4 = R^3 \cdot R = 4 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 17 & 15 \\ 15 & 17 \end{pmatrix}$$

$$S^4 = S^3 \cdot S = 4 \cdot \begin{pmatrix} 28 & 26 \\ 26 & 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 164 & 160 \\ 160 & 164 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 82 & 80 \\ 80 & 82 \end{pmatrix}$$

Napravite model.

$$P^4 = P^3 \cdot P = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$P^5 = P^4 \cdot P = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 2^5 \end{pmatrix}$$

$$P^{10} = P^5 \cdot P^5 = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 2^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 2^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix}$$

$$P^{20} = P^{10} \cdot P^{10} = \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{20} & 0 \\ 0 & 2^{20} \end{pmatrix}$$

$$P^{50} = P^{20} \cdot P^{20} \cdot P^{10} = \begin{pmatrix} 2^{20} & 0 \\ 0 & 2^{20} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{20} & 0 \\ 0 & 2^{20} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{40} & 0 \\ 0 & 2^{40} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{50} & 0 \\ 0 & 2^{50} \end{pmatrix}$$

Učenici će lako, na temelju prethodnih rezultata, pretpostaviti da općenito vrijedi da je n-ta potencija matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ kvadratna matrica 2 × 2 na čijoj su glavnoj dijagonali elementi 2^n, a na preostala dva mjesta nule i simbolički će zapisati $P^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Potražite pomoć tehnologije.

Učenici će dalje računati

$$R^5 = R^4 \cdot R = 8 \cdot \begin{pmatrix} 17 & 15 \\ 15 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 66 & 62 \\ 62 & 66 \end{pmatrix} = 16 \cdot \begin{pmatrix} 33 & 31 \\ 31 & 33 \end{pmatrix}, \ldots$$

te relativno lako pretpostaviti (ili će im nastavnik sugerirati da promatraju potencije broja 2 pri traženju pravila prema kojem se mijenjaju elementi matrice u ovisnosti o eksponentu) da je

$$R^n = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2^n + 1 & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 2^n + 1 \end{pmatrix}.$$

Učenici će dalje računati

$$S^5 = S^4 \cdot S = 2^3 \cdot \begin{pmatrix} 82 & 80 \\ 80 & 82 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 2^3 \cdot \begin{pmatrix} 488 & 484 \\ 484 & 488 \end{pmatrix} = 2^4 \cdot \begin{pmatrix} 244 & 242 \\ 242 & 244 \end{pmatrix}, \ldots$$

te relativno lako pretpostaviti (ili će im nastavnik sugerirati da promatraju potencije broja 3 pri traženju pravila prema kojem se mijenjaju elementi matrice u ovisnosti o eksponentu) da je

$$S^n = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}.$$

Možemo li više?

Očekuje se da će učenici usustaviti dosadašnje rezultate.

Neka je $T = \begin{pmatrix} k+1 & k-1 \\ k-1 & k+1 \end{pmatrix}$.

Ako je $k = 1$, tada je $T = P$ i vrijedi $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1^n + 1 & 1^n - 1 \\ 1^n - 1 & 1^n + 1 \end{pmatrix}$.

Ako je $k = 2$, tada je $T = R$ i vrijedi $T^n = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2^n + 1 & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 2^n + 1 \end{pmatrix}$.

Ako je $k = 3$, tada je $T = S$ i vrijedi $T^n = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$.

Očekuje se da će učenici moći generalizirati (ili će im pomoći nastavnik) da vrijedi $T^n = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} k^n + 1 & k^n - 1 \\ k^n - 1 & k^n + 1 \end{pmatrix}$.

Ispravnost svoje tvrdnje učenici će provjeriti za neke odabire $k, n \in N$ i $k \neq 1, 2, 3$.

Kako bi to riješila teorija?

Nastavnik će s učenicima koji žele znati više provesti dokaz koristeći princip matematičke indukcije.

Neka je $n = 1$. Tada je $T^1 = 2^{1-1} \cdot \begin{pmatrix} k^1 + 1 & k^1 - 1 \\ k^1 - 1 & k^1 + 1 \end{pmatrix} = T$, pa baza indukcije vrijedi.

Pretpostavimo da za neki $n \in N$ vrijedi $T^n = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} k^n + 1 & k^n - 1 \\ k^n - 1 & k^n + 1 \end{pmatrix}$. Želimo pokazati da je $T^{n+1} = 2^n \cdot \begin{pmatrix} k^{n+1} + 1 & k^{n+1} - 1 \\ k^{n+1} - 1 & k^{n+1} + 1 \end{pmatrix}$.

$$T^{n+1} = T^n \cdot T = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} k^n + 1 & k^n - 1 \\ k^n - 1 & k^n + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k+1 & k-1 \\ k-1 & k+1 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \cdot k^{n+1} + 2 & 2 \cdot k^{n+1} - 2 \\ 2 \cdot k^{n+1} - 2 & 2 \cdot k^{n+1} + 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 2^n \cdot \begin{pmatrix} k^{n+1} + 1 & k^{n+1} - 1 \\ k^{n+1} - 1 & k^{n+1} + 1 \end{pmatrix}$$

5.4. Sustavi linearnih jednadžbi

U ovoj će aktivnosti učenici:

- zapisati sustav u matričnom obliku
- primijeniti matrice i operacije s matricama pri rješavanju sustava jednadžbi
- računati inverz matrice pomoću tehnologije
- izvesti formulu za inverz matrice reda 2×2
- argumentirati prednosti i nedostatke naučene metode rješavanja sustava jednadžbi
- vrednovati svoj rad.

Ova je aktivnost predviđena za dva školska sata.

Kako to izgleda?

Oblik rada: individualni

Neka je x cijena jedne lizalice, a y cijena jedne čokoladice. Tada se dobiva sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} 6x + 8y = 36 \\ 5x + 7y = 31 \end{cases},$$

čija su rješenja $x = 2$ i $y = 3$.

Možete li pretpostaviti?

Učenici mogu predložiti metodu suprotnih koeficijenata, supstitucije i komparacije.

Napravite model.

U matričnom obliku sustav ima oblik:

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 31 \end{bmatrix}.$$

Potražite pomoć tehnologije.

Oblik rada: individualni

Nastavna pomagala: grafički kalkulator za svakog učenika

Iz $AX = B$ bi učenici mogli izraziti $X = A^{-1}B$ i izračunati na grafičkom kalkulatoru. Kao rezultat dobiva se matrica $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Kako bi to riješila teorija?

a. Množenjem matrica dobivamo da su one zaista međusobno inverzne.

b. Dobiva se matrica $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

c. Na temelju b. zaključujemo da je inverz matrice A jednak

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, ad - bc \neq 0 .$$

Izraz $ad - bc$ je zapravo determinanta matrice A.

Možemo li više?

Učenike se može uputiti na istraživanje mogu li se koristiti proračunske tablice za operacije s matricama.

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Rješenje: Cijena mliječne čokolade po kilogramu je 1.2 €, cijena bijele čokolade je 1.5 €, a cijena tamne čokolade je 1 € po kilogramu. Tada će ih nova vrsta pralina koštati 11.8 € po kilogramu.

Zadatak 2.

Rješenje: Zaposlili su 45 čistača, 55 računalnih tehničara i 50 programera.

Zadatak 3.

Rješenje:

a. $a = 50\ 000$, $b = 100\ 000$ i $c = 240\ 000$

b. Da.

c. Godine 2020. zaradit će 617 143 €.

5.5. Preslikavanja ravnine i matrice

U ovoj će aktivnosti učenici:

- crtati osno i centralno simetrične točke te odrediti njihove koordinate
- množiti matrice
- povezati kompoziciju preslikavanja i umnožak matrica
- istražiti i opisati preslikavanje zadano matricom
- generalizirati oblik matrice za pojedine vrste preslikavanja (osna i centralna simetrija, homotetija, dilatacija u smjeru osi ordinate i u smjeru osi apscisa, zakošenje, rotacija)
- primijeniti trigonometrijske funkcije u određivanju matrice rotacije
- dokazati da je kompozicija dviju rotacija s istim centrom rotacija
- otkriti os simetrije preslikavanja zadanog matricom
- otkriti da je kompozicija dviju osnih simetrija rotacija
- vrednovati svoj rad.

Kako to izgleda?

Oblik rada: rad u skupini; gostiona. Učenici najprije rade u tri ekspertne skupine. Zatim idu u goste i rješavaju zajedničke zadatke.

Rješenja:

Prva skupina: Matrica osne simetrije s obzirom na os apscisa je $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

Druga skupina: Matrica osne simetrije s obzirom na os ordinata je $B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Treća skupina: Matrica centralne simetrije s obzirom na ishodište je $C=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

Idemo u goste.

U gostima će učenici na osnovu rezultata u ekspertnim grupama popuniti tablicu:

početne točke	preslikavanje opisno	preslikavanje matrica	preslikane točke
$A_1, \ldots, F_1$	osna simetrija s obzirom na os apscisa	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$A_2, \ldots, F_2$
$A_2, \ldots, F_2$	osna simetrija s obzirom na os ordinata	$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$A_3, \ldots, F_3$
$A_1, \ldots, F_1$	centralna simetrija s obzirom na ishodište	$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$A_3, \ldots, F_3$

Učenici će množeći matrice zaključiti da je $B \cdot A = A \cdot B = C$. Povezujući matrice s preslikavanjima, zaključit će da je kompozicija osne simetrije s obzirom na os apscisa i osne simetrije s obzirom na os ordinata, ili kompozicija simetrija u drugom redoslijedu, centralna simetrija s obzirom na ishodište.

Potražite pomoć tehnologije.

Organizacija rada: četiri radna centra. Može se raditi tako da svi učenici prođu sve radne centre ili da pojedina grupa učenika radi samo u jednom centru pa da kasnije rezultate predstavi ostalim grupama. Četvrti radni centar nešto je složeniji pa se može dodijeliti sposobnijim učenicima.

Učenici rade na računalima, moguća je organizacija rada u kojoj svaki učenik radi na svom računalu ili grupa učenika radi na jednom računalu. Koristit će transformaciju koju su definirali u alatu dinamične geometrije.

Radni centar 1

Na osnovu primjera zaključit će da je matricom $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ zadana homotetija s centrom u ishodištu i koeficijentom k.

Radni centar 2

Učenici će na osnovu primjera zaključiti da je matricom $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ zadana dilatacija s koeficijentom a u smjeru osi apscisa i s koeficijentom d u smjeru osi ordinata. Slika je kružnice pri ovom preslikavanju elipsa ako su a i d različiti, a ako su jednaki, onda je kružnica.

Radni centar 3

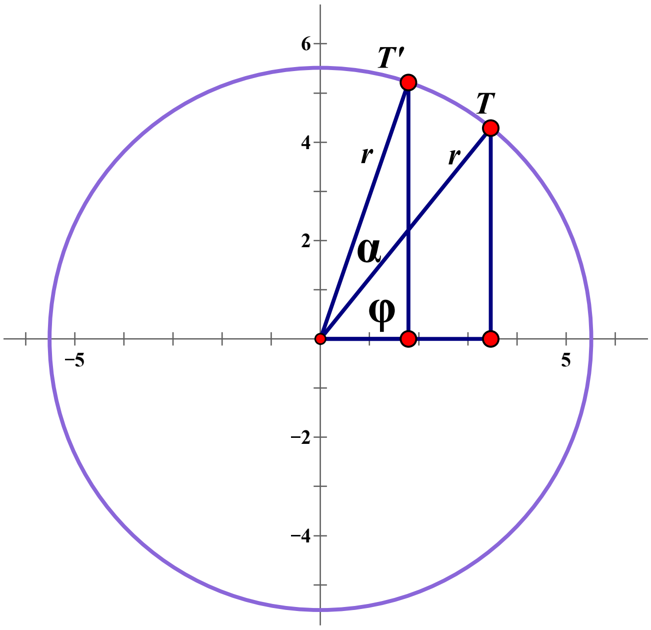
Učenici će na osnovu primjera zaključiti da je matricom $\begin{bmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{bmatrix}$ zadano zakošenje u smjeru osi apscisa i u smjeru osi ordinata. Slika je kvadrata pri ovom preslikavanju paralelogram ako su b i c različiti. Ako su b i c jednaki, onda je romb.

Radni centar 4

Učenici će u konkretnim primjerima zaključiti da je matricom zadana rotacija. Očekuje se da izmjere kut rotacije i povežu elemente matrice s vrijednostima trigonometrijskih funkcija tog kuta. Na osnovu primjera zaključit će da je matricom $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ zadana rotacija oko ishodišta za kut α.

Kako bi to riješila teorija?

a. Dokažite da je rotacija s centrom u ishodištu za kut α definirana matricom $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.



Vrijedi: $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$ pa je

$$x' = r\cos(\alpha+\varphi) = r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi =$$
$$= (\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y$$
$$y' = r\sin(\alpha+\varphi) = r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi =$$
$$= (\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y$$

pa je matrica $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

b. Koristeći matrice učenici će dokazati da je kompozicija rotacije za kut α oko ishodišta i rotacije za kut β oko ishodišta rotacija za kut $\alpha + \beta$ oko ishodišta.

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix} \cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta\sin\alpha-\sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta\sin\alpha+\cos\beta\cos\alpha \end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Možemo li više?

a. Učenici će uvrstiti $k = 1$, dobiti matricu $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i u programu dinamične geometrije preslikati jednu točku te promatrajući točku i sliku otkriti da je ovo simetrija s obzirom na pravac $y = x$.

Za $k = 2$ dobiva se matrica $A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ što je simetrija s obzirom na pravac $y = 2x$.

Ostali zaključci slijede analogno. Učenici generaliziraju nepotpunom indukcijom da je matricom

$A_k = \begin{bmatrix} \frac{1-k^2}{1+k^2} & \frac{2k}{1+k^2} \\ \frac{2k}{1+k^2} & -\frac{1-k^2}{1+k^2} \end{bmatrix}$ određena simetrija s obzirom na pravac $y = kx$.

b. $B = A_2 \cdot A_{0.5} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{bmatrix}$.

Učenici mogu u programu dinamične geometrije preslikati jednu točku i mijenjajući njezin položaj te mjereći kut TOT' zaključiti da matrica B predstavlja rotaciju za kut $\varphi = 73°44'23''$. Računski mogu provjeriti da je $\cos\varphi = \frac{7}{25}$, $\sin\varphi = \frac{24}{25}$. Osim toga mjerenjem kuta α koji zatvaraju pravci $y = 2x$ i $y = 0.5x$, učenici će otkriti da je $\varphi = 2\alpha$.

c. Učenici će nakon nekoliko analognih primjera, generalizirajući nepotpunom indukcijom, zaključiti da je kompozicija dviju osnih simetrija čije se osi sijeku u ishodištu rotacija oko ishodišta za dvostruki kut između osi.

d. Učenici će nacrtati pravce a i b koji se sijeku u ishodištu i točku T u ravnini. Točku T najprije preslikamo osno simetrično s obzirom na pravac a i zatim dobivenu sliku s obzirom na b te dobivenu točku označimo s T'. Zatim preslikamo T najprije s obzirom na b pa dobivenu sliku s obzirom na a i dobivenu sliku označimo s T''. Mijenjajući položaj pravaca, učenici će otkriti da se točke T' i T'' podudaraju za svaki izbor točke T ako su pravci a i b okomiti ili ako se podudaraju.

Dokaz:

$$A_{k_1} \cdot A_{k_2} = \begin{bmatrix} \frac{1-k_1^2}{1+k_1^2} & \frac{2k_1}{1+k_1^2} \\ \frac{2k_1}{1+k_1^2} & -\frac{1-k_1^2}{1+k_1^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1-k_2^2}{1+k_2^2} & \frac{2k_2}{1+k_2^2} \\ \frac{2k_2}{1+k_2^2} & -\frac{1-k_2^2}{1+k_2^2} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{(1+k_1^2)(1+k_2^2)} \begin{bmatrix} (1-k_1^2)(1-k_2^2)+4k_1k_2 & 2k_2(1-k_1^2)-2k_1(1-k_2^2) \\ 2k_1(1-k_2^2)-2k_2(1-k_1^2) & 4k_1k_2+(1-k_1^2)(1-k_2^2) \end{bmatrix}.$$

Analogno se dobije

$$A_{k_2} \cdot A_{k_1} = \frac{1}{(1+k_1^2)(1+k_2^2)} \begin{bmatrix} (1-k_1^2)(1-k_2^2)+4k_1k_2 & 2k_1(1-k_2^2)-2k_2(1-k_1^2) \\ 2k_2(1-k_1^2)-2k_1(1-k_2^2) & 4k_1k_2+(1-k_1^2)(1-k_2^2) \end{bmatrix}.$$

Jednakost se postiže ako je

$$2k_2(1-k_1^2)-2k_1(1-k_2^2)=2k_1(1-k_2^2)-2k_2(1-k_1^2)$$

$$k_2-k_1^2k_2-k_1+k_1k_2^2=0$$

$$(k_2-k_1)(1+k_1k_2)=0$$

pa se pravci podudaraju ili su okomiti.

6. Modeliranje

6.1. Broj pušača u Londonu

U ovoj će aktivnosti učenici:

- istražiti vezu među zadanim veličinama
- odrediti linearnu funkciju iz danih podataka
- procijeniti rješenje iz grafičkog prikaza koristeći program dinamične geometrije
- odrediti vrijednost funkcije za zadani argument
- interpretirati značenje koeficijenata linearne funkcije
- predvidjeti izgled grafa funkcije zadane formulom
- riješiti zadatak iz svakodnevnog konteksta koristeći linearnu funkciju
- vrednovati svoj rad.

Kako to izgleda?

Oblik rada: individualan rad

Svaki učenik na svom papiru određuje godišnji pad broja pušača.

$$27\% - 18.7\% = 8.3\%$$

$$8.3\% : 6 = 1.38\%$$

Broj pušača godišnje opada za 1.38%.

Napravite model.

Oblik rada: individualni rad

Učenici samostalno popunjavaju tablicu

x	-6	-1	0	1	2	3
$f(x)$	27	20.1	18.7	17.34	15.96	14.58

2007. godine je zabranjeno pušenje u Londonu, što je 6 godina ranije u odnosu na nultu 2013. godinu.

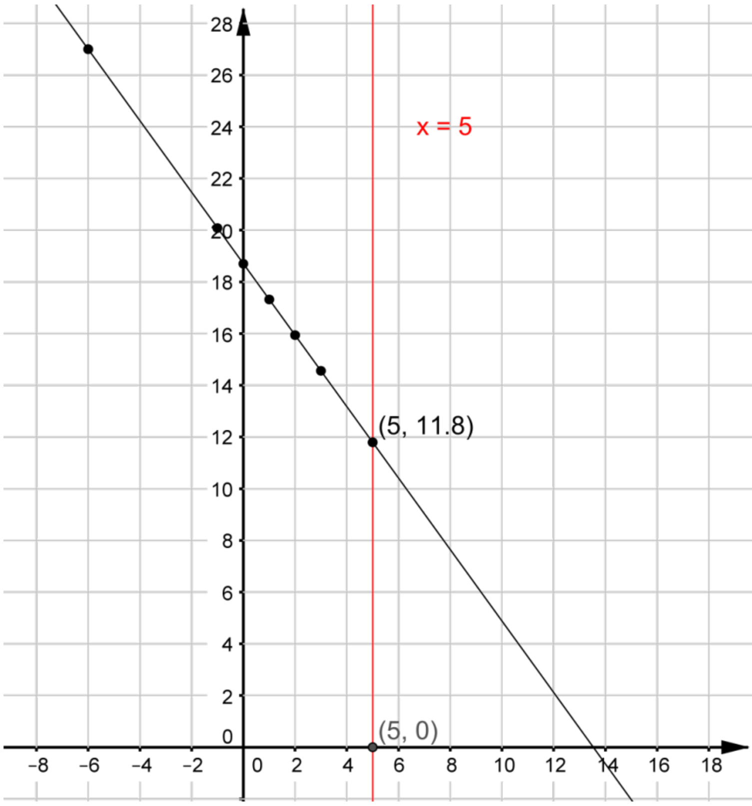
Nije realno očekivati da se broj pušača nastavi smanjivati istom brzinom i nakon 10, 15 i više godina jer nije realno da padne na nulu ili ispod nule.

Potražite pomoć tehnologije.

Oblik rada: rad u paru

Nastavna pomagala: računalo za svaki par

Učenici u programu dinamične geometrije ucrtavaju točke iz prethodne tablice.



Određuju približnu vrijednost funkcije za x = 5. Za točan podatak crtaju okomicu na x os kroz točku (5,0) te pomoću *Mjerenja/Koordinate* dobivaju vrijednost funkcije, a to je 11.8.

Postotni udio pušača u 2018.godini iznosi 11.8% .

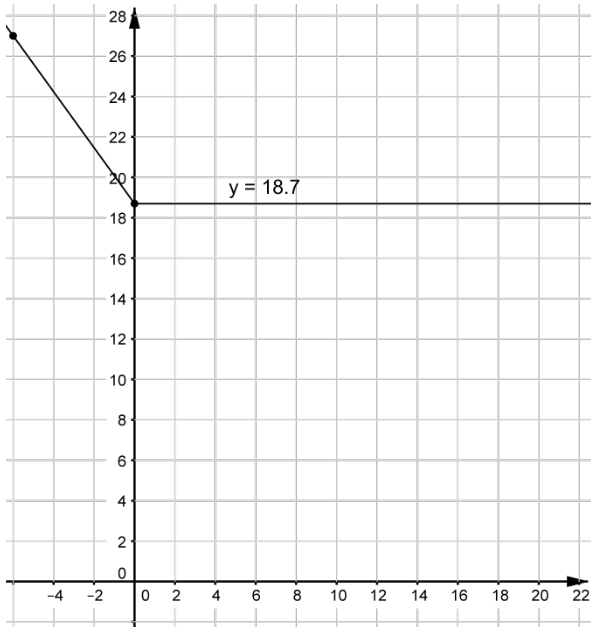
Kako bi to riješila teorija?

Iz danih podataka učenici određuju linearnu funkciju $f(x) = -1.38x + 18.7$, a zatim određuju vrijednost funkcije za $x = 5$. Vrijednost funkcije je 11.8, što znači da će 2018. godine u Londonu biti 11.8% pušača. Kako je broj stanovnika Londona 8.539 milijuna, tako je broj pušača $11.8\% \cdot 8.539 = 1.0076 \approx 1.008$ milijuna.

Možemo li više?

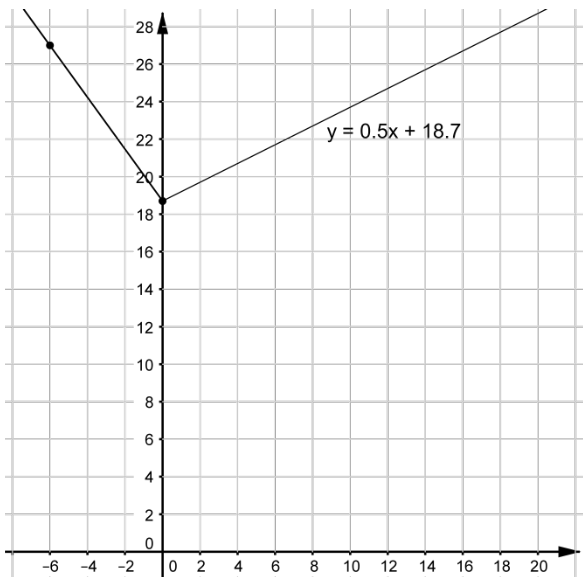
Zadatak 1.

To je konstantna funkcija za $x \geq 0$.



Zadatak 2.

To je funkcija $f(x) = \begin{cases} -1.38x + 18.7, & x \leq 0 \\ 0.5x + 18.7, & x > 0 \end{cases}$



6.2. Cijena i dobit

U ovoj će aktivnosti učenici:

- istražiti vezu među zadanim veličinama
- odrediti linearnu funkciju iz danih podataka
- odrediti kvadratnu funkciju iz danih podataka
- odrediti rješenje iz grafičkog prikaza koristeći program dinamične geometrije
- odrediti tjeme kvadratne funkcije
- interpretirati značenje koeficijenata kvadratne funkcije
- predvidjeti izgled grafa funkcije zadane formulom
- riješiti zadatak iz svakodnevnog konteksta koristeći kvadratnu funkciju
- vrednovati svoj rad.

Oblik rada: individualan rad

U čemu je problem?

Učenici će izračunati da je dobit redom 240 kn, 300 kn, 280 kn.

Kako to izgleda?

Učenici će primijetiti da se broj prodanih proizvoda smanjuje za 20 kad se cijena poveća za 2. Zaključit će da će se broj prodanih proizvoda povećati za 20 kad se cijena smanji za 2. Uz cijenu od 2 kn prodat će se 100 proizvoda i dobit će biti 100 kn.

Napravite model.

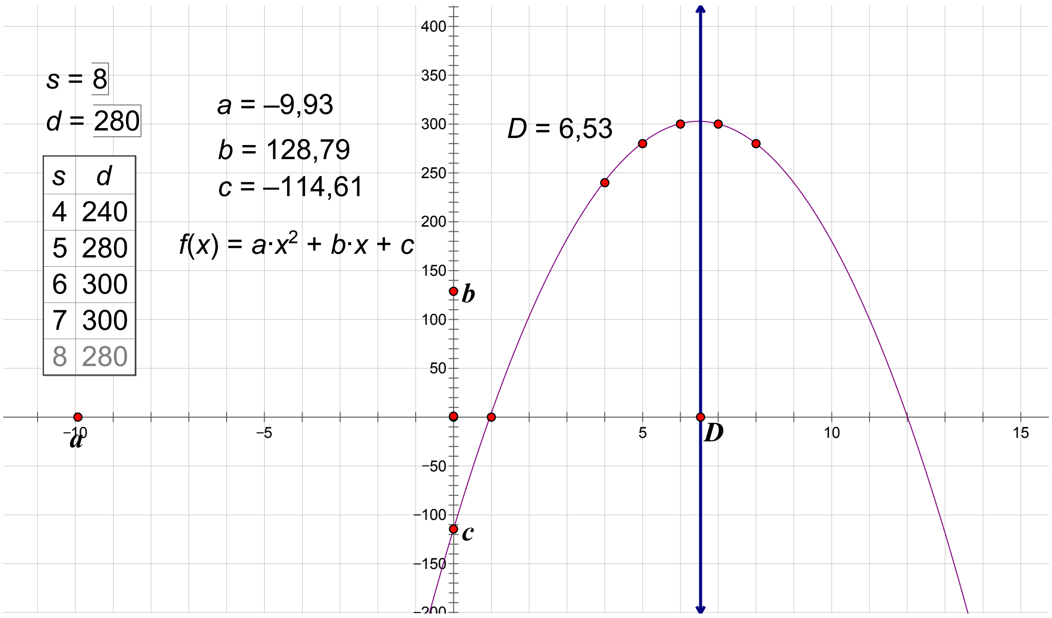
Oblik rada: individualni rad

Prodajna cijena HRK (s)	Količina prodanih proizvoda u jednom danu (q)	Dobit (d)
4	80	240
5	70	$5 \cdot 70 - 70 = 280$
6	60	300
7	50	$7 \cdot 50 - 50 = 300$
8	40	280

Potražite pomoć tehnologije.

Oblik rada: rad u paru

Nastavna pomagala: računalo za svaki par



Učenici će grafički odrediti približnu vrijednost prodajne cijene kojom se postiže maksimalna dobit i vidjeti da je ona oko 6.5 kn.

Kako bi to riješila teorija?

Učenici određuju funkciju koja opisuje ovisnost količine prodanih proizvoda o prodajnoj cijeni uz pretpostavku da je veza linearna. Iz tablice iščitavaju točke (4,80), (5,70) i (6,60) i pomoću njih ili koristeći podatak da se broj prodanih proizvoda smanjuje za deset kad se cijena poveća za jedan određuju funkciju $q(s) = -10s + 120$.

Učenici koriste podatak da je funkcija ukupne dobiti jednaka ukupnim prihodima umanjenim za troškove proizvodnje. Troškovi proizvodnje su 1 kuna po proizvodu, tj. $1 \cdot q$, dok su ukupni prihodi umnožak prodajne cijene i količine prodanih proizvoda, tj. $s \cdot q$. Sada je funkcija ukupne dobiti jednaka $d(s) = s \cdot q - 1 \cdot q$. Uvrštavanjem dobijemo $d(s) = s \cdot (-10s + 120) - (-10s + 120) = -10s^2 + 130s - 120$.

Očigledno, to je kvadratna funkcija.

Nakon toga, učenici određuju argument funkcije u kojem se postiže maksimalna dobit, tj. određuju tjeme grafa funkcije.

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = T(6.5, 302.5).$$

Prodajna cijena kojom se postiže maksimalna dobit iznosi 6.5 kn.

Možemo li više?

1. Maksimalna vrijednost funkcije je 302.5.
2. Dobit je jednaka nuli za cijene od 1 kune i 12 kuna.
3. Kvadratna funkcija ne postiže minimalnu vrijednost, ali primjećujemo da model ima smisla samo za cijene od 0 kn do 12 kn, jer cijena i broj prodanih primjeraka ne mogu biti negativni. Uz cijenu do 1 kn posluje se s gubitkom. Uz cijenu od 1 kn dobit je 0 kn. Također je dobit 0 kn uz cijenu od 12 kn.
4. Prodajna cijena mora bit u intervalu $\langle 0{,}6.5\rangle$.

6.3. Kvadratna funkcija u geometrijskim zadatcima

Za odvijanje aktivnosti predviđena su dva školska sata. Pretpostavlja se upotreba računala i programa dinamične geometrije. Idealni uvjeti pretpostavljaju da svaki učenik raspolaže svojim računalom.

Nastavnik treba aktivno pratiti razumiju li učenici upute te mogu li slijediti nastavne materijale, vodeći računa o vremenu kako bi aktivnost bila zaključena unutar dva školska sata. Očekuje se da će učenici trebati i pomoć pri upotrebi tehnologije (konstrukcija geometrijskog problema, mjerenje, tabeliranje, crtanje tabeliranih točaka, definiranje *klizača*, crtanje funkcije, traženje parametara funkcije…).

Nastavnik treba prema potrebi naglasiti cilj aktivnosti (traženje funkcijske ovisnosti dviju veličina), te metode koje koristimo u tom zadatku.

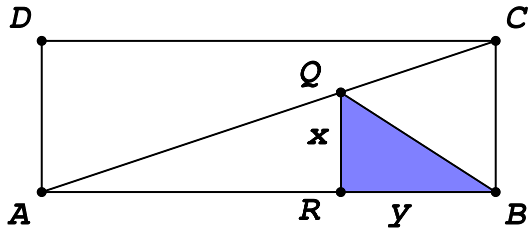
Tijekom ove aktivnosti učenici će:

- naslutiti matematički model kojim će dani problem biti modeliran upotrebom programa dinamične geometrije
- riješiti problem rabeći program dinamične geometrije
- riješiti problem algebarski
- riješiti problem geometrijski
- interpretirati sva tri rješenja, utvrditi eventualne razlike i njihov uzrok.

Zadatci u **Primijenite naučeno** mogu biti zadani za domaću zadaću.

U prilogu je materijal u programu dinamične geometrije te geometrijsko rješenje problema.

Geometrijsko rješenje

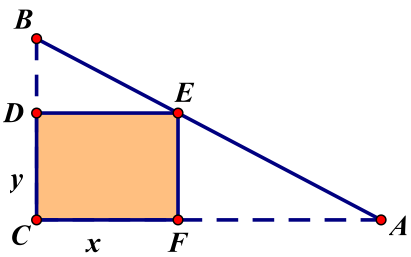


Zadano je $|AB| = 6\,\text{cm}, |BC| = 2\,\text{cm}$. Označimo $|QR|$ pomoću x, a $|RB|$ pomoću y. Tada je $P(\Delta QRB) = \frac{x \cdot y}{2}$. Želimo iskazati površinu trokuta samo pomoću nepoznanice x.

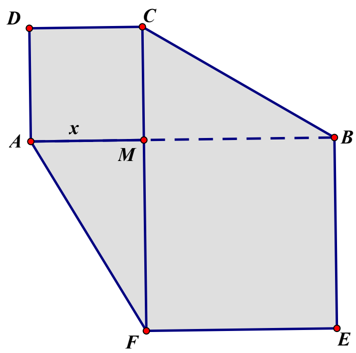
Uočimo sličnost trokuta ABC i ARQ. Tada je $\frac{6-y}{6} = \frac{x}{2} \Rightarrow y = 6 - 3x \Rightarrow P(\Delta QRB) = -1.5x^2 + 3x$.

Primijenite naučeno.

1. Učenici problem svode na prethodni. Iz skice mogu uočiti da vrijedi $P = xy$. S druge strane, iz sličnosti trokuta ABC i trokuta AEF slijedi $\frac{y}{a} = \frac{b-x}{b}$. Iz toga slijedi da je površina upisanog pravokutnika $P = \frac{a}{b}(b-x)x$ za $a = |BC|, b = |CA|$. Tada maksimalna površina upisanog pravokutnika iznosi $P = \frac{ab}{4} = \frac{P_{\Delta}}{2}$.



2. Pomoću konstrukcije problema i tabeliranja vrijednosti duljine dužine $x = |AM|$ učenici će uočiti da se površina smanjuje kako se točka M približava polovištu dužine $\overline{AB}$. Nadalje, površina šesterokuta jednaka je zbroju površina kvadrata, odnosno pravokutnih trokuta čije duljine stranica ovise o duljini dužine $x = |AM|$. Iz toga slijedi da je površina šesterokuta jednaka $P_{AFEBCD} = x^2 + (a-x)^2 + x(a-x) = x^2 - ax + a^2$. Najmanja se površina dobiva za $x = \frac{a}{2}$ i jednaka je $P_{AFEBCD} = \frac{3}{4}a^2$.



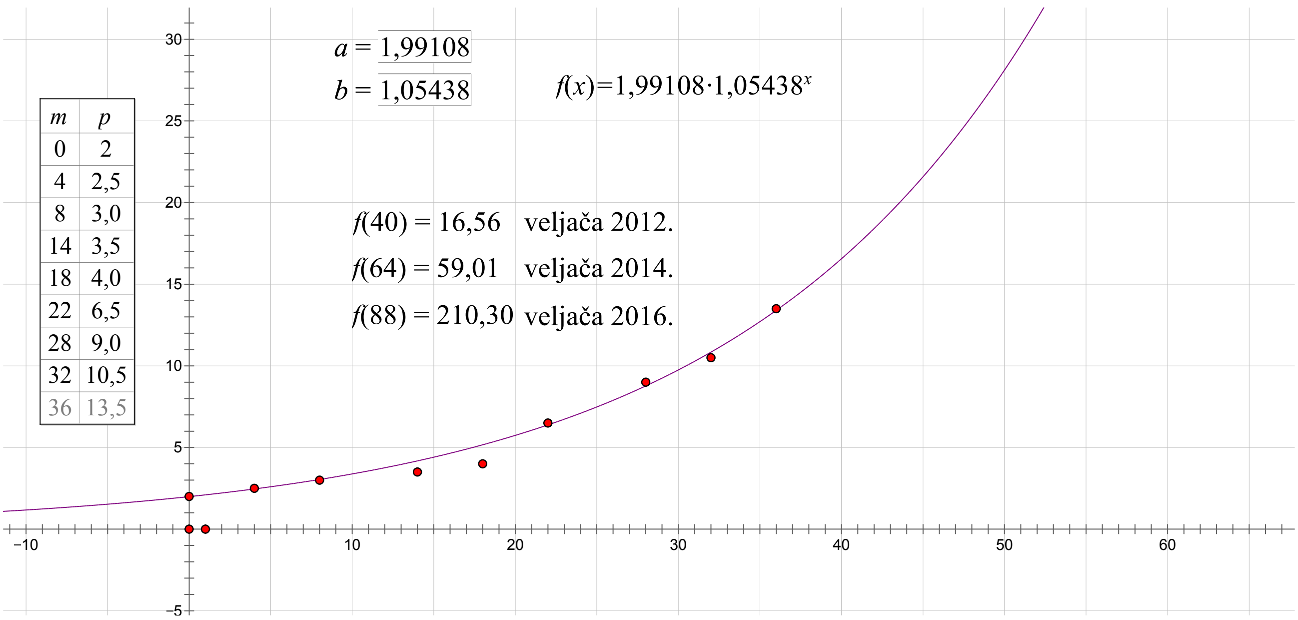
6.4. Recikliranje

U ovoj će aktivnosti učenici:

- odrediti pravilo koje povezuje zadane veličine
- predvidjeti izgled grafa funkcije zadane tablicom
- odrediti vrijednost funkcije za zadani argument i obrnuto
- modelirati i rješavati problem iz ekologije
- usporediti učinkovitost različitih metoda.

Aktivnost je predviđena za dva školska sata.

Učenici će odabrati prikladan koordinatni sustav. Mogu odlučiti da listopad 2008. označe kao 0 ili 1. Mogu odlučiti da jedinična dužina predstavlja jedan mjesec ili da predstavlja više mjeseci. Učenici će ovisno o odabiru koordinatnog sustava i preciznosti pri namještanju parametara dobiti koeficijente eksponencijalne funkcije. Jedno je od mogućih rješenja:



Postotak recikliranog otpada u veljači 2012. dobiva se iz $f(40) = 1.99108 \cdot 1.05438^x \approx 16.56$, odnosno 16.56%.

Kalkulatorom se dobije $g(x) = 1.88593 \cdot 1.05496^x$ i $g(40) \approx 16.03$.

Npr. https://themaltingpot.files.wordpress.com/2015/05/eea-soer-2015-recycling.jpg

Pretpostavimo da je prosjek 30%. Koristimo funkciju *f*.

$$1.99108 \cdot 1.05438^x = 30$$

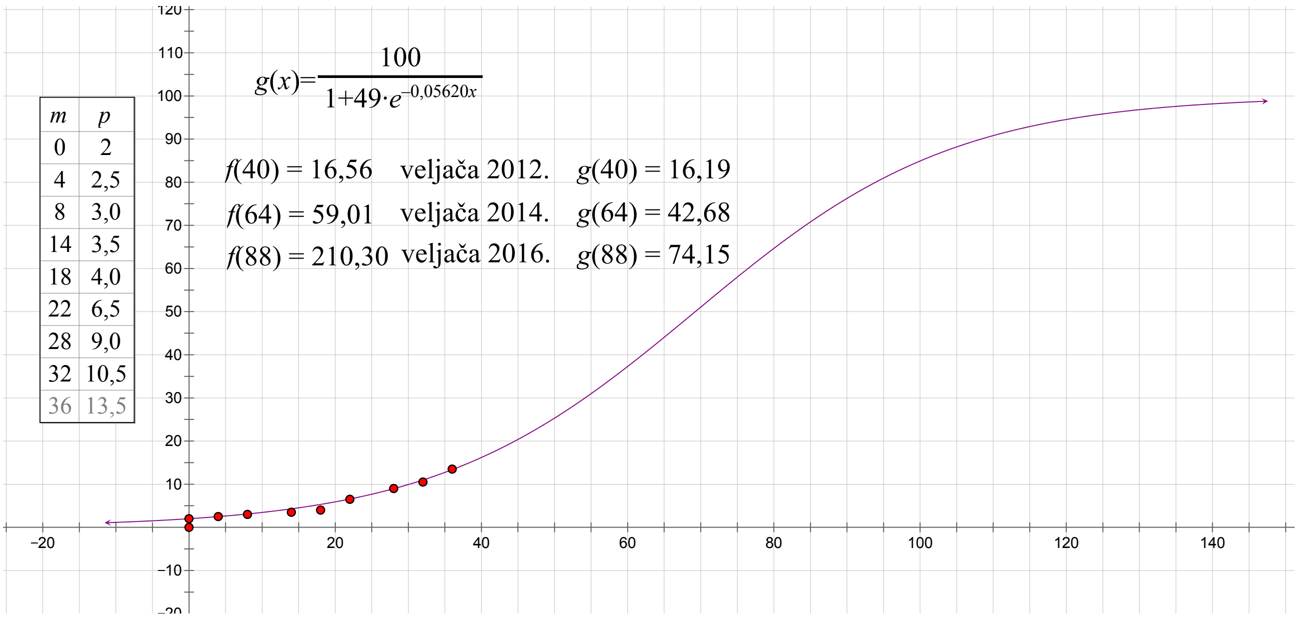
$$1.05438^x = 15.06719971$$

$$x = \log_{1.05438} 15.06719971 = 51.225$$

Hrvatska je dosegla 30% recikliranog materijala tijekom siječnja 2013. godine. Kalkulatorom se dobije $x = 51.71$.

Prema ovom modelu Hrvatska bi dosegla 100% recikliranog materijala tijekom prosinca 2014., no to se ne može realno očekivati. U veljači 2016. po modelu se dobiva 210.3 % što je nemoguće. Zaključujemo da model nije dobar za kasnije mjesece i godine (eksponencijalna funkcija brzo raste).

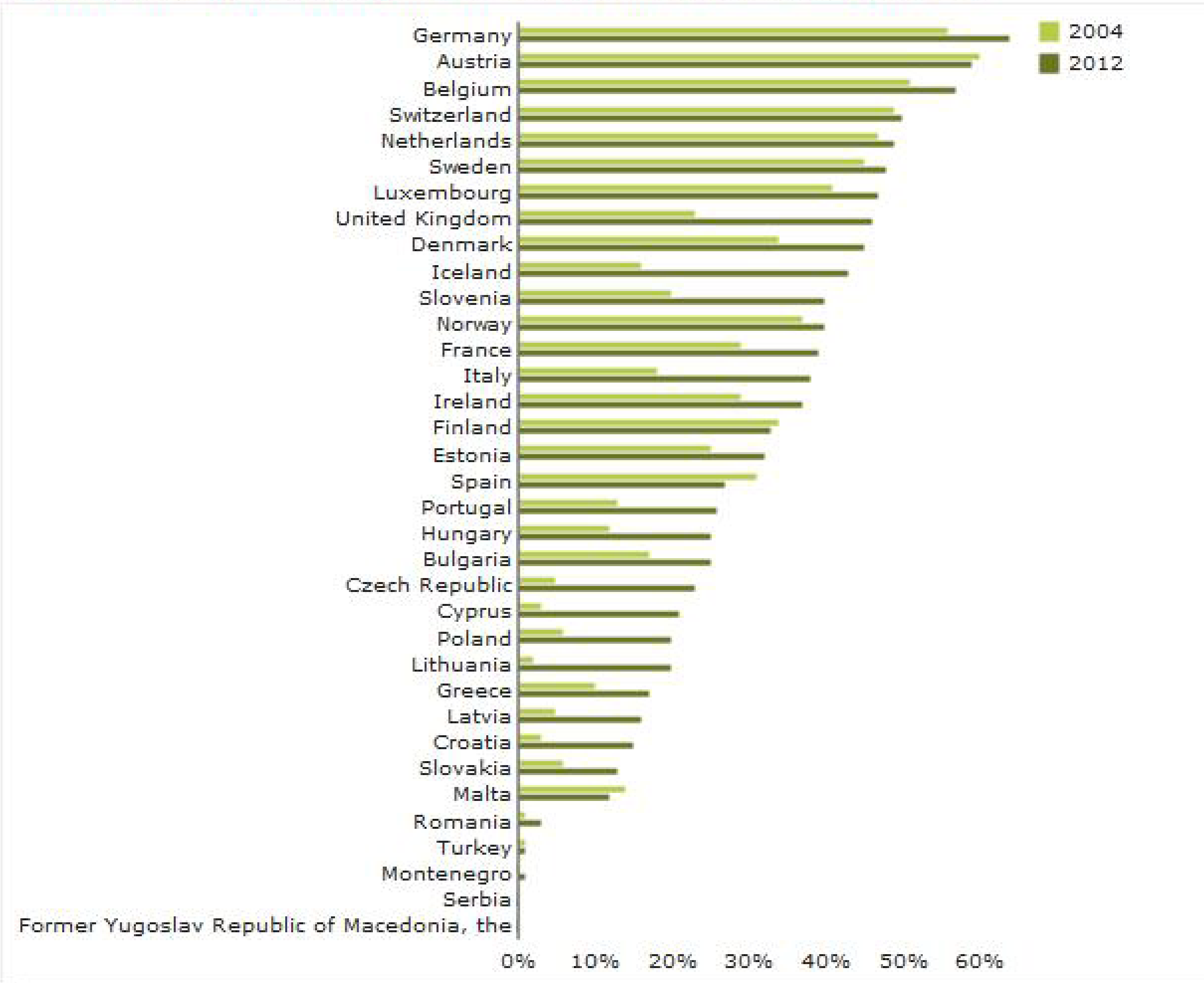
Tražimo logističku funkciju na primjer u obliku $g(x)=\dfrac{C}{1+Ae^{-Bx}}$. Maksimalna vrijednost je 100 pa je $C = 100$, $g(0)=\dfrac{C}{1+A} \Rightarrow A=49$, B se može dobiti ako znamo kad će se postići vrijednost $\dfrac{C}{2}$ jer je točka infleksije grafa logističke funkcije točka $\left(\dfrac{\ln A}{B},\dfrac{C}{2}\right)$. No, budući da nemamo taj podatak, namještanjem se može odrediti $B = 0.0562$, pa je $g(x)=\dfrac{100}{1+49e^{-0.0562x}}$.



pa je po logističkom modelu u veljači 2012. godine 16.2% recikliranog otpada, u veljači 2014. godine 42.7%, a u veljači 2016. godine jest 74.2% recikliranog otpada.

Logistička se funkcija može pronaći i pomoću grafičkog kalkulatora. Zbog malog broja podataka potrebno je dodati još vrijednosti.

Figure 2: Municipal waste recycling in 35 European countries (2004 and 2012)



Primijenite naučeno.

Primjer eksponencijalne funkcije koja opisuje kretanje količine elektroničkog otpada u elektroničkoj industriji:

$f(x) = 1.9657 \cdot 1.1095^x$.

Po ovome će modelu 2020. godine biti 115000 kg elektroničkog otpada.

Količina otpada u odnosu na 2015. godinu će se udvostručiti za 6 i pol godina od 2015., odnosno tijekom 2022. godine.

6.5. Mjesečev sjetveni kalendar

U ovoj će aktivnosti učenici:

- procijeniti rješenja analizirajući zadane veličine
- istražiti vezu među zadanim veličinama pomoću programa dinamične geometrije
- odrediti formulu koja povezuje zadane veličine pomoću programa dinamične geometrije i računski
- približno odrediti ekstremne vrijednosti iz grafičkog prikaza rabeći program dinamične geometrije
- računati ekstremne vrijednosti
- interpretirati matematički model.

Napravite model.

Oblik rada: rad u skupini

Crtajući točke u koordinatnom sustavu, učenici otkrivaju da je funkcija koja prikazuje vidljivi dio Mjeseca u ovisnosti o danu u godini sinusoida $f(x) = A\sin(Bx + C) + D$.

Potražite pomoć tehnologije.

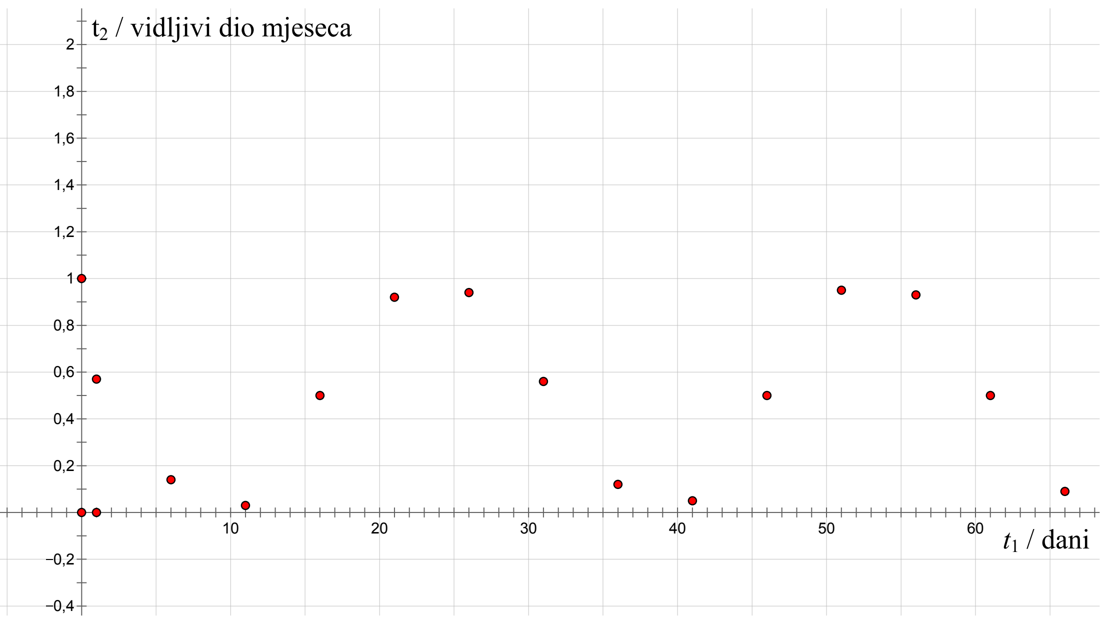
Oblik rada: individualni

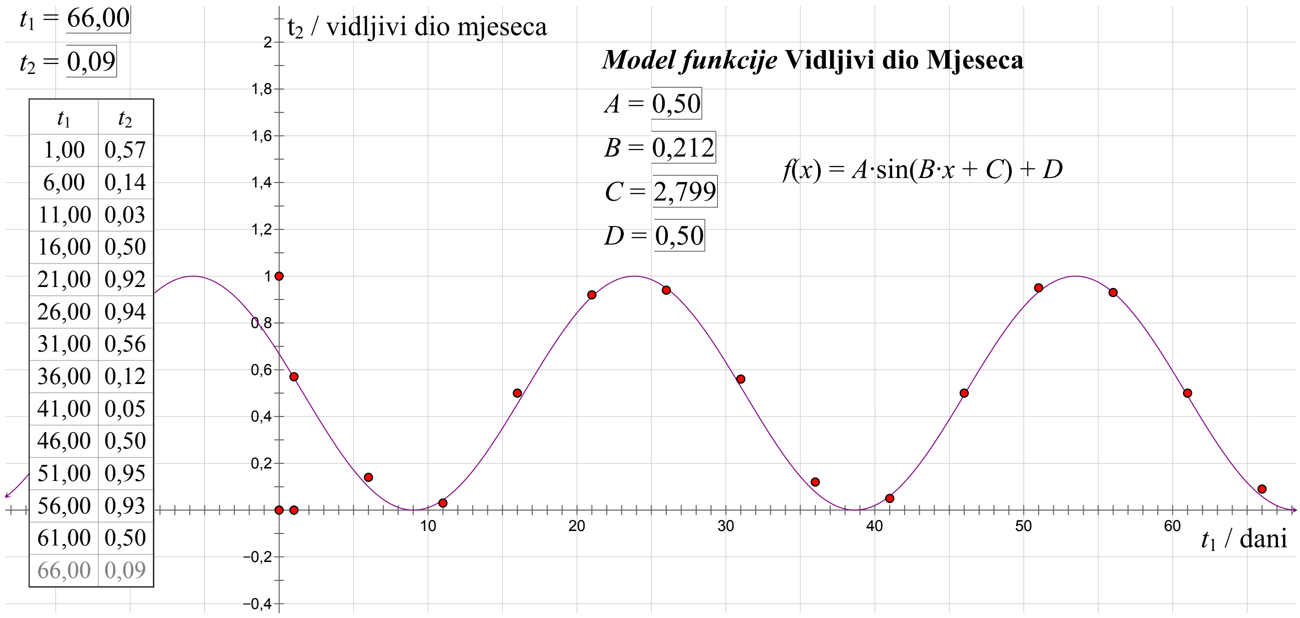
Nastavna pomagala: računalo za svakog učenika

$t_1 = 66{,}00$

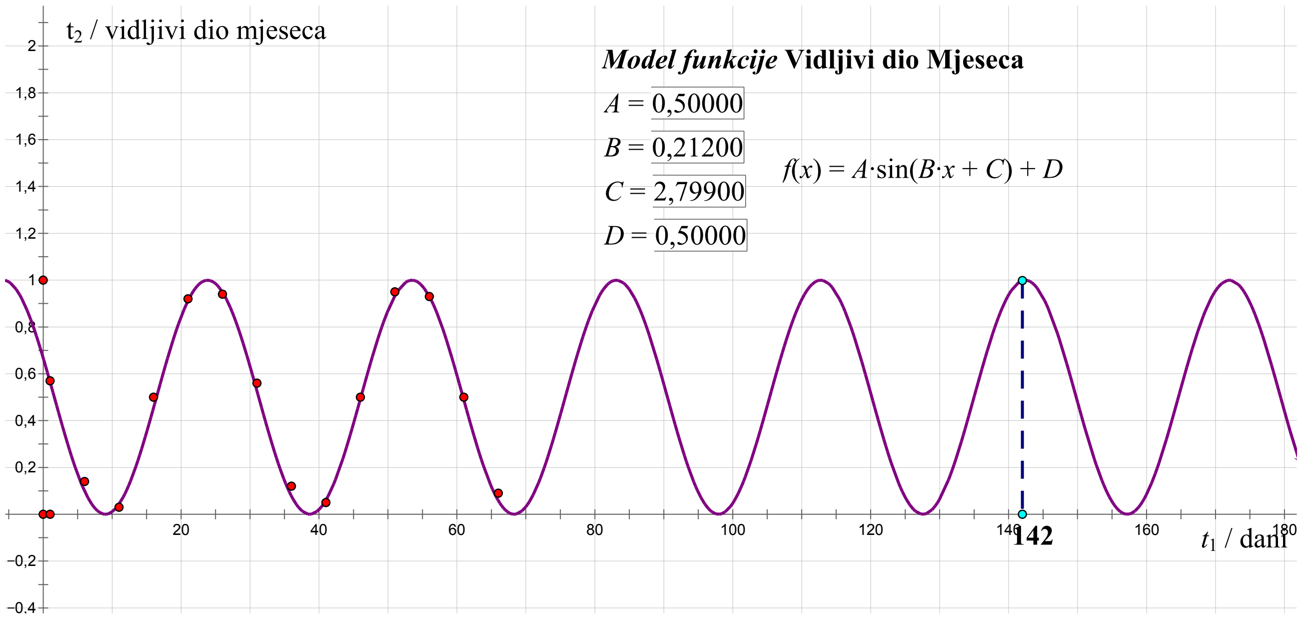
$t_2 = 0{,}09$

t_1	t_2
1,00	0,57
6,00	0,14
11,00	0,03
16,00	0,50
21,00	0,92
26,00	0,94
31,00	0,56
36,00	0,12
41,00	0,05
46,00	0,50
51,00	0,95
56,00	0,93
61,00	0,50
66,00	0,09





t_1	t_2
1,00	0,57
6,00	0,14
11,00	0,03
16,00	0,50
21,00	0,92
26,00	0,94
31,00	0,56
36,00	0,12
41,00	0,05
46,00	0,50
51,00	0,95
56,00	0,93
61,00	0,50
66,00	0,09



Iz grafa vidimo da sjetva može početi 142. dan i trajati do 149. dana, tj. od 21. do 28. svibnja.

Kako bi to riješila teorija?

Oblik rada: rad u skupinama

1. Funkcija koja prikazuje vidljivi dio Mjeseca u ovisnosti o danu u godini oblika je $f(x) = A\sin(Bx + C) + D$.

   Treba odrediti parametre.

   $$|A| = \frac{1-0}{2} = 0.5,\ D = \frac{0+1}{2} = 0.5.$$

Period je funkcije 29.53 dana $B = \dfrac{2\pi}{29.53}$.

Dana 16. siječnja vidljivost je Mjeseca 0.5 i nakon toga raste, za fazni pomak uzimamo 16, a A je pozitivan.

Dobivamo: $f(t) = 0.5\sin\dfrac{2\pi}{29.53}(t-16)+0.5$.

2. Ako ciklu treba sijati u svibnju, tada je $122 \le t \le 152$.

Ciklu treba sijati u tjednu nakon punog Mjeseca. Neka je t_1 broj u kojem funkcija postiže maksimum. Tada ciklu treba sijati u intervalu $[t_1, t_1+7]$.

Rješavamo jednadžbu: $0.5\sin\dfrac{2\pi}{29.53}(t-16)+0.5=1$ uz uvjet $122 \le t \le 152$.

Dobivamo $t_1 = 142$, odnosno cikla se sije od 21. svibnja do 28. svibnja.

Možemo li više?

Oblik rada: rad u skupinama

Rješavamo jednadžbu: $0.5\sin\dfrac{2\pi}{29.53}(t-16)+0.5=0$ uz uvjet $92 \le t \le 121$.

Od 6. travnja do 13. travnja treba sijati špinat.

Primijenite naučeno.

Oblik rada: rad u skupinama

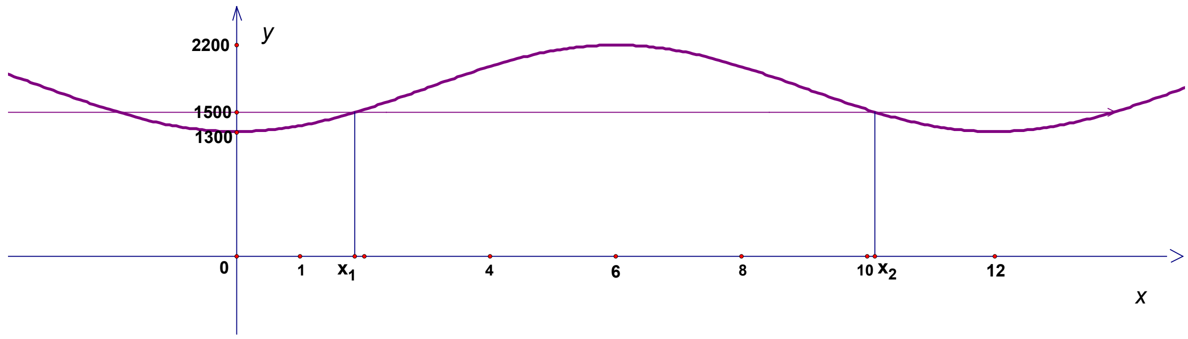
Zadatak 1.

1. $f(x) = 10.8\sin\dfrac{2\pi}{365}(x-89)+10.8$
2. $f(118) - f(51) = 11.7$ °C
3. Od 1. siječnja do 6. travnja i od 23. rujna do 31. prosinca.

Zadatak 2.

1. $f(x) = 450\sin\left(\dfrac{\pi}{6}x - \dfrac{\pi}{2}\right)+1750$

2.



Krajem veljače i početkom studenog.

6.6. Ferrisov kotač

U ovoj će aktivnosti učenici:

- procijeniti rješenje postavljena problema
- prepoznati funkciju koja modelira danu situaciju
- primijeniti trigonometrijske omjere u pravokutnom trokutu
- primijeniti formule redukcije
- riješiti trigonometrijsku jednadžbu
- otkriti proporcionalne veličine
- skicirati graf promatrane funkcije uz pomoć tehnologije i bez tehnologije
- prepoznati grafove trigonometrijskih funkcija
- riješiti jednostavnu trigonometrijsku nejednadžbu.

Ova aktivnost predviđena je za 4 školska sata.

Možete li pretpostaviti?

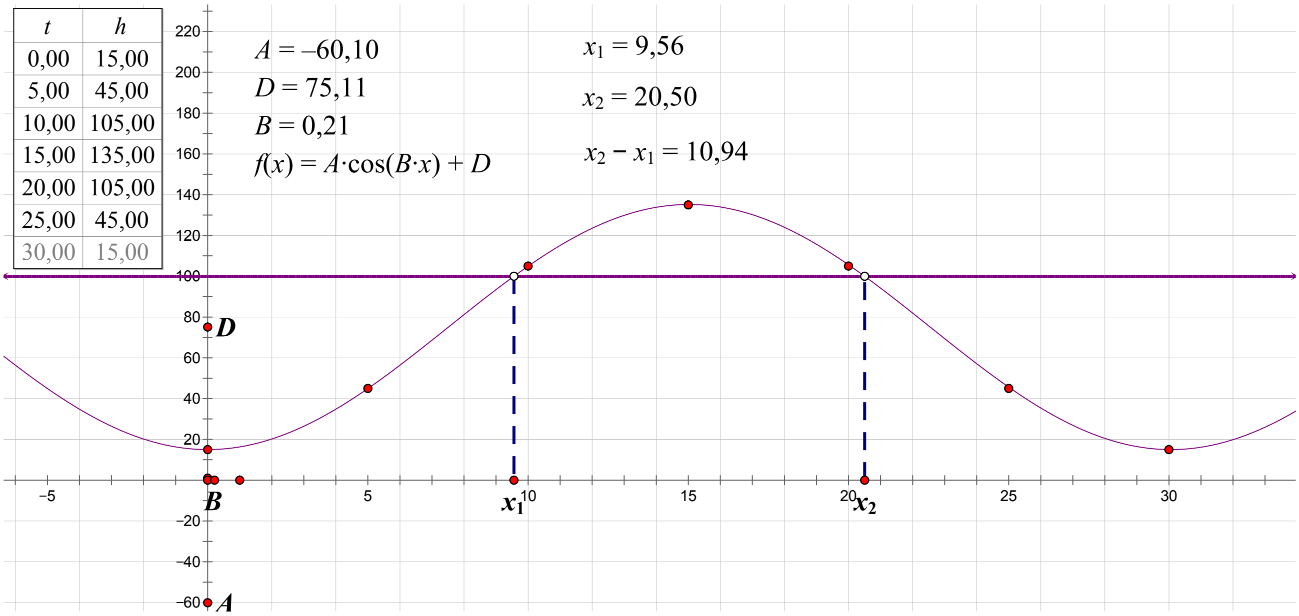
Na osnovu podataka iz tablice učenici će zaključiti da će Ana iznad 100 metara visine biti više od deset minuta.

Izradite model.

Učenici će promatrajući podatke zaključiti da veličine nisu proporcionalne i da ovisnost nije linearna. Ucrtat će točke u koordinatni sustav i pretpostaviti da je riječ o funkciji sinus ili kosinus.

Potražite pomoć tehnologije.

Učenici će u programu dinamične geometrije grafički riješiti zadatak. Odredit će približne vrijednosti koeficijenata i interval u kojem su vrijednosti funkcije iznad 100.



t	h
0,00	15,00
5,00	45,00
10,00	105,00
15,00	135,00
20,00	105,00
25,00	45,00
30,00	15,00

Kako bi to riješila teorija?

Oblik rada: rad u skupini; gostiona. Učenici najprije rade u četiri ekspertne skupine. Zatim idu u goste i rješavaju zajedničke zadatke.

Rješenja:

Prva skupina:

Vrijedi: $|PB| = |OA| - |OC| = |OA| - |OP|\cos\alpha = 75 - 60\cos\alpha$.

Kut α je u intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Nakon pet minuta vožnje putnik je na visini od 45 m.

$75 - 60\cos\alpha = 45 \Rightarrow a = \frac{\pi}{3}$.

Kut α za položaj putnika nakon 5 minuta vožnje je $\frac{\pi}{3}$.

Druga skupina:

Vrijedi: $|PB| = |OA| + |OC| = |OA| + |OP|\cos(\pi - \alpha) = 75 - 60\cos\alpha$.

Kut α je u intervalu $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$. Nakon deset minuta vožnje putnik je na visini od 105 m.

$75 - 60\cos\alpha = 105 \Rightarrow a = \frac{2\pi}{3}$.

Kut α za položaj putnika nakon 10 minuta vožnje je $\frac{2\pi}{3}$.

Treća skupina:

Vrijedi: $|PB| = |OA| + |OC| = |OA| + |OP|\cos(\alpha - \pi) = 75 - 60\cos\alpha$.

Kut α je u intervalu $\left\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$. Nakon dvadeset minuta vožnje putnik je na visini od 105 m.

$75 - 60\cos\alpha = 105 \Rightarrow a = \frac{4\pi}{3}$.

Kut α za položaj putnika nakon 20 minuta vožnje je $\frac{4\pi}{3}$.

Četvrta skupina:

Vrijedi: $|PB| = |OA| - |OC| = |OA| - |OP|\cos(2\pi - \alpha) = 75 - 60\cos\alpha$.

Kut α je u intervalu $\left\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\rangle$. Nakon dvadeset i pet minuta vožnje putnik je na visini od 45 m.

$75 - 60\cos\alpha = 45 \Rightarrow a = \frac{5\pi}{3}$.

Kut α za položaj putnika nakon 25 minuta vožnje je $\frac{5\pi}{3}$.

Idemo u goste:

Učenici će usporediti formule za visinu koje su dobili u ekspertnim skupinama i primijetiti da su svi dobili istu formulu.

Koristeći se rezultatima iz ekspertnih skupina popunit će tablicu:

t	5	10	15	20	25	30
α	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi = \frac{3\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$2\pi = \frac{6\pi}{3}$

Primijetit će da su kut i vrijeme proporcionalne veličine.

Koliko se puta poveća vrijeme, toliko se puta poveća kut.

Koliko se puta smanji vrijeme, toliko se puta smanji kut.

Na osnovu tog zaključka popunit će tablicu:

t	30	1	2	7	18	t
α	2π	$\frac{2\pi}{30}=\frac{\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{7\pi}{15}$	$\frac{18\pi}{15}$	$\frac{t\pi}{15}$

$h(t)=75-60\cos\alpha=75-60\cos\left(\frac{\pi}{15}t\right)$.

Rješenje koje su učenici dobili primjenom tehnologije je približno, ali se do njega brže dolazi.

Sada rješavamo nejednadžbu:

$$75-60\cos\left(\frac{\pi}{15}t\right)\geq 100$$

$$-60\cos\left(\frac{\pi}{15}t\right)\geq 25$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{15}t\right)\leq -\frac{5}{12}$$

$$t\in[t_1,t_2],\ t_1\approx 9.552,\ t_2\approx 20.448$$

Dakle, Ana će biti iznad 100 metara malo manje od 11 minuta.

Možemo li više?

- Možemo pomoću funkcije sinus: $h(t)=75+60\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)$.
- Tablica:

Vrijeme t u minutama	0	5	10	15	20	25	30
Visina putnika u odnosu na najnižu točku u metrima	0	30	90	120	90	30	0

Na isti način kao u prethodnim zadacima možemo odrediti trigonometrijsku funkciju:

$H(t)=60-60\cos\left(\frac{\pi}{15}t\right)$.

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Rješenje:

Napomena: Na temelju ovog zadatka mogu se napraviti kartice kako bi rješenje bilo preglednije.

Također, treći kotač možemo opisati funkcijom takvom da se za $t = 0$ kapsula nalazi na najvišoj mo-gućoj visini, a ne na najnižoj.

Opis	Funkcija	Graf
Promjer: 40 m Visina središta kotača: 30 m Broj okretaja u minuti: 2.5	E	3
Promjer: 40 m Visina središta kotača: 40 m Broj okretaja u minuti: 2.5	H	7
Promjer: 30 m Visina središta kotača: 40 m Broj okretaja u minuti: 2.5	B, F, I	5, 6
Promjer: 40 m Visina središta kotača: 30 m Broj okretaja u minuti: 3	D, G	1
Promjer: 30 m Visina središta kotača: 40 m Broj okretaja u minuti: 3	A	4
Promjer: 30 m Visina središta kotača: 30 m Broj okretaja u minuti: 3	C	2

Zadatak 2.

Rješenje: $h(t) = 12 - 10\cos\left(\frac{2\pi}{15}t\right)$.

Zadatak 3.

Rješenje: Puni krug napravi za 40 sekundi. Najviša točka kotača je 66 metara, a najniža je 6 metara, tj. promjer kotača je 60 metara.

6.7. Problem dviju jahti

U ovoj će aktivnosti učenici:

- procijeniti rješenja analizirajući zadane veličine
- istražiti vezu među zadanim veličinama pomoću programa dinamične geometrije
- odrediti udaljenost točaka
- odrediti formulu koja povezuje vrijeme i udaljenost pomoću programa dinamične geometrije i računski
- približno odrediti ekstremne vrijednosti iz grafičkog prikaza rabeći program dinamične geometrije
- računati ekstremne vrijednosti
- interpretirati matematički model.

Kako to izgleda.

Oblik rada: rad u skupini

Nastavna pomagala: papir, pribadače, ravnalo.

Napravite model.

Učenici postavljaju pribadače na pozicije jahti, mjere njihove udaljenosti, računaju i popunjavaju tablicu.

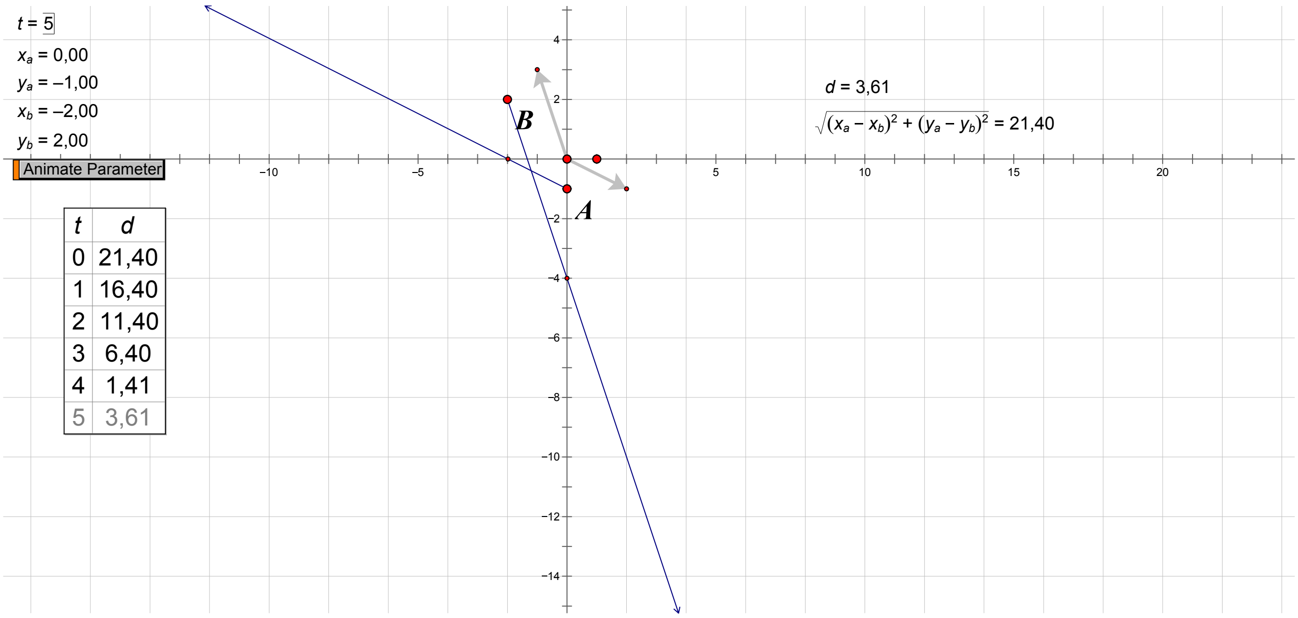
Pozicija nakon t sati	0	1	2	3	4	5
Jahta A	(–10, 4)	(–8, 3)	(–6, 2)	(–4, 1)	(–2, 0)	(0,–1)
Jahta B	(3,–13)	(2,–10)	(1,–7)	(0,–4)	(–1,–1)	(–2, 2)
Udaljenost A i B	21.4	16.4	11.4	6.4	1.4	3.6

Učenici otkrivaju da se udaljenost između jahti smanjuje do nekog vremena (negdje između četvrtog i petog sata), a onda počinje rasti.

Potražite pomoć tehnologije.

Oblik rada: individualni

Nastavna pomagala: računalo za svakog učenika



Upute za rad:

Broj/Novi parametar, $t = 0$

Broj/ Računalo, $-10 + 2t$, pa opet za $4 - t$.

Označite dobivena mjerenja s x_a, odnosno s y_a, te isto napravite i za $\vec{x_b} = 3 - t$, $\vec{y_b} = -13 + 3t$.

Označite x_a, y_a, a zatim *Graf/Nacrtajte kao* (x,y). Isto tako označite x_b, y_b i nacrtajte.

Nacrtajte vektore brzina iz ishodišta. Označite prvo vektor brzine jahte A, odite na *Transformacije/ Označite vektor.* Kliknite na točku A i *Transformacije/Translatirajte.* Analogno za točku B.

Kliknite na parametar t desnim klikom i odaberite *Svojstva/Parametar* i podesite animaciju: s 1,0 jedinice po 2 sekunde. *Domena* je od 0 do 10.

Ponovno kliknite na parametar t i idite na U*ređivanje/Akcijski gumbi,* te odaberite *Animacija, Povećanje, Samo jednom, Diskretno.*

Kako bi to riješila teorija?

Oblik rada: rad u skupinama

1. $A(-10 + 2t, 4 - t)$, $B(3 - t, -13 + 3t)$.

2. Jednadžba pravca određenog točkom $A(-10,4)$ i vektorom smjera $2\vec{i} - \vec{j}$ je $y = -0.5x - 1$. Jednadžba pravca određenog točkom $B(3,-13)$ i vektorom smjera $-\vec{i} + 3\vec{j}$ je $y = -3x - 4$. Točka $S(-1.2, -0.4)$ upravo je sjecište tih pravaca. Jahte će se sudariti ako će u isto vrijeme biti u točki S. Jahta A će biti u točki S za 4 sata i 24 minute ($t = 4.4$), a jahta B za 4 sata i 12 minuta ($t = 4.2$). Zaključujemo da nema sudara.

3. $d(t)=\sqrt{25t^2-214t+458}$

4. Određujemo kada funkcija $f(t)=25t^2-214t+458$ postiže minimum. $t_o=\dfrac{214}{50}=4.28$.

   Dakle, najmanja je udaljenost za 4 sata i 17 minuta i tada je udaljenost Andrijine i Barbarine jahte 0.2 km.

Možemo li više?

U programu dinamične geometrije učenici mijenjaju početne pozicije Andrijine odnosno Barbarine jahte ili vektore i pokušavaju da se dogodi sudar. Nakon toga trebaju i računski riješiti problem. Zadatak ima više rješenja, ovisno što se mijenja.

Ako se mijenja početna pozicija točke *B*, jedno je od rješenja *B*(2, – 12) (mjesto sudara će se promijeniti u *S*(–2, 0) i vrijeme za 4 sata).

Moguće je i rješenje *B*(3.2, – 13.6) (tada mjesto sudara ostaje *S*(– 1.2, – 0.4), a vrijeme je 4 sata i 24 minute).

Primijenite naučeno.

Oblik rada: rad u skupinama

1. $|OA|=400$, $A(400,0)$.

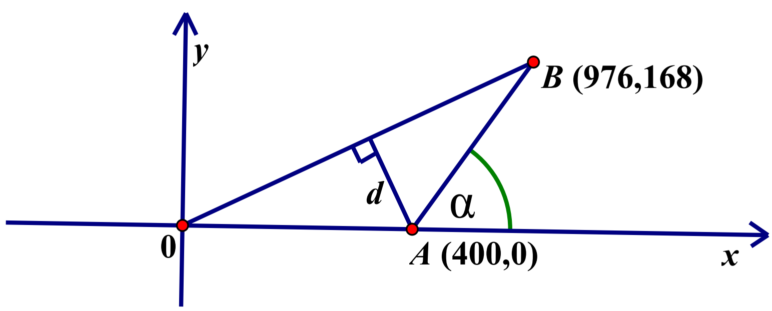
2. $|AB|=600$.

3. $\alpha=16^{\circ}15'37''$.

4. $\vec{OB}=\vec{OA}+\vec{AB}$, $\vec{OA}=400\,\vec{i}$, $\vec{AB}=k\left(24\,\vec{i}+7\,\vec{j}\right)$, $|AB|=600\Rightarrow\vec{AB}=576\,\vec{i}+168\,\vec{j}$

   $\Rightarrow\vec{OB}=976\,\vec{i}+168\,\vec{j}$.

5. $d=67.85$



7. Statistika i vjerojatnost

7.1. Pascalov trokut modulo *n*

U ovoj će aktivnosti učenici:

- otkriti neka svojstva Pascalova trokuta
- istražiti pravilnosti modularne aritmetike koristeći program za izradu proračunskih tablica.

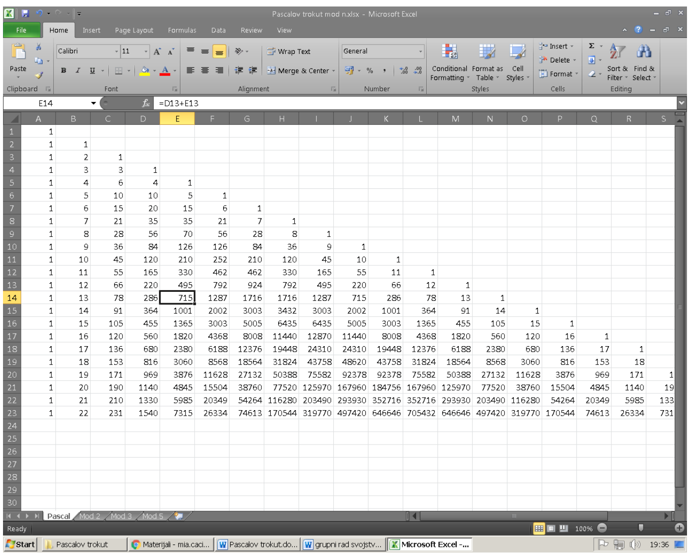
Oblik rada: rad u skupini

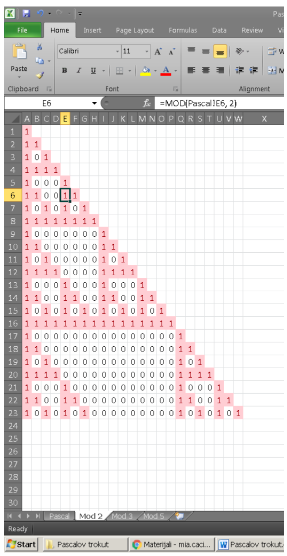
Kako to izgleda?

Učenici su podijeljeni u tri skupine. Svi učenici trebaju u programu za izradu proračunskih tablica izraditi Pascalov trokut (prva 23 retka), te nakon toga promatrati ostatke dobivenih brojeva s brojem koji ovisi o njihovoj skupini: jedna skupina dijeli s 2, druga s 3, a treća s 5. Kasnije učenici prepisuju dobivene ostatke iz programa u obrazac, te boje ćelije u njemu tako da različiti brojevi dobivaju različite boje (prvoj grupi trebaju dvije boje, drugoj tri, a trećoj pet boja).

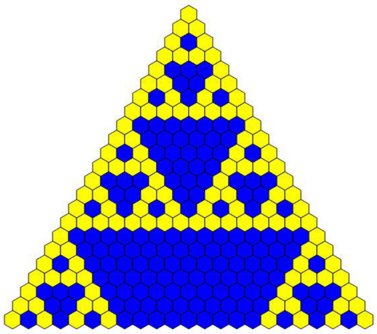
Potražite pomoć tehnologije.

Učenici u proračunskim tablicama kreiraju proračunsku knjigu s dvije tablice. Prema uputama iz vježbenice prvu tablicu popunjavaju brojevima iz Pascalova trokuta, a drugu tablicu ostatcima tih brojeva modulo 2, 3 ili 5 (ovisno o tome kojoj skupini pripadaju). Za računanje ostataka može se koristiti funkcija MOD.

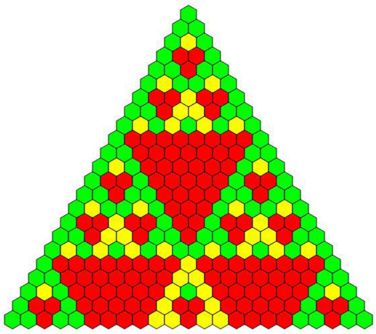




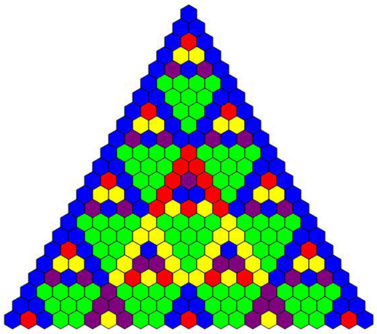
Za ostatke pri dijeljenju s 2, zapravo gledamo parne i neparne brojeve. Kako je zbroj parnih brojeva ponovo parni, svaki dulji niz parnih brojeva u sljedećem redu će generirati malo kraći niz također parnih brojeva - tako dobivamo „obrnute“ jednobojne trokute. Među neparnim brojevima (u preostalim trima trokutima) uočavamo isti obrazac, odnosno neparni brojevi čine trokut Sierpinskog.



Ako gledamo ostatke pri dijeljenju s 3, uočavamo isti fenomen što se tiče brojeva djeljivih s 3: zbroj takvih ponovno je takav, pa imamo obrnute jednobojne trokute. Jedina je razlika što se brojevi koji nisu djeljivi s 3 dijele u dvije skupine, pa umjesto podjele stranice na pola za „prethodnu razinu“ trokuta, dijelimo stranicu na trećine.



U osnovi ista pojava postoji i kod ostataka pri dijeljenju s 5, samo su 23 retka nedovoljna da se uoče dvije razine (jer je već $5^2 = 25$ veće od 23). Ipak, uočavamo prvu razinu, gdje se nalaze obrnuti jednobojni trokuti stranice 4. Među njima se nalaze obrasci u obliku „obrnutog V“ koje smo uočili i u prethodnom trokutu, samo su ovdje veći i raznobojni.



7.2. Istaknute linije Pascalova trokuta

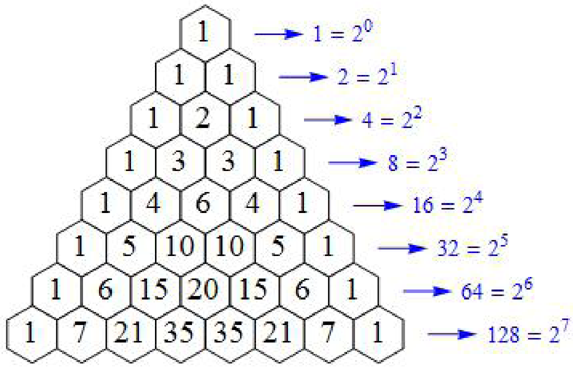
U ovoj će aktivnosti učenici:

- uočiti razne numeričke pravilnosti koje vrijede za brojeve na nekim istaknutim linijama Pascalova trokuta
- formulirati hipoteze na temelju uočenih fenomena i kreirati ideje za njihovo dokazivanje.

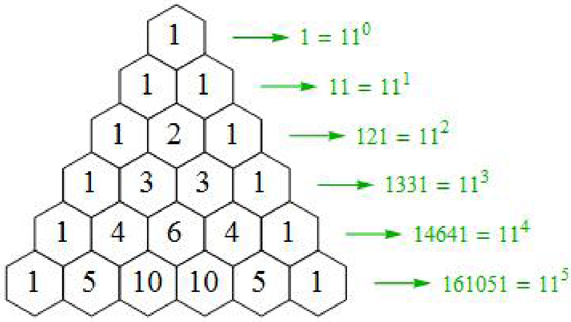
Oblik rada: rad u skupini

Kako bi to riješila teorija?

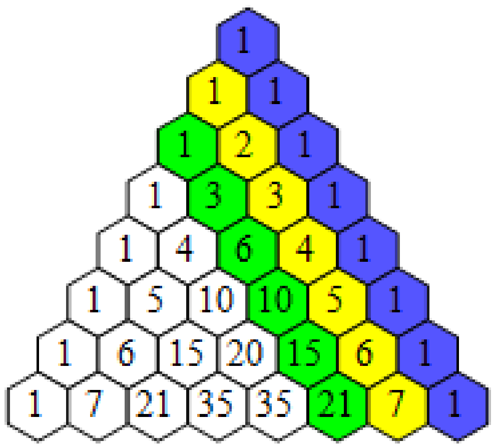
Iz načina na koji je zadan Pascalov trokut zaključujemo da u n-tom retku i k-tom stupcu stoji broj $\binom{n}{k}$ (brojevi zadovoljavaju iste početne uvjete i istu rekurziju). No, tada je zbroj n-tog retka $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^k\cdot 1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$ po binomnom poučku.



Konkatenacija znamenaka u dekadskom sustavu iskazuje se kao zbroj potencija od 10 s padajućim eksponentima (primjerice, $256=2\cdot 10^2+5\cdot 10^1+6\cdot 10^0$). To znači da opet možemo primijeniti binomni poučak: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 10^{n-k}=(10+1)^n=11^n$. Prijenosi samo znače da će višeznamenkasti broj pridonijeti ne samo „svojoj“ dekadskoj jedinici, nego i nekima iznad nje: recimo, $3\cdot 10^4+26\cdot 10^3=(3+2)\cdot 10^4+6\cdot 10^3$.

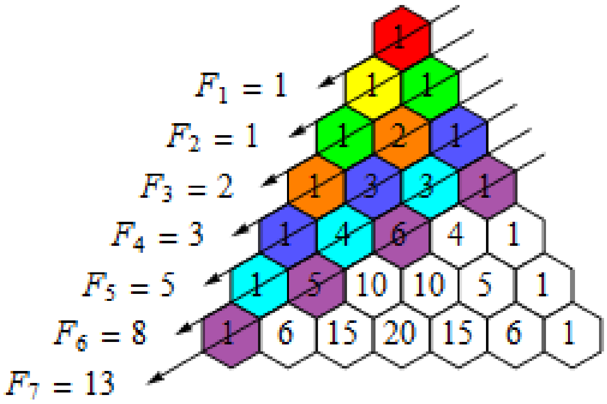


Iz formule za binomne koeficijente pomoću faktorijela dobivamo $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}$. Iz toga slijedi da su brojevi na posljednjoj dijagonali $\binom{n}{n}=1$, na pretposljednjoj $\binom{n}{n-1}=\frac{n}{1}=n$, a na dijagonali prije $\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}=\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$, što je upravo zbroj prvih $n-1$ prirodnih brojeva.



U retku čiji drugi član $\binom{n}{1}=n$ je prost broj, iz upravo izvedene formule slijedi da ćemo u brojniku imati faktor n. Za $0<k<n$ taj faktor se neće moći skratiti, jer su svi netrivijalni faktori nazivnika između 2 i k, a n je s njima relativno prosti. S obzirom na to da je binomni koeficijent nužno cijeli broj, zaključujemo da se svi faktori nazivnika moraju kratiti nekim preostalim faktorima u brojniku, te konačan rezultat mora biti djeljiv s n.

Možemo li više?



Zamislimo Pascalov trokut okružen nulama: tada je svaka jedinica sa strane, osim ove na samom vrhu, također zbroj dva broja iznad nje (0 + 1 na lijevoj strani, 1 + 0 na desnoj). U takvom okruženju, „nulta“ suma iznosi 0 (jer uopće nismo zahvatili uži Pascalov trokut), dok prva iznosi 1 (to je upravo ova jedinica na vrhu). U svakoj sljedećoj sumi, svaki član jednak je zbroju po jednog člana iz prethodne i po jednog iz prethodne sume (recimo, 1 + 6 + 5 + 1 = (1 + 0) + (3 + 3) + (1 + 4) + (0 + 1) = (1 + 3 + 1) + (3 + 4 + 1)), dakle pregrupiranjem pribrojnika dobivamo da je svaka sljedeća suma zbroj prethodnih dviju, odnosno sume su Fibonaccijevi brojevi.

7.3. Analiza i prikaz podataka na TI84

U ovoj aktivnosti ćemo analizirati i prikazivati podatke pomoću grafičkog kalkulatora TI84. Prije rada treba ponoviti/upoznati statističke pojmove: srednje vrijednosti, mjere raspršenja.

U ovoj će aktivnosti učenici:

- računati aritmetičku sredinu, medijan, donji kvartil i gornji kvartil
- prikazati podatke grafički pomoću histograma i brkate kutije
- usporediti srednje vrijednosti i raspršenost podataka
- donijeti zaključke na temelju analize podataka.

U čemu je problem?

Kako usporediti rezultate testa učenika 3.a i 3.b razreda i odrediti koji je razred uspješniji?

Kako to izgleda?

Učenici će podatke upisati u grafički kalkulator.

Možete li pretpostaviti?

Očekuje se da učenici procjenom dolaze do različitih zaključaka. Nakon sortiranja mogu očitati da je medijan 3.a razreda jednak 70, a medijan 3.b razreda jednak je 84. Oba skupa podataka su pomaknuti udesno. Također učenici mogu odmah primijetiti da u 3.b razredu ima 6 učenika više nego u 3.a.

Napravite model.

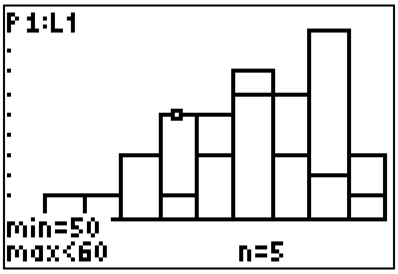
Razumno je za veličinu prozora odabrati 25 do 105, budući je raspon podataka u 3.a razredu od 45 do 100, a raspon podataka u 3.b razredu je od 28 do 100.

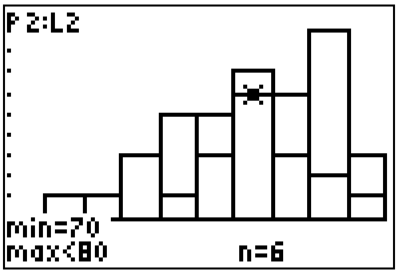
Učenike treba poticati da biraju različite širine razreda, 5, 10 i slično. U 3.a razredu ima 7 učenika s bodovima između 70 i 79, a u 3.b razredu je takvih 6 učenika.

Potražite pomoć tehnologije.

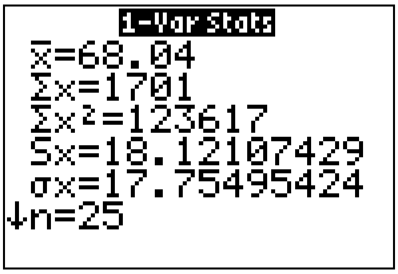
Oblik rada: Individualno

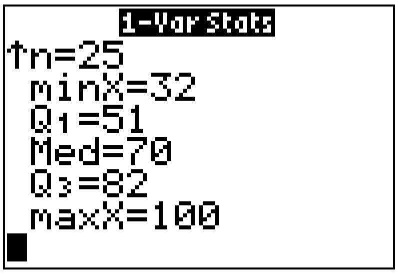
U datotekama L1.8xl i L2.8xl su upisane liste L1 i L2.

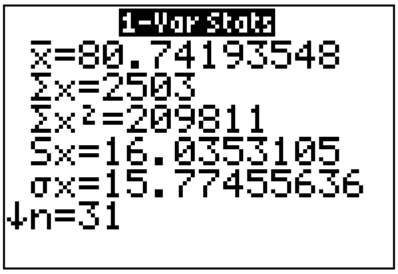


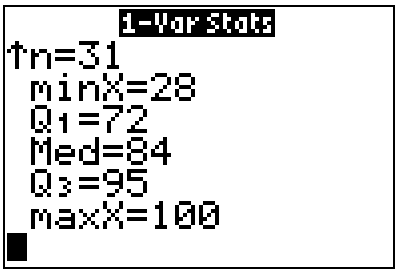


1. Teško je uspoređivati podatke ako su širine razreda različite. Različite frekvencije bi bile posljedica širine razreda a ne stvarnih podataka.
2. Oba razreda imaju rezultate pomaknute udesno. To znači da ima više učenika s boljim rezultatima. Rezultati 3.a razreda su raspršeniji, raspon bodova je veći nego kod 3.b razreda.
3. Gledajući pojedinačne histograme može se procijeniti da je aritmetička sredina rezultata 3.a razreda između 60 i 69, a aritmetička sredina rezultata 3.b razreda između 80 i 89. Medijani oba razreda su veći od aritmetičke sredine zbog toga što su rezultati pomaknuti udesno.
4. Očitavanjem podataka dolazimo do pravih, izračunatih vrijednosti. Aritmetička sredina rezultata 3.a razreda iznosi 68.04, a medijan je 70. Aritmetička sredina rezultata 3.b razreda iznosi 80.74, a medijan je 84.



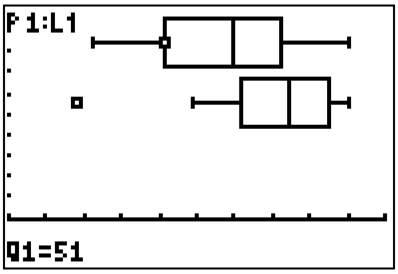


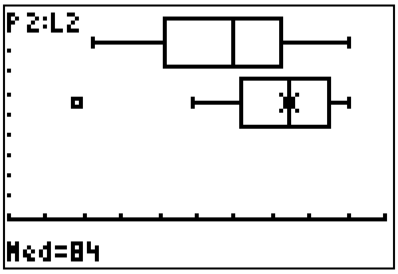




5. Ako širinu stupca povećamo smanjit će se frekvencija u tom razredu i obrnuto.

Uspoređivanje podataka pomoću brkate kutije





Kako bi to riješila teorija?

1. Interkvartilni raspon (IQR) za 3.a razred iznosi 31, a za 3.b razred 23.
2. Izdvojena „točkica“ je podatak koji se bitno razlikuje od ostalih podataka.
3. Računamo za 3.b razred $Q1 - 1.5 \cdot IQR = 72 - 1.5 \cdot 23 = 37.5$. Rezultat 28 je manji od dobivenoga broja te se naziva ekstremna vrijednost (outlier).

   Isti račun za 3.a razred $Q1 - 1.5 \cdot IQR = 51 - 1.5 \cdot 31 = 4.5$. Nema rezultata koji je manji od dobivenog broja što znači da u 3.a nema ekstremnih vrijednosti.
4. 25% rezultata u 3.a razredu su veći od 82, a u 3.b razredu su veći od 95.
   Iz oblika brkatih kutija zaključujemo da su rezultati učenika 3.a razreda raspršeniji, dok se rezultati učenika 3.b razreda manje međusobno razlikuju, osim ekstremne vrijednosti.
5. Možemo zaključiti da su učenici 3.b razreda postigli bolji rezultat, pouzdaniji su.

7.4. Vjerojatnost – domino lanac

U ovoj će aktivnosti učenici:

- računati vjerojatnosti jednostavnih događaja.

Rješenja:

3, 6, 5, 7, 1, 10, 2, 4, 9, 8

7.5. Pravedna igra

U ovoj će aktivnosti učenici:

- procijeniti koji je od zadanih događaja vjerojatniji
- odrediti frekvencije i relativne frekvencije izvodeći pokus
- odrediti relativne frekvencije za velik broj ponavljanja pokusa uz pomoć tehnologije
- računati metodom tablice vjerojatnost zadanih događaja
- povezati relativne frekvencije i vjerojatnost
- osmisliti pokus za zadanu tablicu relativnih frekvencija
- kreirati pravednu igru
- vrednovati svoj rad.

Kako to izgleda?

Prva igra:

	Prva igra	Druga igra
Vlatko	5	6
Maja	7	5

Možete li pretpostaviti?

Učenici će uočiti da se zbroj 5 može dobiti kao 2 + 3 i 1 + 4, a zbroj 7 samo kao 3 + 4. Stoga će zaključiti da u prvoj igri Vlatko ima veće šanse za pobjedu. U drugoj igri se zbroj 6 može dobiti kao 2 + 4 i 3 + 3 pa će možda pretpostaviti da oba igrača imaju jednake šanse za pobjedu. Ovaj je zaključak pogrešan, što će se pokazati u nastavku aktivnosti. Možda će neki učenici osjetiti da se zbroj 3 + 3 dobiva jednakim pribrojnicima, a zbroj 2 + 3 različitim te da šanse nisu jednake.

Napravite model.

Oblik rada: rad u paru

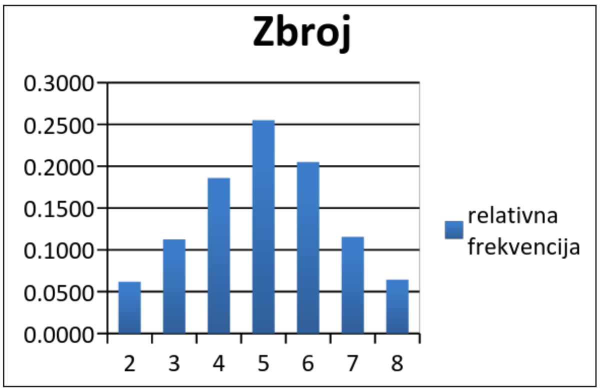
Nastavna pomagala: spiner za svaki par učenika

Učenici okreću spiner, određuju frekvenciju, računaju relativnu frekvenciju i popunjavaju tablicu. Relativne frekvencije će se razlikovati, ali vjerojatno će na nivou razreda najveća relativna frekvencija biti za zbroj 5, zatim za zbroj 6 i najmanja za zbroj 7.

Potražite pomoć tehnologije.

Uz pomoć tehnologije učenici mogu zavrtjeti spiner velik broj puta. Na primjer mogu koristiti stranicu http://nrich.maths.org/6033 Druga je mogućnost modeliranje pokusa u proračunskim tablicama. Primjer tablice i grafa relativnih frekvencija

Zbroj	Frekvencije	Relativne frekvencije
2	101	0,0618
3	184	0,1125
4	304	0,1859
5	417	0,2550
6	335	0,2049
7	189	0,1156
8	105	0,0642



Učenici zaključuju da se zbroj 5 javlja češće nego zbroj 6. Maja je bila u pravu kad se nije složila s prijedlogom. Vlatko nije bio u pravu kad se složio.

Kako bi to riješila teorija?

Učenici će popuniti tablicu

		Broj na drugom spineru			
		1	2	3	4
Broj na prvom spineru	1	2	3	4	5
	2	3	4	5	6
	3	4	5	6	7
	4	5	6	7	8

Zbroj 5 se u tablici pojavio 4 puta, a ukupni broj je 16. Vjerojatnost da zbroj bude 5 jest $\frac{4}{16} = 0.25$ Vjerojatnost da zbroj bude 6 jest $\frac{3}{16} = 0.1875$, a da bude 7 je $\frac{2}{16} = 0.125$. Primjećujemo da su relativne frekvencije za veliki broj ponavljanja pokusa približno jednake vjerojatnosti. Treba komentirati da postoji mogućnost da se relativne frekvencije i vjerojatnosti znatnije razlikuju, ali da to nije vjerojatno. Obije su igre nepravedne.

Možemo li više?

1. a. oba spinera imaju 5 međusobno jednakih polja s brojevima 1 – 5, računamo zbroj dobivenih brojeva

   b. jedan spiner ima 3 međusobno jednaka polja s brojevima 1 – 3, drugi ima 5 međusobno jednakih polja s brojevima 1 – 5, računamo zbroj dobivenih brojeva

   c. oba spinera imaju 4 međusobno jednaka polja s brojevima 1 – 4, računamo apsolutnu vrijednost razlike dobivenih brojeva

2. a. Popunjavamo tablicu

		Boja na drugom spineru			
		Lj	Lj	Lj	P
Boja na prvom spineru	P	poraz	poraz	poraz	pobjeda
	P	poraz	poraz	poraz	pobjeda
	P	poraz	poraz	poraz	pobjeda
	Lj	pobjeda	pobjeda	pobjeda	poraz

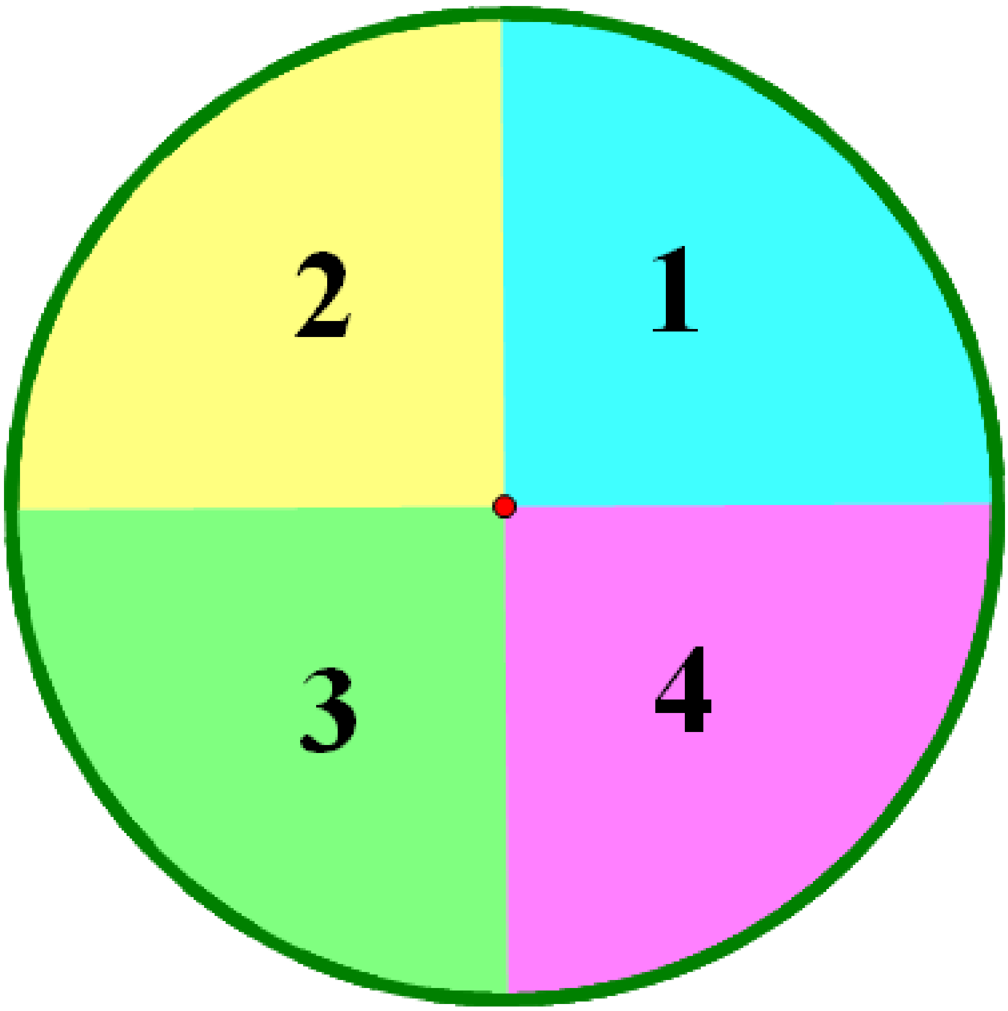
Vjerojatnost pobjede jest $\frac{6}{16} = 0.375$, vjerojatnost poraza jest $\frac{10}{16} = 0.625$, igra nije pravedna.

b.

		Boja na drugom spineru			
		Lj	P	Lj	P
Boja na prvom spineru	P	poraz	pobjeda	poraz	pobjeda
	P	poraz	pobjeda	poraz	pobjeda
	P	poraz	pobjeda	poraz	pobjeda
	Lj	pobjeda	poraz	pobjeda	poraz
	P	poraz	pobjeda	poraz	pobjeda
	Lj	pobjeda	poraz	pobjeda	poraz

Poraz i pobjeda jednako su vjerojatni, igra je pravedna.

Spiner s četirima poljima



7.6. Problem rođendana

Što ćemo raditi?

U ovoj ćemo aktivnosti s učenicima istražiti i analizirati Problem rođendana kao primjer događaja čija je vjerojatnost obično neočekivana, suprotna našoj intuiciji ili predviđanjima. Učenici će računati i vjerojatnost „a posteriori“ i „a priori“.

U ovoj će aktivnosti učenici:

- procijeniti vjerojatnost događaja
- koristiti metodu simulacije za generiranje podataka
- istražiti vjerojatnost događaja uz pomoć grafičkog kalkulatora
- primijeniti osnovne principe računanja vjerojatnosti
- generalizirati uočene pravilnosti koristeći matematičku formulu i grafički prikaz
- interpretirati dobivene rezultate.

Možete li pretpostaviti?

Oblik rada: rad u skupini

Učenici će unutar skupine raspravljati o postavljenom problemu, pokušati procijeniti je li isplativo kladiti se da će se u razredu od 28 učenika rođendani bar dvaju učenika podudarati, odnosno je li vjerojatnost podudaranja veća od 0.5? Ako se podudaranje i pojavilo unutar razreda, vjerojatno neće procijeniti da je vjerojatnost podudaranja visoka bez obzira radi li se o 23, 28 ili 45 učenika.

Potražite pomoć tehnologije.

Oblik rada: individualni ili rad u paru (ovisno o količini grafičkih kalkulatora)

Nakon što su procijenili traženu vjerojatnost, učenici će iskustveno, koristeći simulaciju na grafičkom kalkulatoru, prikupljati i bilježiti podatke o broju podudaranja i računati relativne frekvencije. Tu bi trebalo s učenicima raspraviti i zauzeti stav oko toga što ako se pojave neki nemogući datumi? Promijeniti način generiranja podataka ili jednostavno zanemariti taj pokušaj i ponoviti simulaciju?

Nakon zabilježenih vlastitih podataka, učenici će prikupiti podatke od ostalih članova svoje skupine, a zatim i od ostalih skupina. Konačno, vjerojatnost podudaranja rođendana u skupini od 28 osoba trebala bi iznositi približno 0.654, a za 23 osobe 0.507.

Kako bi to riješila teorija?

Oblik rada: rad u skupini

Nakon vjerojatnosti „a posteriori" učenici će računati teorijsku vjerojatnost podudaranja rođendana u skupini od n osoba, $n \in \{20, 23, 28, 30, 60\}$.

$$n = 20,\ p_{20} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 346}{365^{20}} = 0.41144,$$

$$n = 23,\ p_{23} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}} = 0.5073,$$

$$n = 28,\ p_{28} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - 27)}{365^{28}} = 0.65446,$$

$$n = 30,\ p_{30} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - 29)}{365^{30}} = 0.70632,$$

$$n = 60,\ p_{60} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - 59)}{365^{60}} = 0.99412.$$

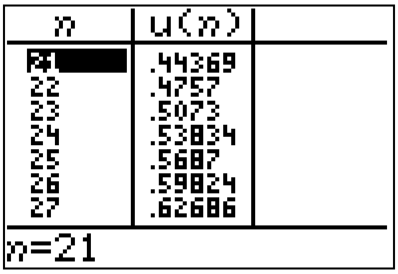
Učenici će imati problema s računanjem vjerojatnosti za $n = 60$ pomoću kalkulatora. Grafički kalkulator javlja grešku od $n = 40$ na više. Tu se može koristiti računalo i računati pomoću proračunskih tablica, a zatim i prikazati podatke grafički. Ili, kao što je u aktivnosti predviđeno, možemo koristiti grafički kalkulator.

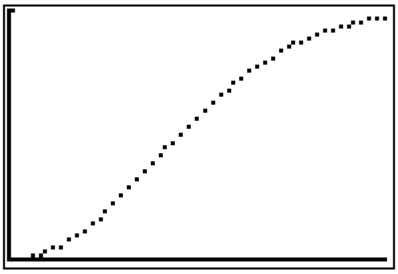
Možemo li više?

Učenici će zapisati opću formulu za računanje vjerojatnosti da dvije osobe u skupini od n osoba imaju rođendan isti dan:

$$p_n = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} \text{ ili } p_n = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (366 - n)}{365^n}.$$

Iz tablice i grafa funkcije koja opisuje ovisnost vjerojatnosti $u(n) = p_n$ o veličini promatrane skupine n, dajemo odgovore na pitanja o veličini skupine.





$n = 23$ je najmanji n za koji je $p_n > 0.5$,

$n = 35$ je najmanji n za koji je $p_n > 0.8$,

$n = 41$ je najmanji n za koji je $p_n > 0.9$.

U kalkulatoru se formula za p_n upisuje u drugačijem, učenicima manje poznatom obliku, kao rekurzivna formula. Ovo je dobra prilika da se učenicima približi i objasni princip rekurzije.

$$u(n) = 1 - [1 - u(n-1)] \cdot \frac{(366 - n)}{365}.$$

8. Financijska matematika

8.1. Zatezne kamate

U ovoj će aktivnosti učenici:

- ponoviti formule jednostavnoga kamatnog računa
- računati zatezne kamate
- odrediti utjecaj pojedinog parametra na konačnu vrijednost novca
- primijeniti jednostavni kamatni račun.

Aktivnost je predviđena za jedan školski sat.

Kako to izgleda?

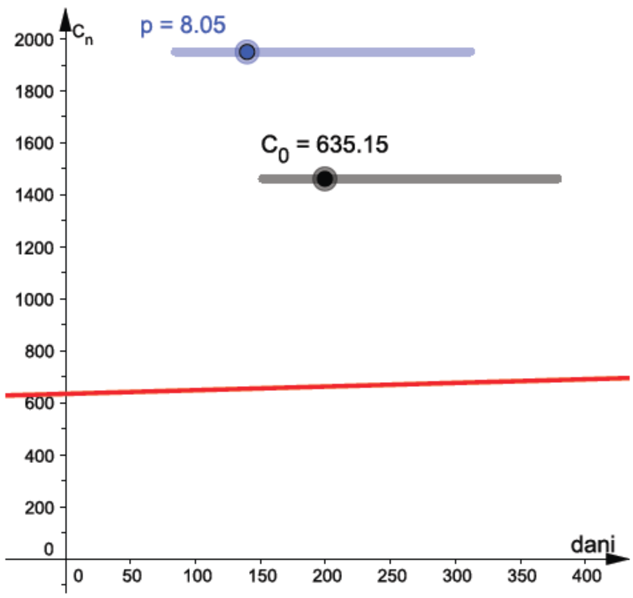
Rješenje početnog primjera: $K = C_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot n = C_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{365} = 1270.30 \cdot \frac{8.05}{100} \cdot \frac{2}{365} = 0.56\,\text{kn}$

Možete li pretpostaviti?

1. svibnja će platiti 18.77 kamata. Iznos kamata linearno ovisi o broju dana.

Napravite model.

Ako je početni iznos dvostruko manji i konačni iznos je dvostruko manji. Ako se smanji za 100 kuna, konačni se iznos smanji za 100 kuna uvećanih za kamate na tih 100 kuna. Ako se kamatna stopa poveća za k %, konačni se dug poveća za iznos koji računamo po formuli: $C_0 \frac{k \cdot d}{100 \cdot 365}$.



Možemo li više?

Nismo platili iznos: $\dfrac{35.6\cdot 100\cdot 365}{8.05\cdot 312} = 517.36$ kn.

Primijenite naučeno.

Konačna cijena računala bila je veća za 12.47 kn.

8.2. Novac stvara novac

U ovoj će aktivnosti učenici:

- odrediti formule složenoga kamatnog računa
- usporediti jednostavni i složeni kamatni račun
- računati relativnu kamatnu stopu
- odrediti utjecaj pojedinog parametra na konačnu vrijednost novca
- donositi odluke o ulaganju novca.

Aktivnost je predviđena za dva školska sata.

Možete li pretpostaviti?

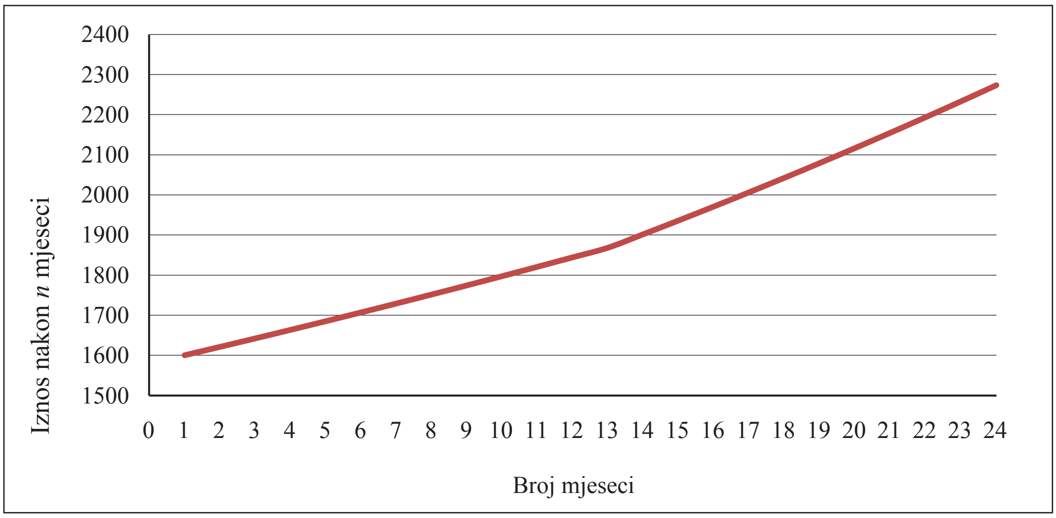
Možda će učenici reći da je prihvatljivija bratova ponuda koji nudi 15% kamata za godinu dana, što iznosi 1600 + 15% od 1600 = 1840 kn, ali iznos nije dovoljan za kupnju mobitela.

Napravite model.

Period < 12 mj	Kamate 1.3 %	Ukupno
0		1600
1	20,80	1620,80
2	21,07	1641,87
3	21,34	1663,21
4	21,62	1684,84
5	21,90	1706,74
6	22,19	1728,93
7	22,48	1751,40
8	22,77	1774,17
9	23,06	1797,24
10	23,36	1820,60
11	23,67	1844,27
12	23,98	1868,24

Period > 12 mj	Kamate 1.8%	Ukupno
12		1868,24
13	33,63	1901,87
14	34,23	1936,10
15	34,85	1970,95
16	35,48	2006,43
17	36,12	2042,55
18	36,77	2079,31
19	37,43	2116,74
20	38,10	2154,84
21	38,79	2193,63
22	39,49	2233,12
23	40,20	2273,31
24	40,92	2314,23

Prikazani model računa štednju do 12 mjeseci po kamatnoj stopi od 1.3%, a nakon 12 mjeseci od 1.8%. Očito je povoljnije uložiti novac u banku. Nakon godinu dana imat ćete 1868.24 kn, a nakon 17 mjeseci 2042.55 kn što je dovoljno za kupnju mobitela.



Možemo li više?

Ako bi štedili po prethodnom modelu, do milijun kuna bi došli nakon 353 mjeseca ili 29.4 godine.

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

a.

$$C_n = 10000 + 10000 \cdot \frac{4.1 \cdot n}{100}$$

$$C_n = 10000 + 410 \cdot n$$

linearna funkcija

b.

$$C_n = 10000 \cdot \left(1 + \frac{4.1}{100}\right)^n$$

$$C_n = 10000 \cdot 1.041^n$$

eksponencijalna funkcija

Zadatak 2.

- **Relativna kamatna stopa je** $p_r = \frac{p}{m}$**,** gdje ***m*** određuje koliko se puta provodi obračun kamata u odnosu prema osnovnom vremenskom intervalu (nominalne) kamatne stope.

  Tada je $C_n = C_0\left(1 + \frac{p_r}{100}\right)^n$.

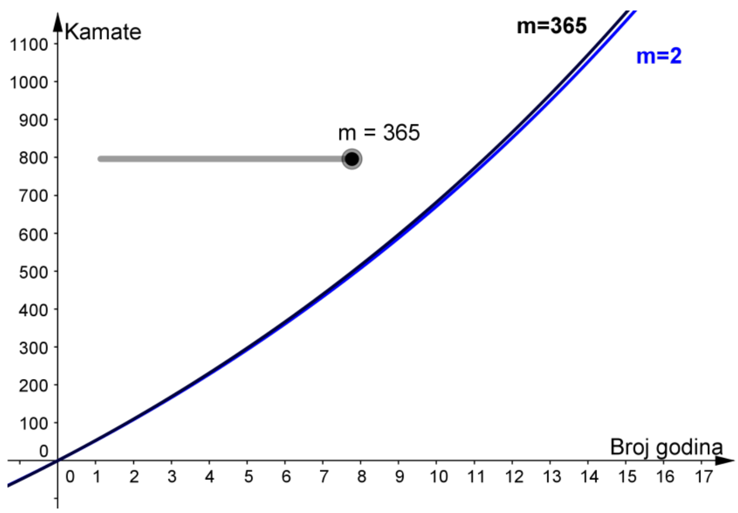
Pogledajmo što se događa s iznosom novca u banci:

a. i kamata i obračun su godišnji, $m = 1$ $\qquad C_5 = 1000\left(1 + \frac{5.2}{100}\right)^5 = 1288.48\ \text{kn}$

b. 5 godina = 10 polugodišta, $m = 2$ $\qquad C_{10} = 1000\left(1 + \frac{2.6}{100}\right)^{10} = 1292.63\ \text{kn}$

c. 5 godina = 20 kvartala, $m = 4$ $\qquad C_{20} = 1000\left(1 + \frac{1.3}{100}\right)^{20} = 1294.76\ \text{kn}$

d. 5 godina = 60 mjeseci, $m = 12$ $\qquad C_{60} = 1000\left(1 + \frac{5.2}{12 \cdot 100}\right)^{60} = 1296.20\ \text{kn}$



Ako je obračun dnevni, kamate iznose 296.90 kn.

Zadatak 3.

Trebaju štedjeti približno 39 mjeseci.

8.3. Što se krije iza naziva kamatne stope?

U ovoj će aktivnosti učenici:

- računati efektivnu kamatnu stopu
- odrediti formulu za izračunavanje efektivne kamatne stope
- računati konformnu kamatnu stopu
- odrediti formulu za izračunavanje konformne kamatne stope
- uspoređivati relativnu i konformnu kamatnu stopu uz iste početne uvjete
- donositi odluke o ulaganju novca.

Aktivnost je predviđena za dva školska sata.

Kako to izgleda?

Relativna kamatna stopa p_r(%)	**EKS**
2.945	5.97673025
1.47	6.010929279
0.489166667	6.030531119
0.016054795	6.034602809

Najveći će iznos biti u banci B4 jer je ukamaćivanje dnevno, a kamatna stopa nije puno manja od one kada je ukamaćivanje polugodišnje. Da bi štednja u banci B1 bila najpovoljnija trebalo bi povećati kamatnu stopu s 5.89 na 5.946.

Konformna kamatna stopa:

$$C_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) = C_0 \cdot \left(1+\frac{p'}{100}\right)^m \Rightarrow p' = 100 \cdot \left(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100}} - 1\right)$$

Vrijeme ukamaćivanja	Broj obračunskih razdoblja m	Relativna kamatna stopa p_r (%)	Konformna kamatna stopa p' (%)
Godišnje	1	12	12
Polugodišnje	2	6	5.8301
Kvartalno	4	3	2.8737
Mjesečno	12	1	0.9489

Konformna kamatna stopa je manja od relativne ako je $m > 1$, a ako je $m < 1$, konformna kamatna stopa je veća od relativne kamatne stope.

Zadatak 1.

Konformna kamatna stopa:

$$p' = 100 \cdot \left(\sqrt{1+\frac{p}{100}} - 1\right) = 100 \cdot \left(\sqrt{1+\frac{2.2}{100}} - 1\right) = 1.09\,\%.$$

Neka je x iznos koji trebamo danas uložiti da bi za dvije godine imali iznos veći od 70 000 kn. Tada vrijedi: $25000 \cdot \left(1+\frac{1.09}{100}\right)^{2\cdot 7} + x\left(1+\frac{1.09}{100}\right)^{2\cdot 2} > 70000 \Rightarrow x > 39\,166.77$ kn.

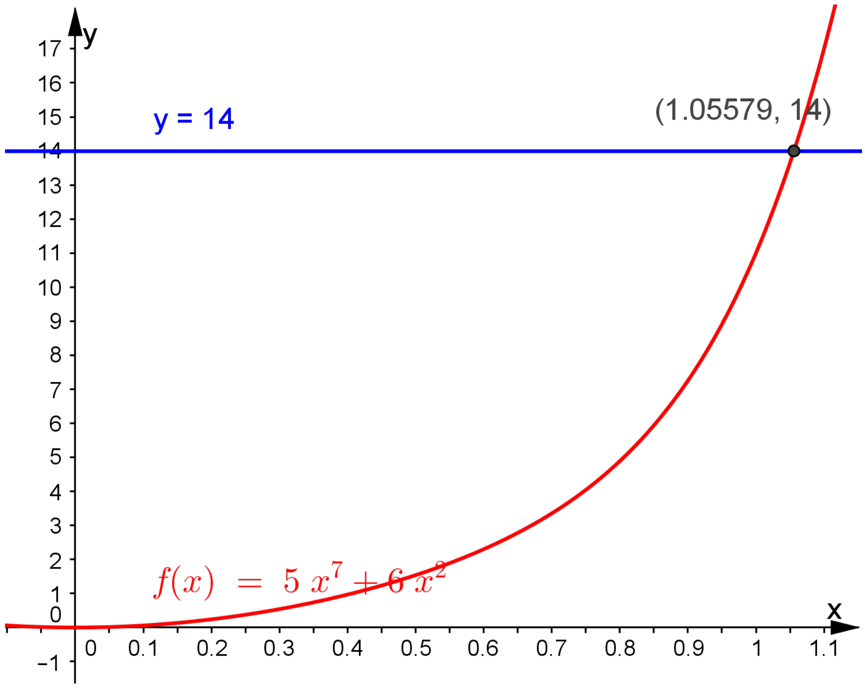
Zadatak 2.

Ako se tražena nominalna stopa primjenjuje i prvih 5 godina na glavnicu od 25000 kn, tada rješavamo jednadžbu:

$$25000 \cdot \left(1+\frac{p'}{100}\right)^{2\cdot 7} + 30000\left(1+\frac{p'}{100}\right)^{2\cdot 2} = 70000 \Rightarrow \text{(supstitucija) } x = \left(1+\frac{p'}{100}\right)^2 \Rightarrow$$

$$25000 \cdot x^7 + 30000x^2 = 70000$$

$$5x^7 + 6x^2 = 14$$



Uz pomoć grafičkog kalkulatora ili računala rješenje ove jednadžbe je $x = 1.0557939$. Tada je

$$1.0557939 = \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^2 \Rightarrow p' = 2.7518\,.$$

Zadatak 3.

Relativna kamatna stopa: $p_R = \frac{2.2}{2} = 1.1\%$.

Tada vrijedi: $25000 \cdot \left(1 + \frac{1.1}{100}\right)^{2\cdot 7} + x\left(1 + \frac{1.1}{100}\right)^{2\cdot 2} > 70000 \Rightarrow x > 27890.20$ kn.

8.4. Kredit 1

U ovoj će aktivnosti učenici:

- istražiti vezu između kamata, glavnice i mjesečnog obroka
- prepoznati relativnu mjesečnu kamatnu stopu
- primijeniti formulu za određivanje kamata $K = \frac{C_i \cdot p}{12 \cdot 100}$
- izrađivati otplatnu tablicu
- analizirati elemente tablice po razdobljima i na kraju otplate.

Tema je za dva školska sata.

Učenici mogu raditi u paru radi kvalitetnije analize, tablicu izraditi na računalu (za svaki par učenika potrebno jedno računalo).

Možete li pretpostaviti?

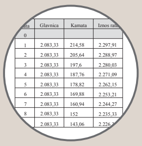
Većina učenika će računati jednokratne kamate na cjelokupni iznos ne uzimajući u obzir da se dug svaki mjesec smanjuje. Tada će račun izgledati ovako:

- 5.5% od 1000 je 55 eura
- 55 € plus početni iznos od 1000 € daje ukupni dug 1055 €
- 1055 € vraća u mjesečnim ratama godinu dana ili
- mjesečno mora vratiti 87.92 € što je u kunama (tečajnu listu može pronaći na stranicama HNB-a) približno $87.92 \cdot 7.54 = 662.92$ kn

1. Tin bi trebao mjesečno odvojiti od svoje stipendije 662.92 kn.
2. Tin si može priuštiti odlazak u Barcelonu uz stipendiju od 800 kn.
3. Nakon godinu dana Tin bi morao vratiti ukupno 1055 €.
4. Naknada (kamate) banci za uslugu posudbe iznosi 55 €.

Napravite model.

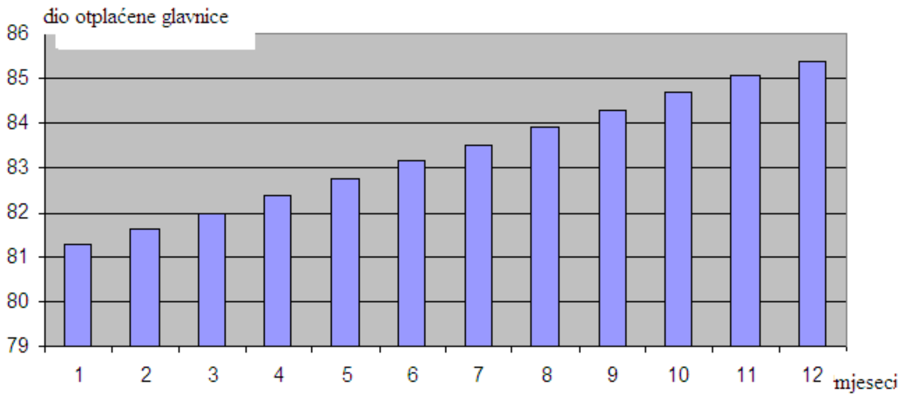
- Iznos mjesečne rate koju bi Tin morao vratiti je 85,79 €.
- Ukupne kamate iznose 30,03 €, a ukupan dug 1.030,03 €.
- Ove se vrijednosti ne slažu s Tinovom pretpostavkom.
- Ukupni iznos otplaćenog duga manji je nego kod Tinove pretpostavke, jer se kamate računaju svaki mjesec na ostatak duga iz prošlog mjeseca, nedospjela glavnica, a ne jednom godišnje na cijeli iznos duga.
- Svaki mjesečni obrok sastoji se od dijela duga, glavnice, i kamata na preostali dug.
- Naša mjesečna otplatna rata stalno je ista. Svaki sljedeći mjesec naš dug se smanjuje te su i kamate za to obračunsko razdoblje manje, pa se udio glavnice u mjesečnom obroku povećava.
- Dug na kraju 9. mjeseca iznosi 255,13 € .
  Zbroj kamata za svako obračunsko razdoblje jednak je ukupnim kamatama, zbroj svih mjesečnih otplatnih obroka jednak je ukupnom dugu, tj. početnom dugu uvećanom za kamate.
- Konačna vrijednost promijeni se u odnosu na početnu 3.003%.
  Račun: $1000 + p \cdot 1000 = 1030.03 \Rightarrow p = 3.003\%$.



Kako bi to riješila teorija?

Formule:

kamate za *i*-to razdoblje: $K_i = \dfrac{C_{i-1} \cdot p}{12 \cdot 100}$, ukupne kamate: $K = \sum K_i$, ukupni dug: $C = \sum C_i$



Grafički prikaz može biti u obliku koji želi učenik. Mora se uočiti rast mjesečno otplaćene glavnice, smanjenje mjesečne kamate i smanjenje ostatka duga.

Možemo li više?

Kamate se računaju 5 godina, mjesečno, ali svaki put na umanjenu vrijednost. U tih 5 godina kamate se obračunavaju 60 puta. Račun daje kamatu za 1 godinu, a mi ih imamo 5, pa je iznos sigurno veći od danog.

Moguć Tinov izračun za mjesečnu ratu:

1. slučaj: $10000 + 5.5\% \cdot 10000 = 10550, \quad 10550 : 60 = 175.83\,€$
2. slučaj: $10000 + 5 \cdot 5.5\% \cdot 10000 = 12750, \quad 12750 : 60 = 212.50\,€$
3. slučaj: rata negdje između 175.83 € i 212.50 €.

Analiza otplatne tablice.

- Ukupne kamate su 1 460,70 €.
- Ukupni je dug veći od 10 550 € jer je rok otplate dulji od godine dana.
- Konačna vrijednost promijeni se u odnosu na početnu 14.6%.
- Na kraju treće godine otplate Tin mora raspolagati iznosom od 4 331,82 € da bi u cijelosti otplatio dug.

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

RB	Glavnica	Kamata	Mjesečni obrok	Nedospjela glavnica
0				5.000,00
1	406,26	22,92	429,18	4.593,74
2	408,13	21,05	429,18	4185,61
3	410,00	19,18	429,18	3775,61
4	411,89	17,30	429,18	3364,72
5	413,76	15,42	429,18	2950,96
6	415,66	13,52	429,18	2535,30
7	417,56	11,62	429,18	2117,74
8	419,47	9,71	429,18	1698,27
9	421,40	7,78	429,18	1276,87
10	423,33	5,85	429,18	853,54
11	425,27	3,91	429,18	428,27
12	427,22	1,96	429,18	1,05
Suma:				

Račun:

- Iz prvog obračunskog razdoblja moramo saznati kamatnu stopu:

$$i = 1, \quad K_i = \frac{C_{i-1} \cdot p}{12 \cdot 100}, \quad 22{,}92 = \frac{5000 \cdot p}{12 \cdot 100} \Rightarrow p = 5.5\ \%$$

$$i = 2, \quad K_2 = \frac{4593{,}74 \cdot 5.5}{1200} = 21.05, \quad C_1 = 429.18 - 21.05 = 408.13,$$

Nedospjela glavnica nakon 2. mjeseca = 4593.74 – 408.13 = 4185.61 itd.

- Za 12. otplatu preostala glavnica morala bi biti 0.00, a ne 1.05. Do ove razlike došlo je zbog zaokruživanja na dvije decimale. U tom se slučaju taj iznos pribroji zadnjoj rati: $429.18 + 1.05 = 430.23$.

Zadatak 3.

Izračun jednakih anuiteta:

$$C_1 = C_0 + K_1 - a = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{12 \cdot 100}\right) - a = C_0 \cdot r - a,\;\; C_2 = C_1 \cdot r - a, \cdots, C_{12} = C_{11} \cdot r - a\,.$$

Ako izrazimo C_{11} pomoću C_{10}, zatim C_{10} pomoću C_9 i tako dalje do C_0, dobit ćemo izraz:

$$C_{12} = C_0 \cdot r^{12} - a \cdot r^{11} - a \cdot r^{10} - \cdots - a \cdot r - a\,.$$

Pomoću sume geometrijskog niza dobit ćemo $C_{12} = C_0 \cdot r^{12} - a \cdot \frac{r^{12} - 1}{r - 1}$. Iz $C_{12} = 0$ slijedi:

$$C_0 \cdot r^{12} = a \cdot \frac{r^{12} - 1}{r - 1} \Rightarrow a = C_0 r^{12} \frac{r - 1}{r^{12} - 1}\,.$$

Iznos anuiteta: $a = C_0 r^{12} \frac{r - 1}{r^{12} - 1}$.

Zadatak 4.

Učenici će lako provjeriti da će gornja formula vrijediti i za drugi kredit ako uzmu u obzir da je broj obračunskih obroka 60, uz relativni kamatni faktor $r_R = 1 + \frac{p}{12 \cdot 100}$.

8.5. Kredit 2

U ovoj će aktivnosti učenici :

- analizirati otplatne tablice
- uočiti razliku između rata i anuiteta
- grafički prikazivati promjenu iznosa kamata i ostatka kredita s mjesecima
- izrađivati otplatne tablice.

Aktivnost je predviđena za dva školska sata.

Zadatak 2.

Prvi učenik:

Rata	Glavnica	Kamata	Iznos Rate	Preostali iznos kredita
0				20.000,00
1	1.666,67	85	1.751,67	18.333,33
2	1.666,67	77,92	1.744,59	16.666,66
3	1.666,67	70,83	1.737,50	14.999,99
4	1.666,67	63,75	1.730,42	13.333,32
5	1.666,67	56,67	1.723,34	11.666,65
6	1.666,67	49,58	1.716,25	9.999,98
7	1.666,67	42,5	1.709,17	8.333,31
8	1.666,67	35,42	1.702,09	6.666,64
9	**1.666,67**	**28,33**	**1.695,00**	**4.999,97**
10	1.666,67	21,25	1.687,92	3.333,30
11	1.666,67	14,17	1.680,84	1.666,63
12	1.666,63	7,08	1.673,71	0
Suma:	20.000,00	552,5	20.552,50	

2. učenik: (Iznos anuiteta je **1.713,07** kuna)

Anuitet	Glavnica	Kamata	Iznos anuiteta	Preostali iznos kredita
0				20.000,00
1	1.628,07	85	1.713,07	18.371,93
2	1.634,99	78,08	1.713,07	16.736,95
3	1.641,93	71,13	1.713,07	15.095,01
4	1.648,91	64,15	1.713,07	13.446,10
5	1.655,92	57,15	1.713,07	11.790,18
6	1.662,96	50,11	1.713,07	10.127,22
7	1.670,03	43,04	1.713,07	8.457,20
8	1.677,12	35,94	1.713,07	6.780,07
9	1.684,25	28,82	1.713,07	5.095,82
10	1.691,41	21,66	1.713,07	3.404,41
11	1.698,60	14,47	1.713,07	1.705,82
12	1.705,82	7,25	1.713,07	0
Suma:	20.000,01	556,8	20.556,84	

9. Teorija grafova

9.1. Šetnja, staza, put...

Što ćemo raditi?

U ovoj će aktivnosti učenici:

- koristiti osnovnu terminologiju teorije grafova (vrh, brid, šetnja, staza, put, ciklus, stablo...)
- razlikovati razapinjuće stablo, Eulerov i Hamiltonov ciklus.

Trajanje aktivnosti: dva školska sata

Oblik rada: rad u skupinama i individualno

Nastavna pomagala: škare i ljepilo.

Nastavna sredstva: nastavni listić.

U čemu je problem?

U prilogu 1 nacrtani su razni grafovi na karticama koje možete izrezati vi ili učenici. Učenike podijelite u četveročlane grupe i podijelite im kartice (prilog1). Učenici će nastojati grupirati dane kartice prema nekome zajedničkom svojstvu, iako ne znaju definiciju i osnovne pojmove teorije grafova. Primjerice:

Uočit će da neki grafovi imaju petlju, neki ne (2. i 9.). Kod grafova 8. i 9., neke vrhove direktno povezuju dva brida. Uočit će da se grafovi 1., 3. i 10. (stabla) razlikuju od ostalih, ali možda ih neće znati opisati. Sigurno će uočiti da (usmjereni) grafovi 9. i 14. imaju „strelice“, a ostali nemaju te da su kod grafova 11., 14. i 15. bridovima pridruženi brojevi (težinski grafovi). Mogu uočiti i da je graf 7. nepovezan s jednim bridom i dvama vrhovima, a svi su ostali grafovi povezani.

Ako će brojiti bridove i/ili vrhove, možda će uočiti da kod nekih grafova iz jednog vrha uvijek izlazi isti broj bridova (4., 5., 8., 12., 13., 14.,16., 18.).

Možda će uočiti da se graf „kućice“ iz zadatka 6. može nacrtati bez da se podiže olovka s papira. To je još moguće i u 5., 8., 11., 13., 14., 18.

Primijenite naučeno.

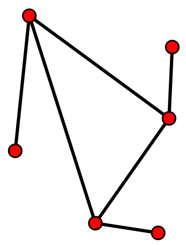
Zadatak 1.

a. Jednostavni grafovi su A i C. B i D imaju višestruki brid, a graf E ima petlju u jednom vrhu.

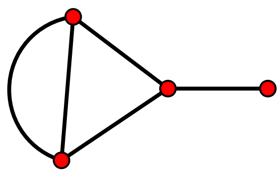
b. Danim algoritmom redom dobivamo brojeve: 6, 7, 6, 5 i 8. Ovi brojevi očito predstavljaju ukupan broj bridova koje ima dani graf. Zaključujemo:
Zbroj stupnjeva svih vrhova u proizvoljnom grafu uvijek je parni broj. Svaki brid, primjerice, AB se broji dva puta – jednom kao brid koji izlazi iz vrha A, a drugi put kao brid koji izlazi iz vrha B. Tada je ukupan zbroj svih stupnjeva vrhova parni broj i iznosi $2e$, gdje je e ukupan broj bridova.

Zadatak 2.

a. 3 vrha stupnja 1 i 3 vrha stupnja 3



b. 1 vrha stupnja 1 i 3 vrha stupnja 3



c. 2 vrha stupnja 1 i 3 vrha stupnja 3 (nemoguće jer je ukupan zbroj svih stupnjeva vrhova neparni broj, a pokazali smo da mora biti parni)

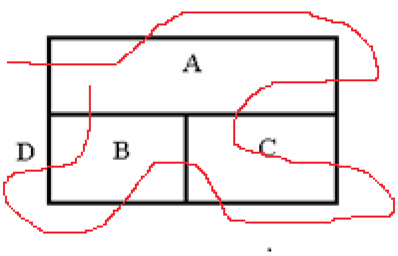
Zadatak 3.

a. staza: EDCAB, ECABC... ; put: EDCAB, ABCE;
ciklus: ABCDECA (Eulerov), EDCABCE, Hamiltonov – nema

b. staza: ADBCD, DCAD... ; put: ABDC, BADC... ;
ciklus: BACDB, DACBD (Hamiltonovi ciklusi); Eulerov – nema

Zadatak 4.

a.



b.

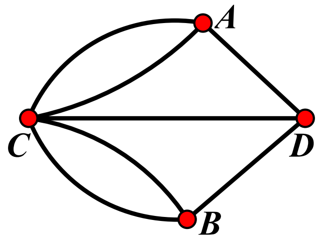
Graf sa slike opisuje problem iz zadatka a. Vrhovi A, B, C, D predstavljaju područja unutar (A, B, C) i izvan pravokutnika (D), a bridovi 10 stranica pravokutnika A, B, C.

Zadatak 5.

Može: BACBDCEDA je Eulerova staza – šetnja koja prolazi svim bridovima bez ponavljanja.

Zadatak 6. *Königsberški mostovi*

Skica situacije u Königsbergu prikazana je na grafu:



Vrhovi A, B, C, D na grafu predstavljaju područja – dijelove grada na koje je rijeka podijelila grad, a bridovi 7 mostova. U zadatku se ustvari ispituje je li ovaj graf Eulerov.

Promotrimo vrh A. Ako on nije početak ni kraj šetnje, onda nam za svaki dolazak u A i odlazak iz A trebaju dva različita mosta. No, dio grada A spojen je s ostalim dijelovima trima mostovima pa je takva šetnja nemoguća. Šetnja bi bila moguća samo ako bi u A bio početak ili kraj. Analogno zaključujemo i za vrhove B i D. Proizlazi da je šetnja izvediva samo ako je u svakom od vrhova A, B i D početak ili kraj šetnje, što je naravno nemoguće.

Dakle, općenito vrijedi:

Neusmjereni graf je Eulerov ako i samo ako je svaki njegov vrh parnog stupnja.

Graf ima Eulerovu stazu ako i samo ako ima najviše dva vrha neparnog stupnja.

Zadatak 7.

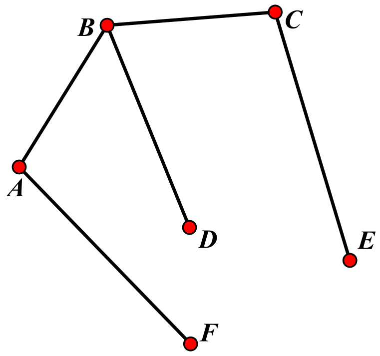
a. AFE, ABDCE;

b. AFABDCE, AFABCDCE...

c. ABDCEFA;

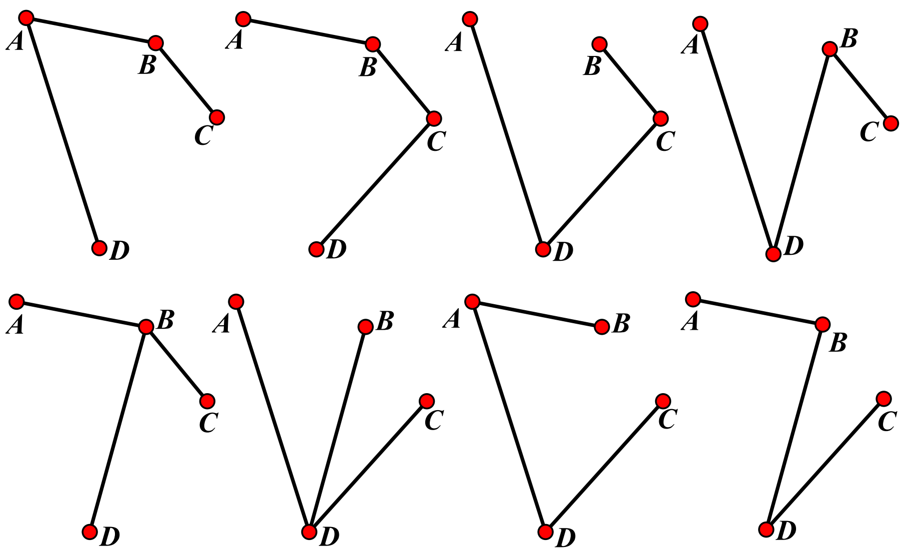
d. DBAFECD

e.



Zadatak 8.

a.



b. CEDABC, CEBADC, CBEADC, CDEABC, CBAEDC, CDAEBC, CDABEC, CBADEC.

Zadatak 9.

C. Razapinjuće stablo (Sadrži najmanje bridova)

Zadatak 10.

Svaki jednostavni graf sa šest vrhova ili sadrži trokut određen nekim trima vrhovima ili trima vrhovima koji međusobno nisu spojeni direktno.

9.2. U susjedstvu

Što ćemo raditi?

U ovoj će aktivnosti učenici:

- prikazati stvarne podatke grafom i matricom susjedstva
- usporediti različite prikaze grafom
- crtati graf iz matrice susjedstva i obratno
- modelirati matricom susjedstva i grafom.

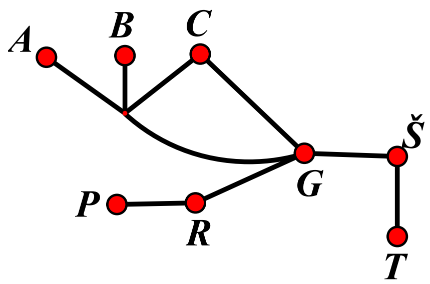
Trajanje aktivnosti: jedan školski sat.

Oblik rada: Rad u paru i individualno

U čemu je problem?

Graf koji prikazuje mrežu povezanosti računala u tvrtki *Sunce*.

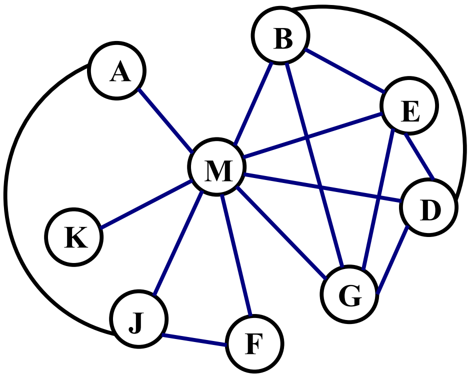
Učenici uspoređuju nacrtane mreže u paru. Trebali bi dobiti različite grafove koji korektno prikazuju zadanu povezanost.



Možete li pretpostaviti?

Izomorfni su grafovi: A i L; B i H; D,E i I; G i J.

Na osnovu tablice može se zaključiti tko se međusobno poznaje. Odgovarajući graf je:



Za jednostavne grafove, bez petlji i višestrukih bridova, elementi matrice susjedstva su jedino 0 ili 1, a u protivnom mogu biti i drugi brojevi.

Matrica susjedstva nije simetrična za usmjerene grafove.

Zadatak 1.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice susjedstva su jednake pa su dani grafovi izomorfni.

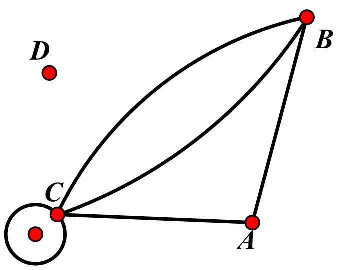
Zadatak 2.

Matrice susjedstva su:

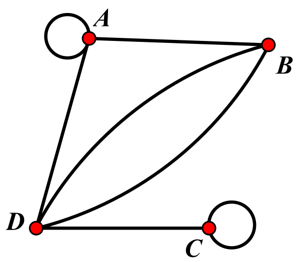
a. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & 0 & 1 & 0 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$ ili $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Zadatak 3.

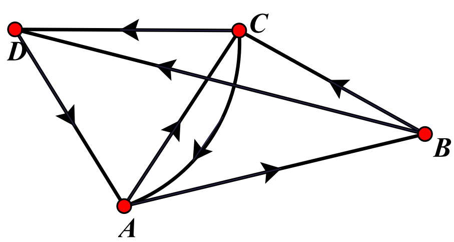
a.



b.

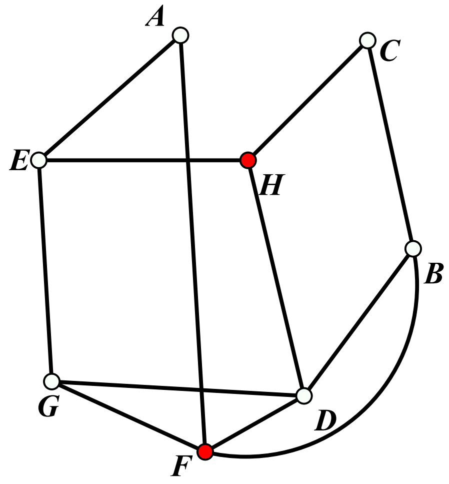


c.



Zadatak 4.

Prikažimo grafom podatke iz dane tablice.



Kako ne postoji vrh koji je povezan sa svim vrhovima direktno, broj ambulanti je sigurno veći od jedan. Uočimo da najviše susjednih vrhova ima vrh *F:A, B, D, G*, a zatim da vrh *H* povezuje preostale vrhove koji nisu direktno povezani s *F*. Dakle, potrebne su najmanje dvije ambulante koje zadovoljavaju postavljene uvjete, a možemo ih smjestiti u sela *F* i *H*.

U slučaju da je jedna ambulanta već smještena u selu *E*, druga bi ambulanta mogla biti u selu *B* jer su s vrhom *B* direktno povezani svi preostali vrhovi, odnosno sva su preostala sela od *B* udaljena manje od 6 km.

9.3. Problem povezivanja

Što ćemo raditi?

U ovoj će aktivnosti učenici:

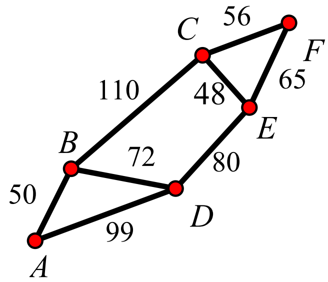
- prikazati podatke iz realnog svijeta grafom
- odrediti minimalno razapinjuće stablo
- koristiti Kruskalov algoritam, Primov algoritam i algoritam najbližeg susjeda za određivanje razapinjućeg stabla
- koristiti razapinjuće stablo pri rješavanju problema povezivanja iz realnog svijeta
- usporediti različite algoritme
- primijeniti Primov algoritam na matricu susjedstva.

Trajanje aktivnosti: dva školska sata.

Oblik rada: Rad u skupinama i individualno

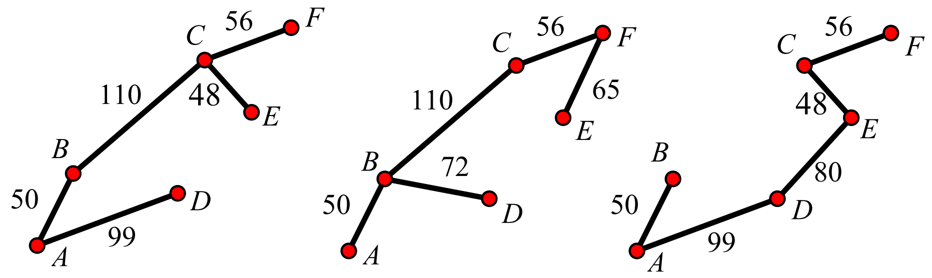
Kako to izgleda?

Učenici će jednostavno nacrtati graf koji opisuje lokacije fontana i postojeće mreže.



Možete li pretpostaviti?

Primjeri razapinjućih stabala:



Njihove su duljine redom: 363, 353, 333.

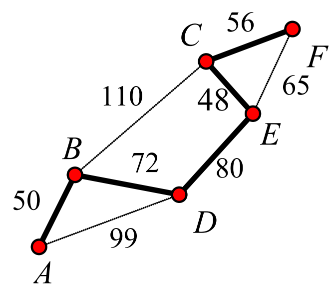
Svako razapinjuće stablo za graf od n vrhova ima $n - 1$ brid.

Svi opisani algoritmi relativno su dobri i lako se koriste za jednostavnije grafove, s malim brojem vrhova. Nedostatak Kruskalovog algoritma je što se za svaki dodani brid treba provjeriti je li njegovim dodavanjem formiran ciklus. Primov algoritam se može lako primijeniti na graf zadan matricom susjedstva.

Zadatak.

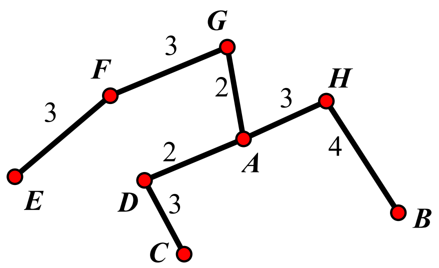
Učenici će primjenom bilo kojeg od tri opisana algoritma dobiti sljedeće minimalno razapinjuće stablo:

Minimalna duljina cijevi iznosi 306 metara.



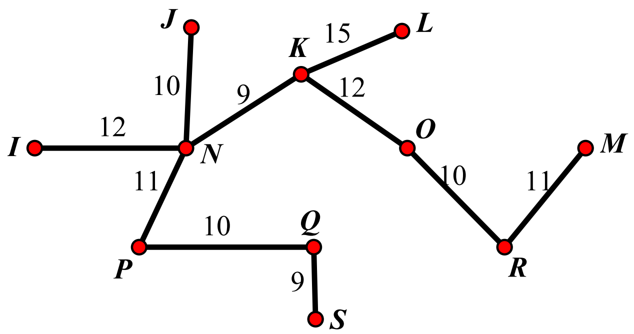
Zadatak 1.

a.



Duljina je 20,

b.



Duljina je 109.

Zadatak 2.

Rješenje pomoću Primovog algoritma za matrice:

	A	B	C	D	E	F	G	H	O
A	-	120	55	90	75	30	50	100	40
B	120	-	50	80	35	20	30	80	65
C	55	50	-	25	70	60	80	95	35
D	90	80	25	-	50	40	35	85	20
E	75	35	70	50	-	40	80	90	30
F	30	20	60	40	40	-	40	75	25
G	50	30	80	35	80	40	-	60	100
H	100	80	95	85	90	75	60	-	160
O	40	65	35	20	30	25	100	160	-

Stablo čine bridovi: BF, CD, DO, EO, FA, GB, HG i OF.

Ukupna minimalna duljina je 20 + 25 + 20 + 30 + 30 +30 + 60 + 25 = 240 m.

9.4. Problem kineskog poštara

U ovoj će aktivnosti učenici:

- koristiti osnovnu terminologiju teorije grafova
- prepoznati Eulerov ciklus
- primijeniti različite algoritme pri rješavanju Problema kineskog poštara
- procijeniti dobre i loše strane pojedinog algoritma.

Kako bi to riješila teorija?

Početni graf nije Eulerov jer su vrhovi A, B, C i D neparnog stupnja. Prema opisanom algoritmu promatramo kombinacije AB i CD, AC i BD, AD i BC, te popunjavamo tablicu:

Kombinacija	Najpovoljnija ruta	Minimalna duljina	Zbroj minimalnih duljina
AB CD	A→B C→E→D	8 5	13
AC BD	A→E→C B→E→D	7 7	14
AD BC	A→E→D B→E→C	6 8	14

Dakle, možemo konstruirati Eulerov ciklus putujući dva puta po rutama A→B i C→E→D.

Najkraća udaljenost koju će zaštitari morati prijeći jest

$13 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 57$.

Neke od mogućih ruta su: A-B-C-E-D-C-E-D-A-E-B-A, A-B-E-C-D-E-A-D-E-C-B-A.

Uočite da ovaj algoritam služi samo za računanje najkraće udaljenosti, ali ne i za generiranje iste.

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

a. O-A-O-B-A-O (Nema Eulerova ciklusa)

b. O-A-O-B-O (Postoji Eulerov ciklus)

c. O-C-D-O-A-D-A-B-C-B-O (Nema Eulerova ciklusa)

d. O-D-A-E-A-B-D-E-O-C-B-O (Postoji Eulerov ciklus).

Zadatak 2.

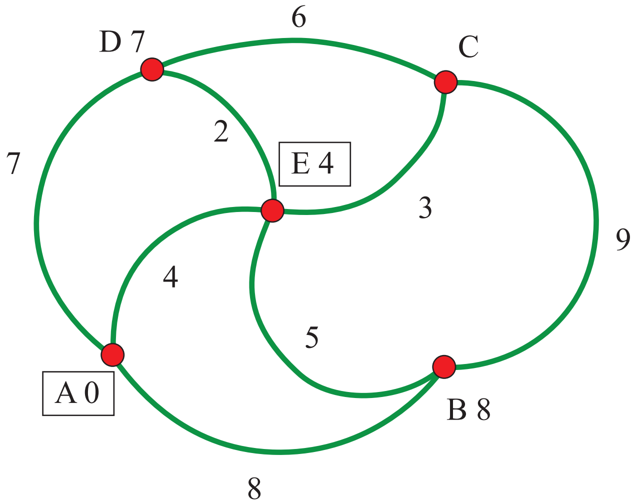
a. Primjer rute je IAECABDCBDEI. Vrhovi B i D su jedini vrhovi neparnog stupnja pa će dva puta proći putem između njih.

b. 19.88 km.

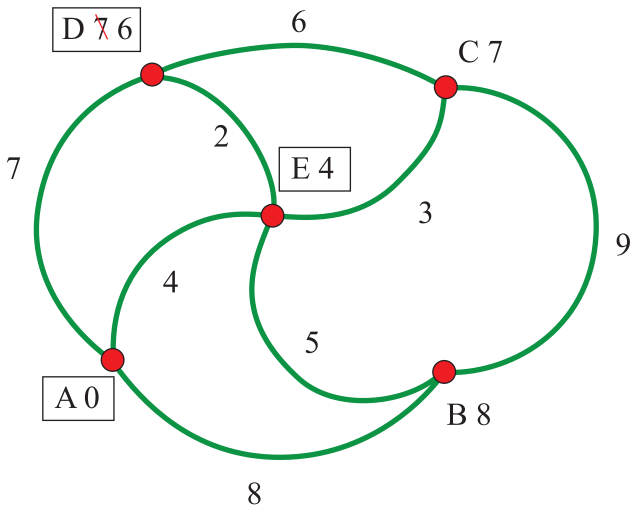
Možemo li više?

Koristeći Dijkstrin algoritam pokazat ćemo da je između vrhova A i C najkraća udaljenost 7.

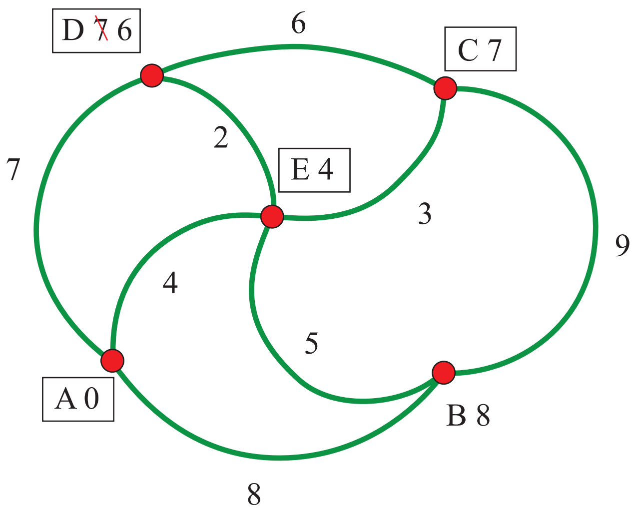
Označimo vrh A brojem 0 i trajno ga uokvirimo. Vrhovi susjedni vrhu A su vrhovi B, E i D. Pored svakog od njih pišemo odgovarajuće privremene težine (udaljenosti od početnog vrha): 8, 4, 7. Odabiremo vrh E jer je njemu pridružena najmanja težina i trajno ga uokvirimo.



Vrhovima D, B i C koji nisu uokvireni, a susjedni su vrhu E, pridružujemo redom težine 6, 9, 7 (zbroj broja 4 i težine bridova ED, EB i EC). Vrijednost kod vrha D mijenjamo u 6, jer je manja od prethodne, dok vrijednost kod vrha B ne mijenjamo. Od neuokvirenih vrhova biramo vrh D (s najmanjom vrijednošću) i trajno ga uokvirimo.



Vrh C je vrhu D jedini neuokvireni susjedni vrh. Možemo mu pridružiti vrijednost 12, ali kako je ona veća od njegove trenutne vrijednosti 7, ostaviti ćemo vrijednost 7. Neuokvireni su vrhovi B i C od kojih C ima manju pridruženu vrijednost te ćemo njega trajno uokviriti. Došavši do ciljnog vrha napravili smo i zadnji korak algoritma.



Dakle, najkraća udaljenost vrhova A i C je 7. Vraćamo se unazad vrh po vrh, kako bi odredili najkraću rutu. Iz vrha C idemo u onaj vrh čija je pridružena vrijednost jednaka razlici broja 7 i težine brida koji ih povezuje. U ovom je slučaju to vrh E jer je $7 - 3 = 4$. Kod vrha D razlika $7 - 6 \neq 6$. Prema tome najkraći put od vrha A do vrha C je A-E-C.

Zadatak 3.

a. Vrhovi neparnog stupnja su B, C, J i M.

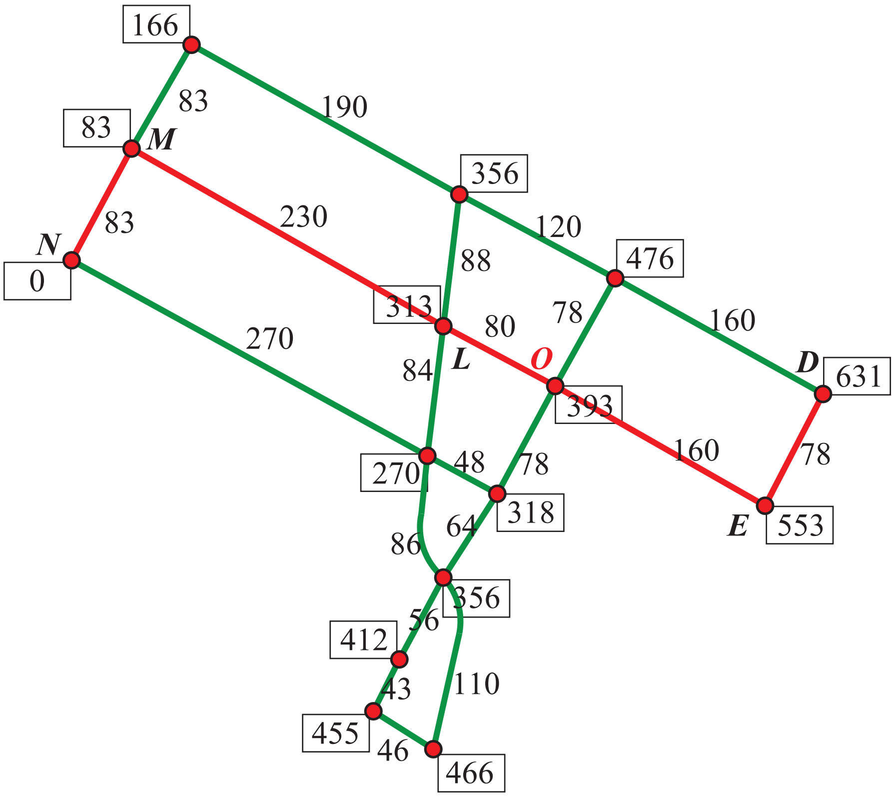
Kombinacija	Najpovoljnija ruta	Minimalna duljina	Zbroj minimalnih duljina
BC JM	B→C J→K→L→M	120 362	482
BJ CM	B→L→K→J C→O→L→M	220 388	608
BM CJ	B→A→M C→O→J	273 156	429

Prema podacima iz tablice zaključujemo da Robert mora proći dva puta rutu B→A→M i C →O→J. Tada ukupna minimalna udaljenost iznosi 2235 + 429 = 2664 m ili 2.664 km.

Ruta kojom će u tom slučaju Robert proći je

O-L-K-J-I-H-G-F-I-K-N-M-L-B-A-M-A-B-C-D-E-O-C-O-J-O.

b. Najkraći put od lokacije N do lokacije D dobit ćemo koristeći Dijkstrin algoritam:



Najkraća je udaljenost 631 m, a put kojim Robert treba ići je N-M-L-O-E-D i na grafu je označen crvenom bojom.

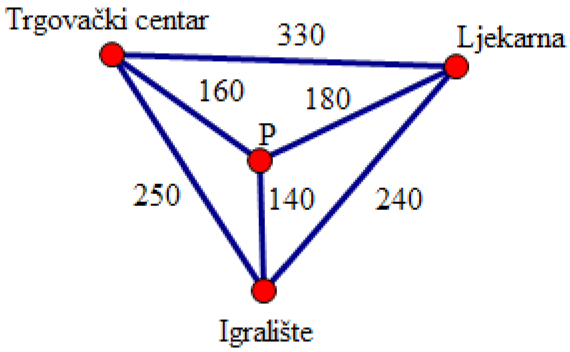
9.5. Problem trgovačkog putnika

U ovoj će aktivnosti učenici:

- koristiti osnovnu terminologiju teorije grafova
- prepoznati Hamiltonov ciklus
- primijeniti tehnologiju za rješavanje problema iz realnog svijeta
- primijeniti različite algoritme pri rješavanju Problema trgovačkog putnika
- argumentirati dobre i loše strane pojedinog algoritma.

Kako to izgleda?

Oblik rada: individualni rad



Potražite pomoć tehnologije. (*Upute* su na kraju aktivnosti)

	A	B	C	D	E	F
1			Polazište	Trg. centar	Ljekarna	Igralište
2			1	2	3	4
3	Polazište	1	0	160	180	140
4	Trg. Centar	2	160	0	330	250
5	Ljekarna	3	180	330	0	240
6	Igralište	4	140	250	240	0
7						
8	**Rješenje**					
9		*oznaka lokacije*	**1**	**2**	**4**	**3**
10		*lokacija*	Polazište	Trg. centar	Igralište	Ljekarna
11		*udaljenost od prethodne lokacije*	180	160	250	240
12						
13					*ukupna udaljenost*	**830**

Kako bi to riješila teorija?

Označimo s T trgovački centar, s L ljekarnu i s I igralište. Imamo sljedeće moguće kombinacije i duljine promatranih putova:

PTLIP	160 + 330 + 240 + 140 = 870
PTILP	160 + 250 + 240 + 180 = 830
PLTIP	180 + 330 + 250 + 140 = 900
PLITP	180 + 240 + 250 + 160 = 830
PITLP	140 + 250 + 330 + 180 = 900
PILTP	140 + 240 + 330 + 160 = 870

Zaključujemo da je najbolje ići od polazišta, pa u trgovački centar, na igralište i na kraju u ljekarnu ili od polazišta do ljekarne, igrališta pa u trgovački centar.

Algoritam najbližeg susjeda (takozvani „pohlepni“ algoritam) može dati rutu: Polazište, Igralište, Ljekarna, Trgovački centar. Ukupna duljina te rute je 870 metara.

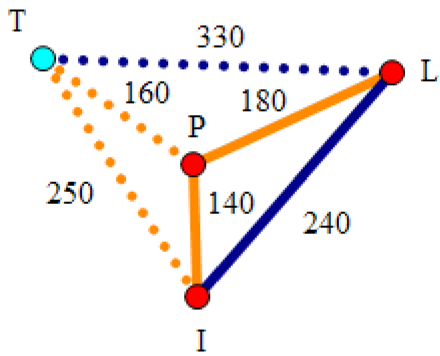
Učenici će zaključiti da se metodom ispisivanja svih kombinacija sigurno dođe do najefikasnijeg rješenja, ali metoda nije primjenjiva na grafove s velikim brojem vrhova.

Algoritam najbližeg susjeda je uvijek primjenjiv i relativno brz, ali vrlo često ne daje najefikasnije rješenje. Ovom metodom, kao i pomoću proračunskih tablica, dobit ćemo samo jedno rješenje problema. Ispisivanjem ćemo dobiti sva rješenja.

Možemo li više?

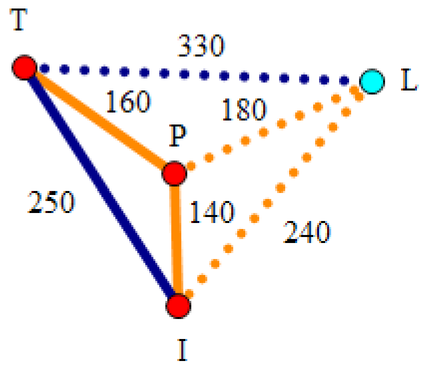
Algoritam najbližeg susjeda dao nam je gornju granicu 870 u početnom primjeru, a za određivanje donje granice razmotriti ćemo nekoliko slučajeva.

a Ako uklonimo vrh T imamo sljedeće:



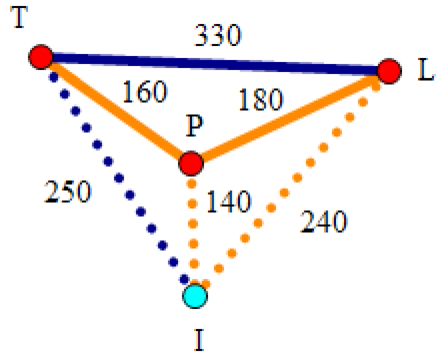
Donja granica u tom slučaju iznosi (narančasto obojani bridovi): 140 + 180 +160 + 250 = 730.

b. Uklanjanjem vrha *L* dobivamo:



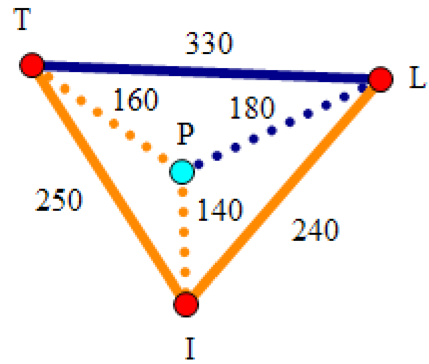
Donja granica je 720.

c. Uklanjanjem vrha *I* dobivamo:



Donja granica je 720.

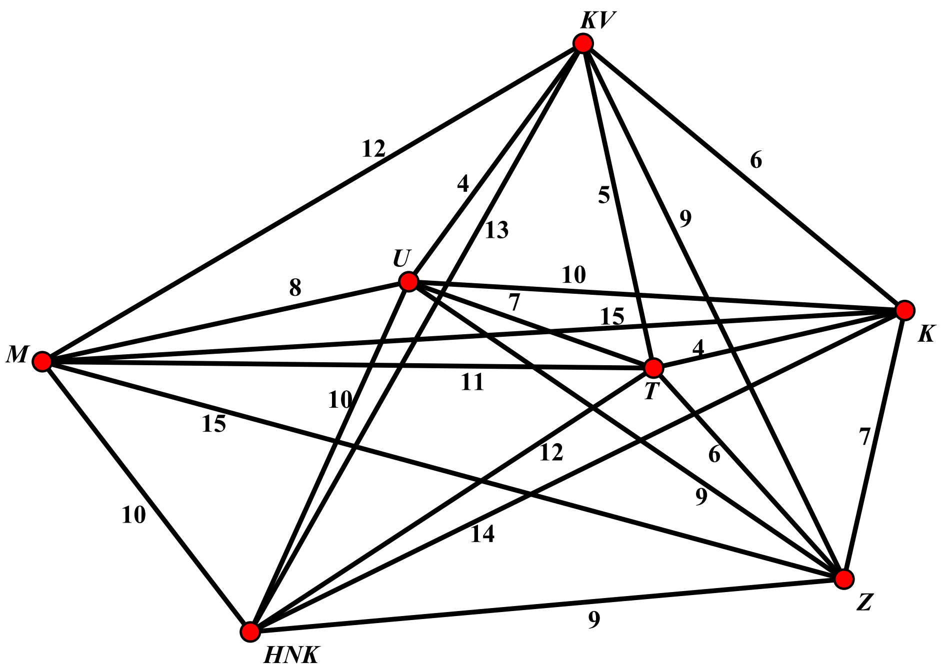
d. Uklanjanjem vrha *P* dobivamo donju granicu 790.



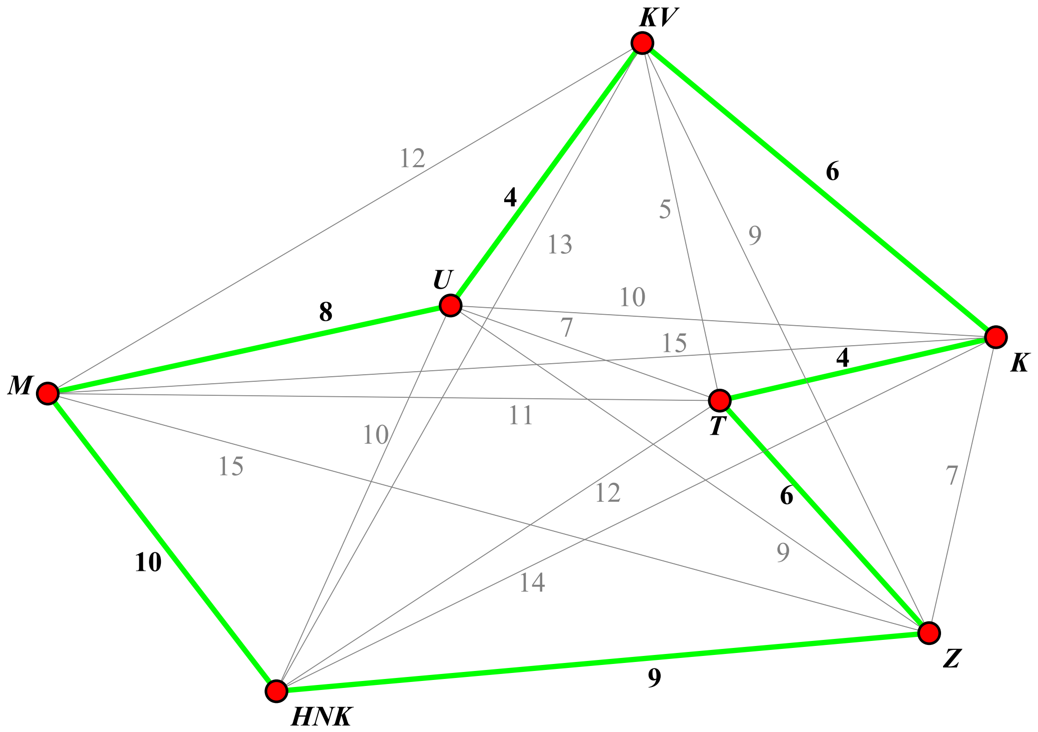
Dakle, rješenje početnog problema trgovačkog putnika je veće ili jednako 790 te manje ili jednako 870.

Zadatak 1.

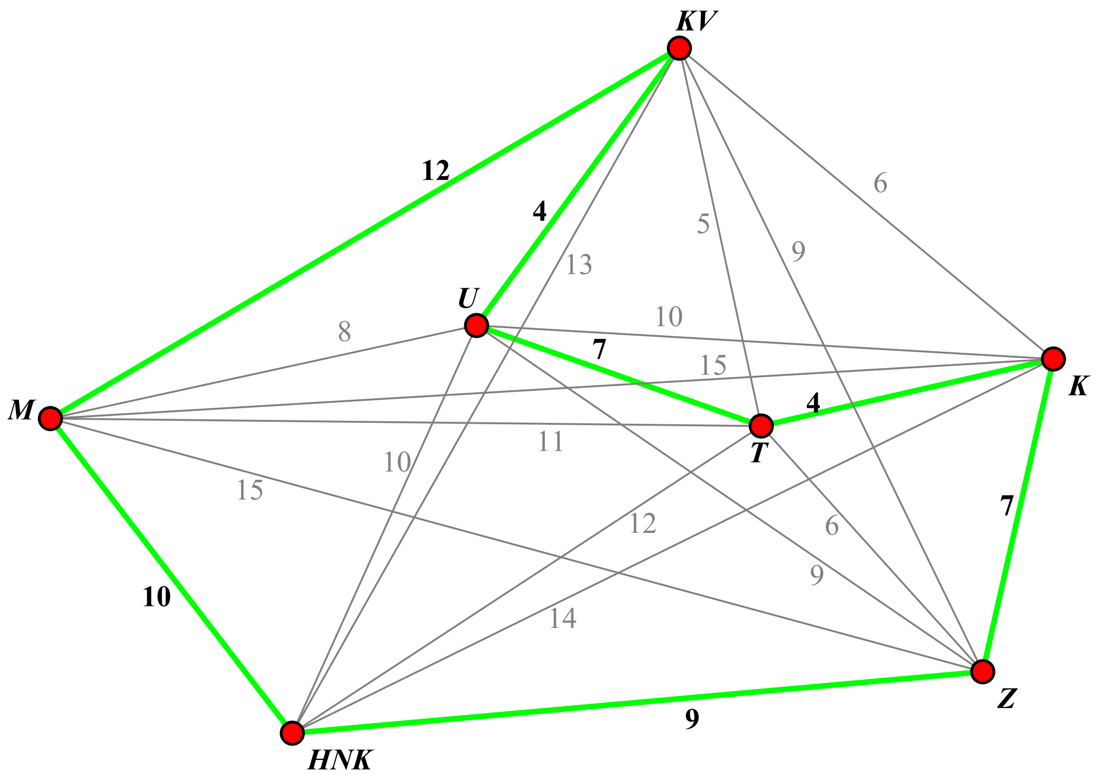
a. Prikaz podataka iz tablice:



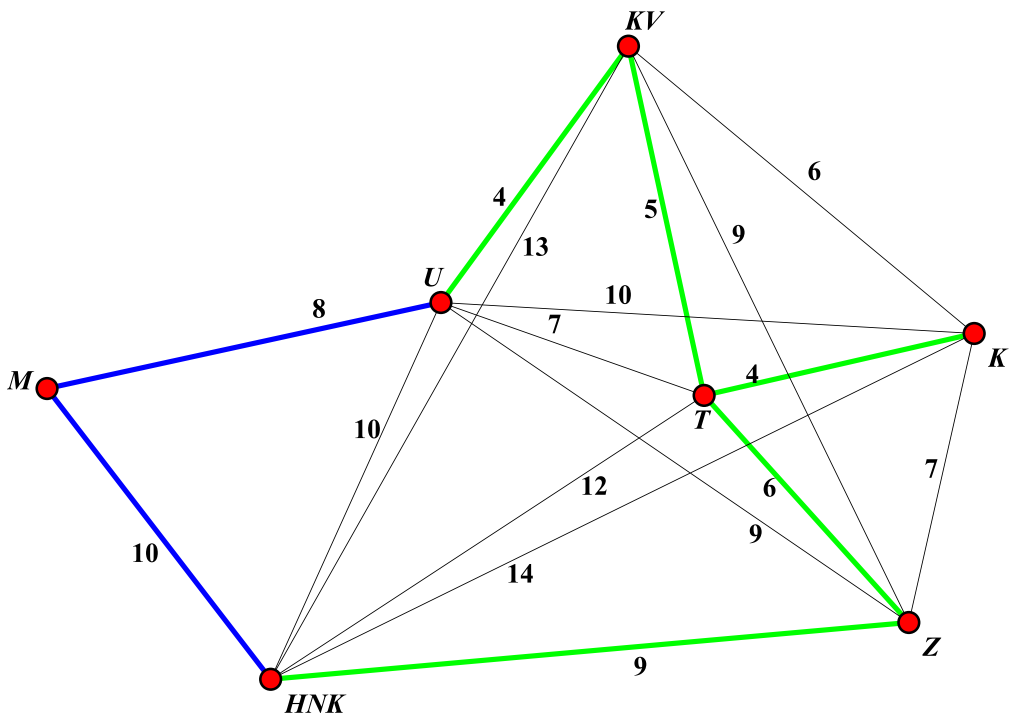
b. Ako je početak rute u T, ukupna je duljina 47 min. Graf:



Ako je početak rute u KV, ukupna je duljina 53 min. Graf:



c. Odbacivanjem vrha *M* i traženjem minimalnog razapinjućeg stabla iz *T* dobivamo graf:



Donja granica: **8 + 10** + **4 + 5 + 4 + 6 + 9** = 46 minuta.

d. Očito je najpovoljnija ruta između 46 i 47 minuta. Kako tražimo da se svaka lokacija posjeti samo jednom, a u grafu iz c. to nije slučaj, ukupna duljina najpovoljnije rute je 47 minuta.

Ako u grafu iz c. brid težine 5, između *KV* i *T*, zamijenimo bridom težine 6, između *KV* i *K*, dobit ćemo najpovoljniju rutu.

Pomoću tehnologije može se također dobiti ruta duljine 47 minuta, primjerice:

U – KV – K – T – Z – HNK – M – U.

Primijenite naučeno.

Zadatak 2.

A-R-P-Q-S-A (duljina je 51)

Zadatak 3.

Polazak – C – B – H – F – G – D – E – Polazak . (duljina je 23)

Zadatak 4.

Zagreb – Brussel – Lisabon – Amsterdam - Frankfurt – Beč – Zagreb ili obrnuto. Minimalni trošak putovanja je 340 eura.

Upute za rješavanje Problema trgovačkog putnika korištenjem proračunskih tablica.

Rješenje početnog primjera:

Prepišite danu tablicu u program proračunskih tablica. Pridružit ćete svakoj lokaciji broj od 1 do 4 (slika dolje). Ispod tablice napišite niz brojeva 1, 2, 3 i 4.

	A	B	C	D	E	F	G
1			Polazište	Trg. centar	Ljekarna	Igralište	
2			1	2	3	4	
3	Polazište	1	0	160	180	140	
4	Trg. Centar	2	160	0	330	250	
5	Ljekarna	3	180	330	0	240	
6	Igralište	4	140	250	240	0	
7							
8	**Rješenje**						
9		*oznaka lokacije*	**1**	**2**	**3**	**4**	
10		*lokacija*	=INDEX(C1:F1;1;C9)	Trg. centar	Ljekarna	Igralište	
11		*udaljenost od prethodne lokacije*	140	160	330	240	
12							
13					*ukupna udaljenost*	**870**	
14							

INDEX(array; row_num; [column_num])
INDEX(reference; row_num; [column_num]; [area_num])

Nakon toga treba nam funkcija INDEX (array; row_num; (column_num)) koja vraća vrijednost iz tablice iz zadanog niza brojeva. Pri tome prvi broj, nakon označenog polja iz tablice, označava broj retka, a drugi broj označava broj stupca.

Primjerice INDEX (C1:F1;1;C9) (ćelija C10 na slici) znači: uzmi element, iz polja između C1 i F1, koji je u 1. retku i onom stupcu čiji redni broj piše na C9 te ga upiši na C10. Time smo broju 1 pridružili lokaciju polazišta. Kako bi se u rješenju ispisao redoslijed obilaska lokacija, učinite isto za sve ćelije od C10 do F10. U naredbi INDEX mijenjate samo zadnji element u D9, E9 i F9.

Istu naredbu koristite i da popunite polja C11 do F11 (udaljenosti neke lokacije od njoj prethodne – susjedne). Na primjer za dobivanje broja u ćeliji C11 (udaljenost polazišta od igrališta):

INDEX (C3:F6; C9; F9) - Od svih elemenata dane tablice između C3 i F6 uzimamo onaj element koji se nalazi u 1. retku (oznaka C9), 4.stupcu (oznaka F9).

8	**Rješenje**					
9		*oznaka lokacije*	**1**	**2**	**3**	**4**
10		*lokacija*	Polazište	Trg. centar	Ljekarna	Igralište
11		*udaljenost od prethodne lokacije*	=INDEX(C3:F6;C9;F9)	160	330	240
12						
13					*udaljenost*	**870**

INDEX(array; row_num; [column_num])
INDEX(reference; row_num; [column_num]; [area_num])

Isto učinite i za ćelije D11, E11, F11 mijenjajući u naredbi INDEX posljednja dva elementa C9; F9 redom u: C9; D9, zatim u D9; E9 i na kraju u E9; F9.

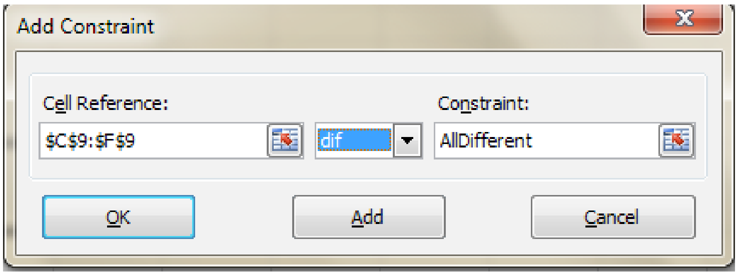
Zatim u ćeliji F13 zbrojimo ćelije C11, D11, E11 i F11 pomoću funkcije SUM. To je ukupna duljina puta koju će društvo prijeći. Mi želimo da je ta duljina minimalna. U tu svrhu koristit ćemo *Excel Solver* (*Data* > *Solver*). Ukoliko *Solver* ne postoji na alatnoj traci treba ga dodati (*File* > *Options* > *Add-ins*).

Nakon što se otvori prozor *Solvera*, popunjavamo ga na sljedeći način.

U polje *Set objective* upišete F13 (klikom na ćeliju). U sljedećem redu označite:

To: •Min

By changing variable Cells: označite polje od C9 do F9. Za *Subject to the constraints*:



Označite *Make Unconstrained Variables Non-Negative* i

Select a Solving Method: Evolutionary

Nakon ispunjavanja danog prozora pritisnemo *Solve* i nakon nekog vremena izvršavanja u ćeliji F13 nalazi se minimalna duljina puta, a lokacije su u poretku najpovoljnije rute.

Rješenje	*oznaka lokacije*	**1**	**2**	**4**	**3**
	lokacija	Polazište	Trg. centar	Igralište	Ljekarna
	udaljenost od prethodne lokacije	180	160	250	240
				ukupna udaljenost	**830**

9.6. Problem bojenja

Što ćemo raditi?

U ovoj aktivnosti učenike ćemo upoznati s problemom bojenja vrhova grafa i primijeniti bojenje na bojenje karata te rješavanje kombinatornih problema.

Trajanje aktivnosti: dva školska sata.

Nastavna pomagala: bojice.

U ovoj će aktivnosti učenici:

- istražiti minimalan broj boja potreban za bojenje neke karte
- povezati bojenje karte s bojenjem vrhova
- odrediti kromatski broj grafa
- primijeniti bojenje vrhova na rješavanje problema rasporeda, neslaganja i sličnih kombinatornih problema.

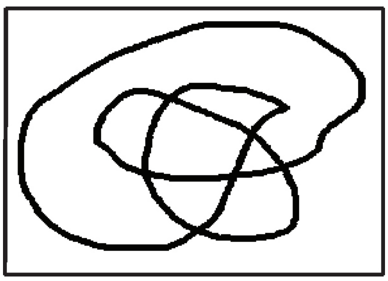
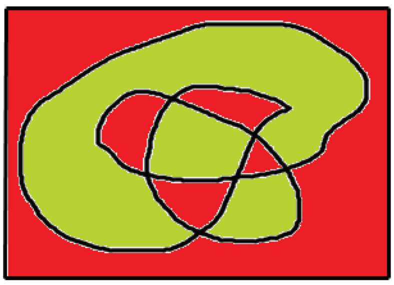
Kako to izgleda?

Učenici će individualno ili u paru bojiti karte u zadatku 1 i određivati minimalan broj boja koji je dovoljan da se oboje karte od 1 do 5.

U zadatcima (1a – 1d) rješenja su sljedeća:

a. da, može se obojiti s 2, 3, 4 boje b. $k = 2, 3, 4, 4, 4$.

c. Npr.

Za ovakvu kartu uvijek su dovoljne dvije boje. Ako nemamo ni jedno presijecanje, već započetu liniju „zaokružimo“ i spojimo s početkom, očito nam trebaju samo dvije boje za ta dva područja. Svakim novim presijecanjem dobivaju se dva nova područja(vrha), ali se ne dobivaju „novi susjedi“. Vrhovi su spojeni direktno samo sa susjednim vrhovima te boje „alterniraju“.

Možete li pretpostaviti?

Učenici će istraživanjem (bojenjem) otkriti *Teorem o četiri boje* koji kaže da su u ravnini dovoljne četiri boje kako bi se obojila proizvoljna karta. To je prvi teorem koji je dokazan uz pomoć računala.

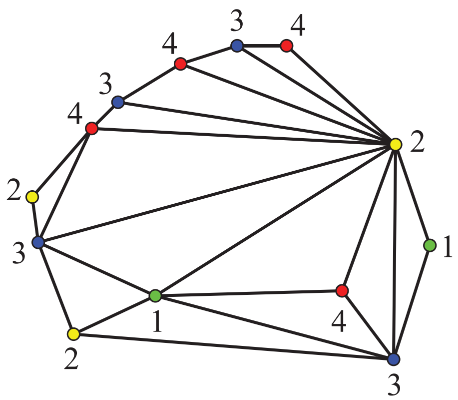
Napravite model.

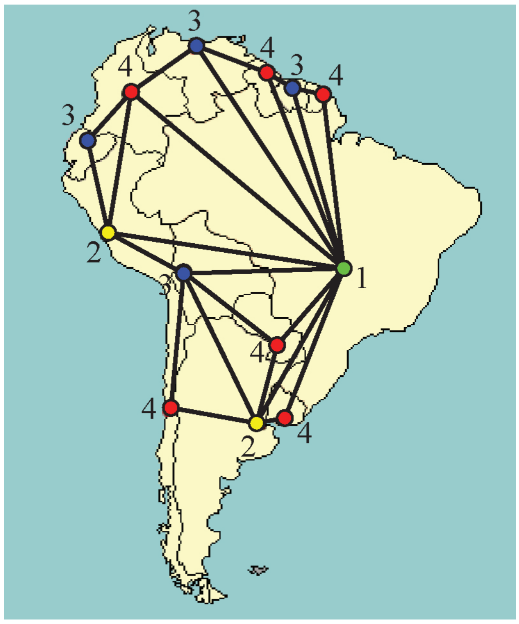
Učenici će uspoređivanjem danih grafova s nekom od karata iz prethodnog zadatka zaključiti da se svakoj od karata može pridružiti jedan od danih grafova.

Kako bi to riješila teorija?

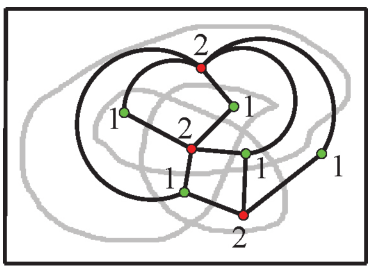
Grafovi pridruženi kartama 5, 6 i Južne Amerike:

Karta 5.





Karta 6

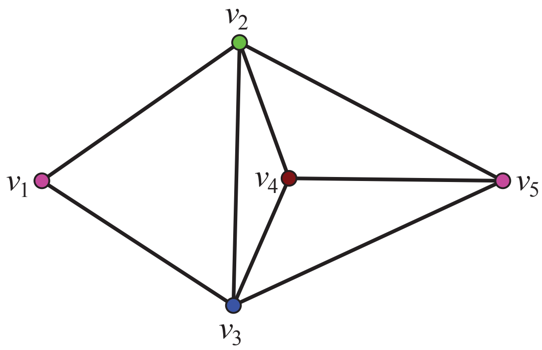


Zadatak 3.

Kromatski su brojevi redom: 4, 4, 3, 4, 2.

Možemo li više?

Očito je graf 4 iz zadatka 4-obojiv. Treba pokazati da nije 3-obojiv. Promotrimo vrhove v_1, v_2, v_3. Oni su vrhovi trokuta, te su potrebne tri boje za njihovo bojenje: roza (R) za v_1, plava (P) i zelena (Z). Tada vrh v_4 ne može biti obojen sa Z ili P, ali može s R. Analogno zaključujemo da vrh v_5 ne može biti obojen susjednim bojama Z,P,R. Prema tome, tri boje nisu dovoljne.



Potražite pomoć tehnologije.

Primjeri algoritama: Genetski algoritam, Hibridni algoritam i slično.

Primijenite naučeno.

Raspored

Problem ćemo riješiti bojenjem grafa. Vrhovi grafa označavat će predstave, a brid koji spaja dva susjedna vrha predstavljat će glumce koji glume u objema predstavama. Tako će, primjerice, P_1 biti susjedan svima preostalim vrhovima. Nacrtajmo taj graf.

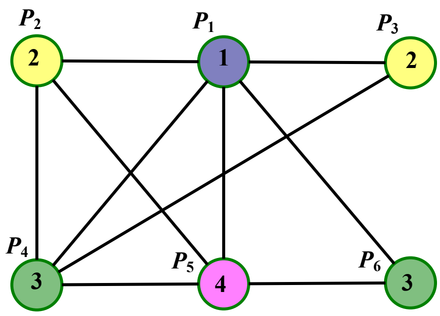
Prijedlog rasporeda proba je:

1. dan - P_1

2. dan - P_2, P_3

3. dan - P_4, P_6

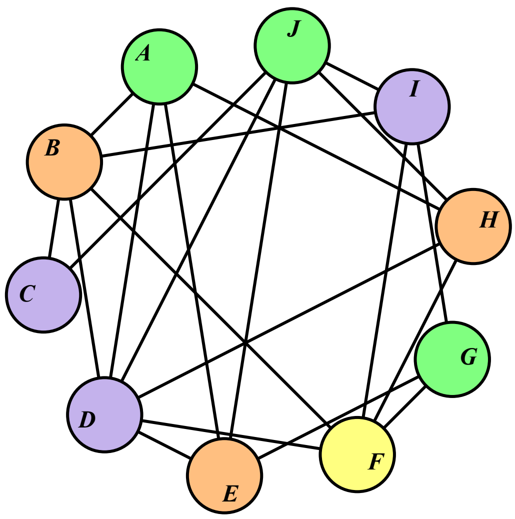
4. dan - P_5



Tulum

Rješenje: Raspored sjedenja modelirat ćemo grafom čije ćemo vrhove obojiti tako da dva susjedna vrha nisu obojena istom bojom.

Neslaganje je prisutno između deset osoba koje smo prikazali vrhovima grafa, a njihova međusobna neslaganja označena su bridom koji spaja ta dva vrha. Susjedni vrhovi ne mogu biti obojeni istom bojom (jer je bar jedna od tih dviju osoba izrazila neslaganje s onom drugom). Kromatski broj grafa koji opisuje dani problem iznosi četiri. To znači da Tina može riješiti problem i smjestiti za četiri



stola ovih deset osoba, a onda i preostale. Jedan je razmještaj, primjerice:

Stol 1: A, G, J + nekih 5 osoba (od preostalih 20 osoba koje nisu izrazile neslaganje)

Stol 2: B, E, H + nekih 5 osoba (od preostalih 15 osoba koje nisu izrazile neslaganje)

Stol 3: C, D, I + nekih 5 osoba (od preostalih 10 osoba koje nisu izrazile neslaganje)

Stol 4: F + preostalih 5 osoba.

9.7. Eulerova formula

Što ćemo raditi?

U ovoj aktivnosti s učenicima ćemo otkriti Eulerovu formulu i primijeniti je u teoriji grafova.

U ovoj će aktivnosti učenici:

- koristiti pojmove: planarni, povezani i jednostavni graf
- crtati grafove u programu dinamične geometrije
- uspostaviti vezu između broja vrhova, bridova i područja planarnoga grafa
- istražiti postoje li potpuni planarni grafovi s pet vrhova
- dokazati i primijeniti Eulerovu formulu.

Izvođenje ove aktivnosti predviđeno je za dva školska sata.

Kako to izgleda?

Broj gradova: 8

Broj linija: 16

Broj područja: 10

Veza: 8 – 16 + 10 = 2.

Potražite pomoć tehnologije.

Oblik rada: individualni ili u paru (ovisno o broju raspoloživih računala)

Učenici će u programu dinamične geometrije nacrtati četiri proizvoljna jednostavna povezana planarna grafa te potom upisati njihov broj vrhova, bridova i područja u tablicu. Nakon toga, pokušat će uspostaviti vezu između tih brojeva odnosno otkriti formulu:

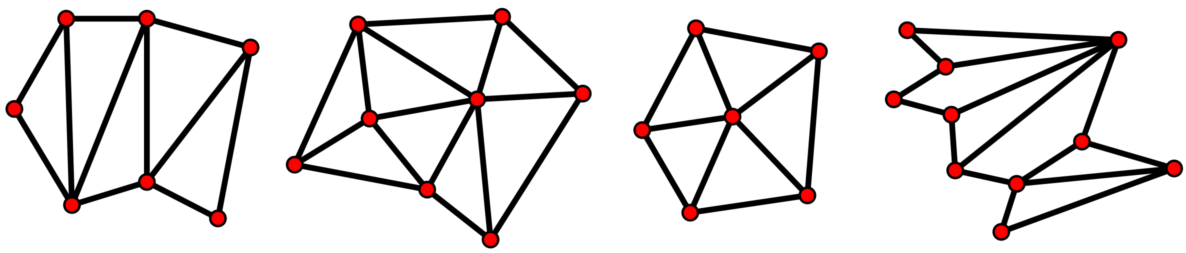
$$V - B + P = 2.$$

Napomena:

Kod prebrojavanja područja uzima se u obzir i vanjsko neograničeno područje.

Primjeri grafova:

GRAF 1 GRAF 2 GRAF 3 GRAF 4

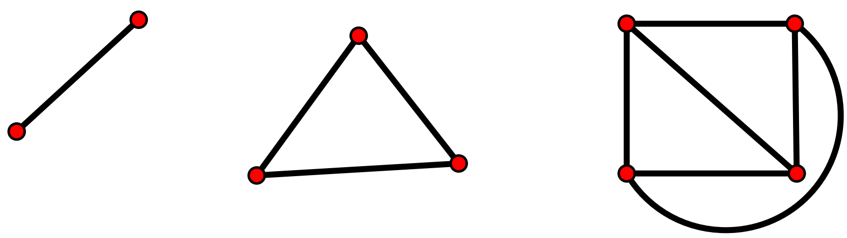


Tablica:

Graf	Broj vrhova V	Broj bridova B	Broj područja P	Veza?
GRAF 1	7	11	6	$7 - 11 + 6 = 2$
GRAF 2	8	15	9	$8 - 15 + 9 = 2$
GRAF 3	6	10	6	$6 - 10 + 6 = 2$
GRAF 4	10	15	7	$10 - 15 + 7 = 2$

Primjeri potpunih planarnih grafova:

$V = 2$ $V = 3$ $V = 4$



Učenici će lako uočiti da za $V = 5$ potpuni planarni graf ne postoji.

Pokažimo da je zaista tako. Kad bi takav graf postojao, broj bridova bio bi 10.

Po formuli $V - B + P = 2$ zaključujemo da bi broj područja bio 7. Svako je područje omeđeno s najmanje 3 brida, pa broj bridova mora biti barem $\frac{7 \cdot 3}{2}$, odnosno barem 11, što je nemoguće.

Kako bi to riješila teorija?

Oblik rada: rad u paru

Učenici će pokušati dokazati Eulerovu formulu radeći u paru.

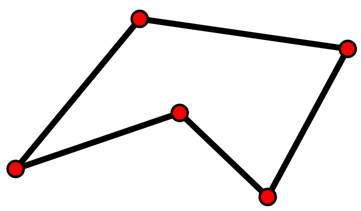
Dokaz formule $V - B + P = 2$:

Zamislimo da imamo nacrtani neki jednostavni planarni graf.

Označimo broj $V - B + P = a$. Treba dokazati da je $a = 2$.

Mijenjat ćemo graf, broj bridova i broj područja, ali tako da se ne mijenja broj vrhova i broj $V - B + P$.

Uočimo neki ciklus u grafu kao na primjer na slici:



Obrišimo jedan brid. Na taj se način broj bridova smanjio za 1, ali se i broj područja smanjio za 1 pa je i broj $a = V - B + P$ ostao isti.

Ovaj postupak ponavljamo dok ne ostane samo jedno područje. Graf koji smo na kraju dobili ima jednostavan oblik, povezan je, ali nema ciklusa. Od ranije znamo da se takav graf zove *stablo*. Stablo s V vrhova ima $V - 1$ bridova.

Dakle, novi graf ima V vrhova, $V - 1$ bridova i 1 područje, pa je $a = V - (V - 1) + 1 = 2$. Međutim, onda je i za početni graf $a = 2$, odnosno $V - B + P = 2$.

Možemo li više?

Slična je formula Eulerova poliedarska formula. Ona povezuje broj vrhova (V), bridova (B) i strana (S) konveksnog poliedra i glasi: $V - B + S = 2$. Ona se dokazuje tako da se u ravnini nacrta mreža bridova poliedra čime dobivamo povezani planarni graf te se dokaz zapravo svodi na dokazivanje Eulerove formule za grafove.

Leonhard Euler (1707. – 1783.) bio je švicarski matematičar, fizičar, astronom i inženjer. Pripisuju mu se vrlo značajna otkrića u mnogim granama matematike, poput infinitezimalnog računa, teorije grafova, topologije i teorije brojeva. Zaslužan je za uvođenje moderne matematičke terminologije, poput oznake za funkciju u matematičkoj analizi. Osim u matematici, poznat i po svojem doprinosu u mehanici, dinamici fluida, optici, astronomiji i glazbi.

(Preuzeto sa: https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler 20.02.2016.)

10. Optimizacija

10.1. Uvod u linearno programiranje

U ovoj će aktivnosti učenici:

- procijeniti rješenje postavljenog problema vodeći računa o danim uvjetima
- zapisati sustav nejednadžbi kojima su zadani uvjeti zadatka
- prepoznati ciljnu funkciju
- približno određivati ekstremne vrijednosti iz grafičkog prikaza koji modelira zadani problem optimiziranja rabeći program dinamičke geometrije
- određivati točne ekstremne vrijednosti elementarnih funkcija koristeći svojstva elementarnih funkcija
- izdvojiti ključne korake u rješavanju problema linearnog programiranja.

Ova aktivnost predviđena je za dva školska sata.

Kako to izgleda?

Oblik rada: rad u paru

	Paketi	Plate	Salate	Pizze
PartyMix	3	$3 \cdot 2$	$3 \cdot 5$	$3 \cdot 1$
BigMix	5	$5 \cdot 1$	$5 \cdot 8$	$5 \cdot 6$
ukupno	8	11	55	33

Učenici uočavaju da predloženi broj paketa neće biti dovoljan.

Možete li pretpostaviti?

Oblik rada: rad u paru

S obzirom na to da paket *BigMix* sadrži veći broj porcija salate i pizze, a Mate treba puno salate i pizza, tog paketa treba više naručiti.

Napravite model.

Neka je x broj paketa PartyMix te y broj paketa BigMix. Tada se dobiva sljedeći sustav nejednadžbi:

$$\begin{cases} 2x+y\geq 12 \\ 5x+8y\geq 74. \\ x+6y\geq 24 \end{cases}$$

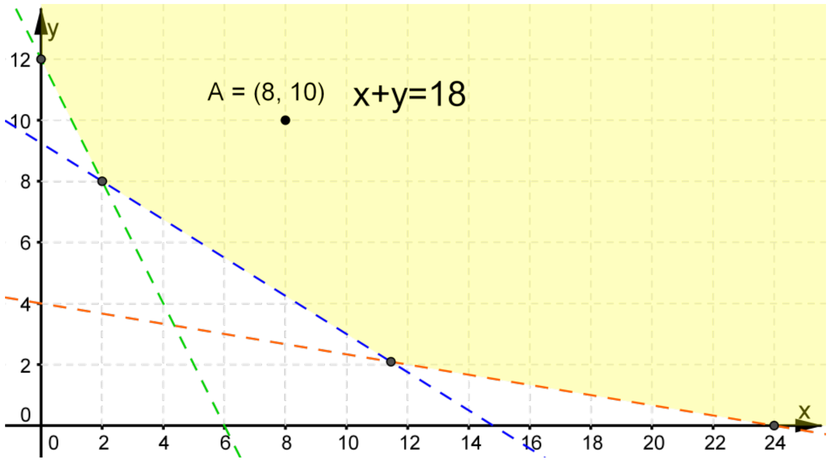
Također mora vrijediti $x\geq 0$ te $y\geq 0$.

Potražite pomoć tehnologije.

Oblik rada: individualni

Nastavna pomagala: računalo za svakog učenika

Ucrtavanjem poluravnina koje zadovoljavaju dan sustav nejednadžbi dobiva se poligon P. Koordinate točke A količine su pojedinih paketa, pa zapravo tražimo položaj točke A takav da je zbroj njenih koordinata najmanji. Učenici uočavaju da se to postiže u jednom od vrhova promatranog područja i to za x = 2 te y = 8.



Kako bi to riješila teorija?

Ukupan broj paketa izražavamo funkcijom cilja: $f(x,y)=x+y$.

Trebamo naći par (x_0, y_0) tako da u danim uvjetima vrijednost funkcije f za taj par bude najmanja moguća. Za $a\in R$ neka je p pravac dan jednadžbom $x+y=a$. Pomicanjem klizača a učenici uočavaju da kada se a smanjuje, pravac se pomiče paralelno „prema dolje". Najmanja vrijednost od a za koju pravac p još uvijek siječe poligon P jest točka A_0, a ona je rješenje sustava jednadžbi:

$$\begin{cases} 2x+y=12 \\ 5x+8y=74 \end{cases}.$$

Dakle, rješenje je točka $A_0(2,8)$. Odnosno, kako bi broj paketa koje treba naručiti bio najmanji, treba naručiti 2 paketa *PartyMix* i 8 paketa *BigMix*.

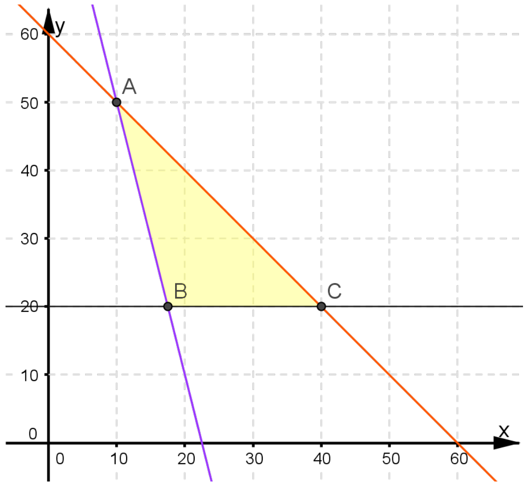
Učenicima valja napomenuti da funkcija cilja u linearnom programiranju doseže minimum (ili maksimum) u jednom od vrhova skupa mogućih rješenja, što su mogli uočiti pomicanjem točke A te grafa ciljne funkcije.

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Neka je x broj majica, a y broj privjesaka. Na temelju teksta zadatka imamo sljedeće uvjete:

$$\begin{cases} y \geq 20 \\ x + y \leq 60 \\ 20x + 5y \geq 450 \end{cases}.$$



Dodatno, mora vrijediti: $x \geq 0$ i $y \geq 0$. Funkcija cilja je: $f(x, y) = 20x + 8y$.

Nacrtajmo dobiveno područje.

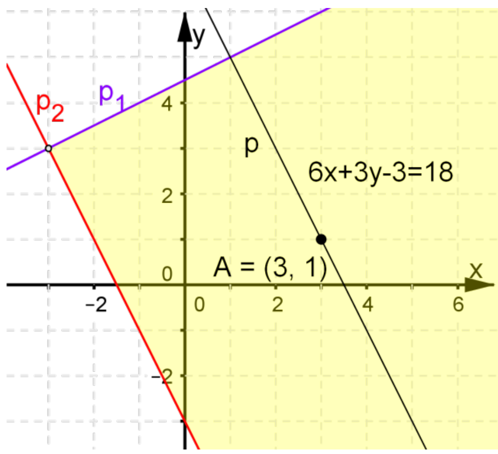
Povoljno je područje trokut s vrhovima u točkama (10, 50), (40, 20) i (17.5, 20). Funkcija će postići svoj maksimum u točki (40, 20) , odnosno treba naručiti 40 majica i 20 privjesaka i tada će učenici zaraditi 960 kuna.

Zadatak 2.

Rješenje je cjelobrojno, a vrh u kojem se postiže najveća dobit nema cjelobrojne koordinate. Točka s cjelobrojnim koordinatama koja pripada području i za koju se postiže maksimalna vrijednost ciljne funkcije jest točka (15, 20). Kako bi se ostvarila najveća dnevna dobit od 1700 kn, potrebno je proizvoditi 15 kutija čokoladica *ČokoLoko*, a 20 kutija čokoladica *Jagodanko*.

Možemo li više?

Nacrtajmo dano područje. Ono je omeđeno pravcima: $p_1 \ldots y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$, $\quad p_2 \ldots y = -2x - 3$.



Neka je p pravac kojem pripada jednadžba $6x + 3y - 3 = a$, $a \in R$. Micanjem pravca p uočavamo da svaki takav pravac siječe nacrtani skup tako da funkcija ne postiže maksimalnu vrijednost. Nadalje, pravci p i p_2 paralelni su pa funkcija postiže minimalnu vrijednost upravo na „stranici“ skupa koja leži na pravcu p_2. Uzmimo npr. točku (–3,3) na pravcu p_2. U toj točki funkcija postiže vrijednost $f(-3,3) = -12$, a to je ujedno i minimalna vrijednost koju funkcija postiže na danom skupu.

10.2. Maksimalna površina

U ovoj aktivnosti učenici će na modelu i računski pokušati odrediti duljine stranica pravokutnika za koji je njegova površina najveća.

Učenici će:

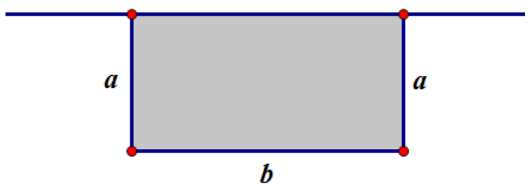
- matematičkim simbolima zapisati zadane i tražene veličine u zadatku te uspostaviti vezu među njima
- na konkretnome modelu određivati duljine stranica pravokutnika te računati njegovu površinu
- mijenjanjem parametara koji označavaju duljine stranica pravokutnika uočiti na koji se način mijenja njegova površina
- predvidjeti za koje vrijednosti parametra će se postići najveća površina
- izračunati u kojoj točki kvadratna funkcija postiže maksimalnu vrijednost
- interpretirati dobiveno rješenje u kontekstu zadatka
- efikasno koristiti tehnologiju (program dinamične geometrije).

Organizacija rada: grupni i individualni rad (ovisno o broju raspoloživih računala)

Nastavna pomagala: stiropor, traka duljine 17 cm, četiri pribadače, milimetarski papir, računala

Ova aktivnost predviđena je za dva nastavna sata.

Kako to izgleda?



Potražite pomoć tehnologije.

Uputa za rad u programu dinamične geometrije:

- Konstrukcija klizača a. (Uputa u materijalu *Kvadratna funkcija u geometrijskim zadactima*.)
- Zapisat ćemo nekoliko dobivenih podataka u tablicu. Prije nego što ju formiramo definirat ćemo još jedan parametar – površinu pravokutnika sa stranicama a i b. (Izbornik *Broj,* opcija *Računalo,* unesemo vrijednost $a \cdot b$ klikom na parametre te preimenujemo ovaj parametar u P). Mijenjamo parametre i promijenjene vrijednosti unosimo u tablicu te promatramo za koje vrijednosti parametara a i b dobivamo najveću vrijednost parametra P.

Napomena: Vrlo vjerojatno će učenici biti blizu rješenja, ali neće baš točno pogoditi da je $a = 4.25$ te im tu treba naglasiti važnost konkretnoga matematičkog računa.

Kako bi to riješila teorija?

Površinu pravokutnika duljina stranica a i $b = 17 - 2a$ računamo na sljedeći način:

$$P = a \cdot b$$
$$P(a) = a \cdot (17 - 2a)$$
$$P(a) = 17a - 2a^2$$

Time smo dobili kvadratnu funkciju $P(a) = 17a - 2a^2$ koja svoj maksimum postiže u točki $a_{\max} = \frac{17}{4} = 4.25.$ Prema tome, najveću površinu pravokutnika dobit ćemo kada je duljina stranice $a = 4.25$. Tada je duljina stranice $b = 8.5$ cm, a najveća moguća površina jest $P = 36.125$ cm^2.

Možemo li više?

Rješenje:

Zadana nam je površina pravokutnika duljina stranica a i b, $a \cdot b = 162 \text{ m}^2$.

Opseg zadanog područja računamo kao i u početnom zadatku (jer je riječ o istom obliku zemljišta): $O = 2a + b$.

Budući da nam je to tražena veličina, označimo je nepoznanicom x:

$$x = 2a + b$$

Izrazimo duljinu stranice $b = x - 2a$.

Sada vrijedi:

$$a \cdot b = a \cdot (x - 2a) = 162$$
$$ax - 2a^2 = 162$$
$$2a^2 - ax + 162 = 0$$
$$a_{\max} = -\frac{b}{2a} = \frac{x}{4}$$

Duljinu stranice b sada možemo također izraziti preko x: $b_{\max} = \frac{x}{2}$.

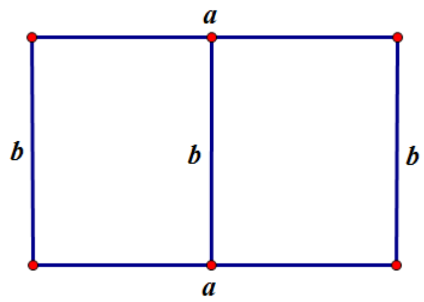
Uvrstimo izražene veličine u formulu za površinu pravokutnika i dobivamo:

$P = \frac{x}{4} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{8} = 162$. Odatle dobivamo $x = 36$.

Prema tome, zaključujemo da je Marko na raspolaganju imao 36 m žice.

Primijenite naučeno.

Rješenje:



Na slici je skica zadatka.

Zadano je: $2a + 3b = 1200$ m.

Izrazimo nepoznanicu a:

$a = 600 - \frac{3}{2}b$

Uvrstimo u formulu za površinu pravokutnika i dobivamo sljedeću kvadratnu funkciju:

$$P(b) = -\frac{3}{2}b^2 + 600b.$$

Stranica b postiže najveću vrijednost za:

$$b = \frac{600}{2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = 200.$$

Tada je $a = 300$.

Drugim riječima, da bi površina bila maksimalna, duljine stranica moraju biti 300 i 200 m.

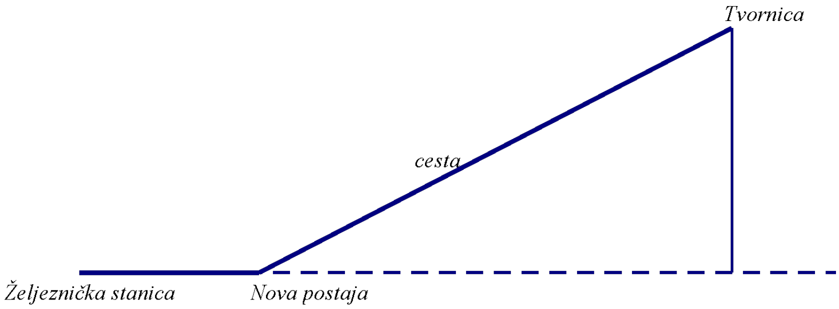
10.3. Minimalna cijena

U ovoj će aktivnosti učenici:

- procijeniti približnu vrijednost rješenja analizirajući zadane uvjete na modelu
- istražiti vezu među zadanim veličinama rabeći program dinamične geometrije
- odrediti egzaktnu formulu koja povezuje zadane veličine
- približno odrediti ekstremne vrijednosti iz grafičkog prikaza rabeći program dinamične geometrije
- generalizirati zadani problem i rješenje
- vrednovati svoj rad.

Kako to izgleda?

Oblik rada: rad u skupini



Možete li pretpostaviti?

Oblik rada: rad u skupini

Cijena prijevoza željeznicom manja je pa nova postaja treba biti bliže mjestu na pruzi koje je najbliže tvornici.

Napravite model.

Oblik rada: rad u skupini

Nastavna pomagala: papir, pribadače, ravnalo

Učenici postavljaju pribadače na zadana mjesta, mjere udaljenosti, računaju i popunjavaju tablicu. Rješenja su približna.

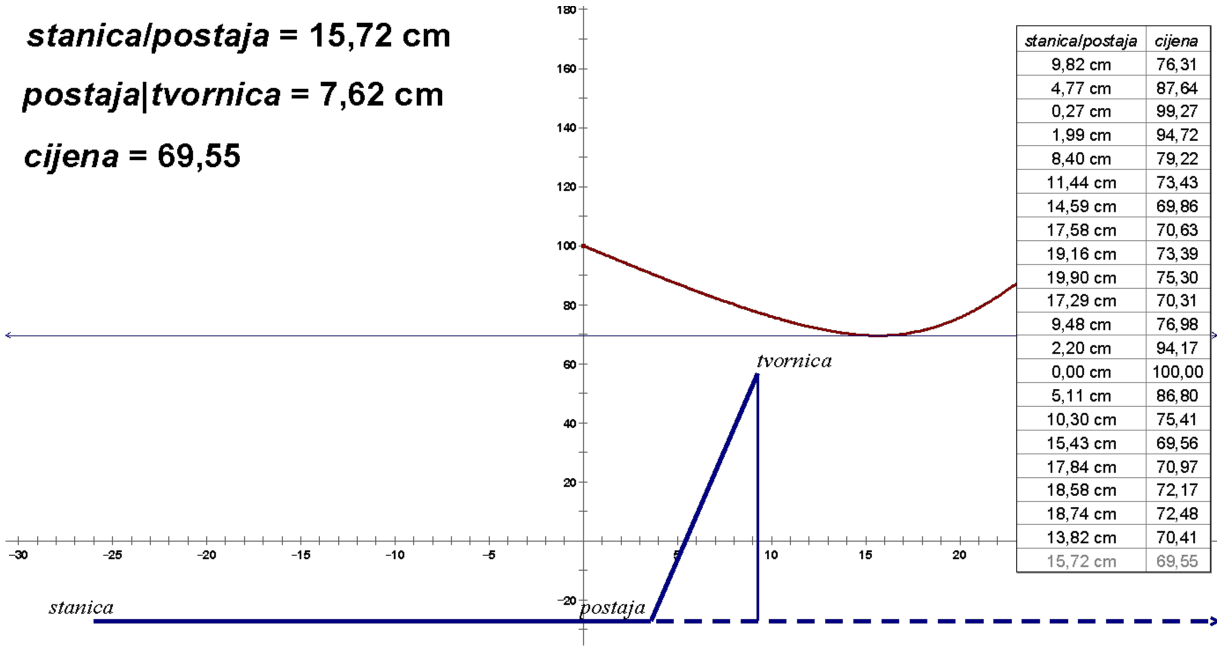
Udaljenost nove postaje od stanice (u km)	1	4	7	10	13	16	18
Udaljenost nove postaje od tvornice (u km)	19	16.3	13.6	11.2	9	7.5	7
Cijena prijevoza robe po km	97	89.5	82	76	71	69.5	71

Čini se da se cijena smanjuje do nekog mjesta, a kasnije se povećava. Čini se da je najpovoljniji položaj kad je postaja oko 16 km udaljena od stanice. S učenicima treba komentirati da ništa ne znamo o cijeni za udaljenosti koje su između ovih koje mjerimo.

Potražite pomoć tehnologije.

Oblik rada: individualni

Nastavna pomagala: računalo za svakog učenika



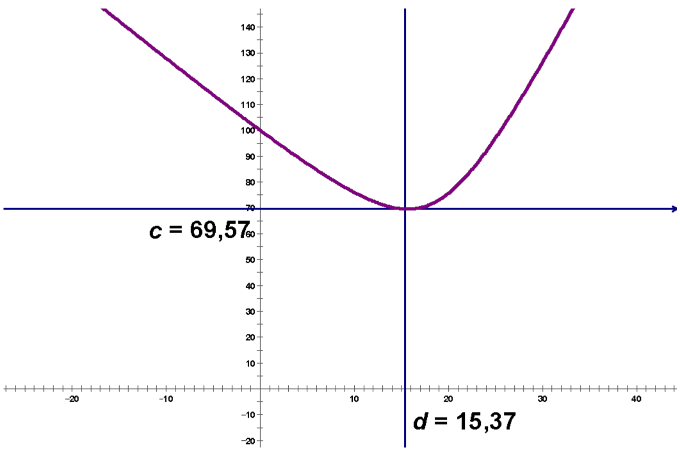
stanica|postaja	cijena
9,82 cm	76,31
4,77 cm	87,64
0,27 cm	99,27
1,99 cm	94,72
8,40 cm	79,22
11,44 cm	73,43
14,59 cm	69,86
17,58 cm	70,63
19,16 cm	73,39
19,90 cm	75,30
17,29 cm	70,31
9,48 cm	76,98
2,20 cm	94,17
0,00 cm	100,00
5,11 cm	86,80
10,30 cm	75,41
15,43 cm	69,56
17,84 cm	70,97
18,58 cm	72,17
18,74 cm	72,48
13,82 cm	70,41
15,72 cm	69,55

Kako bi to riješila teorija?

U ovoj će aktivnosti učenici izvesti formulu kojom se računa cijena prijevoza c u ovisnosti o udaljenosti d.

$$c(d)=2d+5\sqrt{49+\left(\sqrt{351}-d\right)^2}$$

Graf funkcije učenici mogu nacrtati u programu dinamične geometrije te grafički odrediti minimum ili koristiti grafički kalkulator i računati minimum pomoću grafičkog kalkulatora.



Možemo li više?

Koristeći zadane oznake učenici će pronaći pravilo pridruživanja.

$$c(d)=\alpha d+\beta\sqrt{a^2+\left(\sqrt{b^2-a^2}-d\right)^2}$$

Učenici mogu crtati graf funkcije c pomoću parametara i promatrati kako pojedini parametar utječe na oblik grafa i ekstrem.

10.4. Maksimalna površina trokuta uz zadani opseg

U ovoj će aktivnosti učenici:

- konstruirati pravokutni trokut zadanog opsega koristeći tehnologiju
- povezati neki element trokuta s njegovom površinom
- izraziti jednu veličinu pomoću druge koristeći Pitagorin poučak, algebru, trigonometriju pravokutnog trokuta
- pretpostaviti oblik funkcijske zavisnosti
- odrediti linearnu funkciju iz njezina grafa
- odrediti domenu funkcije koristeći svojstva elipse i kružnice
- odrediti ekstrem koristeći tehnologiju
- interpretirati dobivena rješenja u realnom kontekstu
- odrediti ekstrem koristeći derivacije uz pomoć tehnologije ili bez nje.

Aktivnost je predviđena za dva do četiri (školska) sata.

Kako to izgleda?

Na milimetarskom papiru pomoću končića i pribadača omeđite nekoliko različitih oblika zemljišta. Izmjerite neke veličine pa izračunajte površinu za svaki od oblika. Pokušajte omeđiti što veću površinu. Zapišite izmjerene podatke i pripadne površine.

Potreban pribor: stiropor, milimetarski papir, končić, pribadače, ravnalo, škare za svaku grupu

Učenici će mjeriti i odrezati končić duljine 10 cm te ga složiti u oblik pravokutnog trokuta, pri čemu će vrhove učvrstiti pribadačama. Mjerit će duljine kateta i računati površine. Dovoljno je da svaka grupa napravi nekoliko trokuta jer je cilj da učenici uoče kako različiti trokuti imaju različite površine. Možda će učenici pretpostaviti da je površina maksimalna za jednakokračni trokut, što jest rješenje zadatka, ali treba reći kako na osnovu mjerenja nekoliko trokuta ne možemo biti sigurni je li to zaista tako te da ćemo provjeriti ovu pretpostavku.

Napravite model.

U izradi modela važno je da učenici slijede upute i koriste iste oznake.

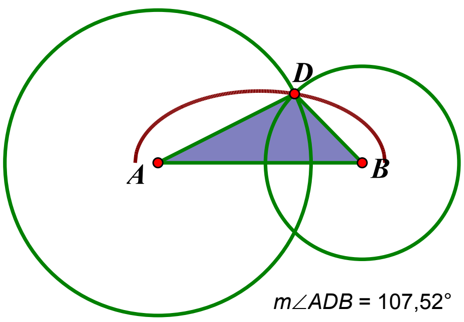
1. Učenici će nacrtati točku P, translatirati ju za 10 cm pod kutom od 0° i dobivenu točku označiti s Q. Izmjerene duljine c, a i b duljine su stranica trokuta čiji je opseg 10 cm (pod uvjetom da zadovoljavaju nejednakost trokuta).

2. Konstrukcija pravokutnog trokuta čiji je opseg 10 cm odvija se u tri koraka.

   a. U ovom će koraku učenici konstruirati trokut čiji je opseg 10 cm. Uočit će da kut *ADB* ne mora biti pravi. Ovisno o položaju točke *R* mijenja se duljina hipotenuze i nastupaju tri slučaja:

      - mijenjanjem položaja točke *S* mogu postići da trokut bude pravokutni i to u dva položaja (dobiveni su pravokutni trokuti sukladni)
      - mijenjanjem položaja točke *S* mogu postići da trokut bude pravokutni i to u jednom položaju (dobiveni je pravokutni trokut jednakokračan)
      - mijenjanjem položaja točke *S* ne mogu postići da trokut bude pravokutni.

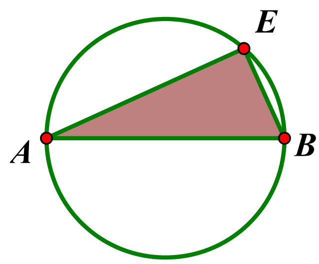
   Uz konstantnu duljinu hipotenuze (ne mijenjamo položaj točke *R*) zbroj duljina kateta $a + b$ je konstantan. Geometrijsko mjesto točaka *D* takvih da je opseg trokuta *ABD* 10 cm jest elipsa (na slici će se vidjeti gornja polovica elipse).



$m\angle ADB$ = 107,52°

Opseg $\triangle ABD$ = 10,00 cm

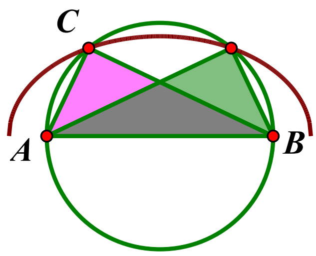
   b. U ovom će koraku učenici konstruirati pravokutni trokut koristeći Talesov teorem o obodnom kutu nad promjerom. Uočit će da opseg trokuta ne mora biti 10 cm, ali da se u nekim slučajevima može namjestiti. Ponovo postoje tri mogućnosti: dva rješenja, jedno rješenje, nema rješenja.



Opseg $\triangle AEB$ = 10,45 cm

$m\angle AEB$ = 90,00°

   c. U ovom će koraku učenici povezati prethodna dva koraka, uočiti da se vrh *C* mora nalaziti na kružnici i na elipsi te će konstruirati sjecište. Dobiveni trokut *ABC* zadovoljava oba zadana uvjeta. Mijenjajući položaj točke *R,* učenici će uočiti da ponekad imaju dva sjecišta pa time i dva rješenja, ponekad jedno, a da u nekim položajima točke *R* rješenja nema.



$m\angle ACB$ = 90,00°

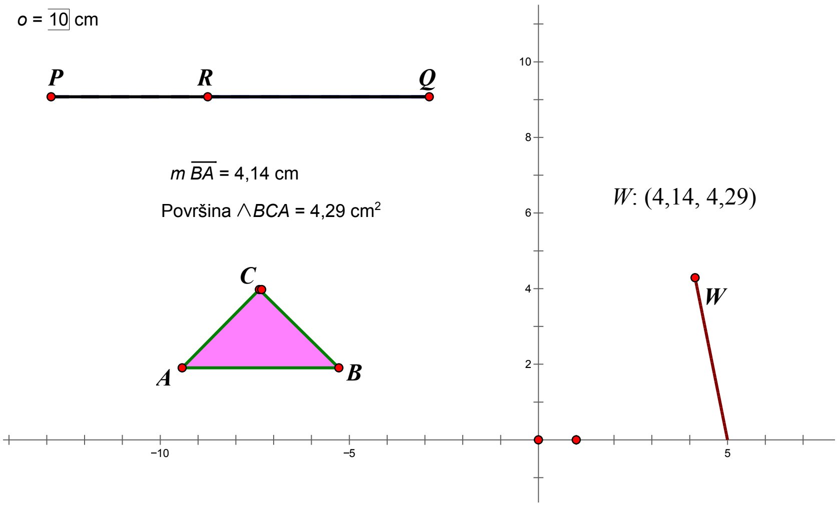
Opseg $\triangle BCA$ = 10,00 cm

Slijedi određivanje trokuta maksimalne površine. Predviđen je rad u četiri radna centra.

Radni centar 1: Površina i hipotenuza

Potražite pomoć tehnologije.

Učenici će konstruirati lokus i vidjeti da je ovisnost površine o duljini hipotenuze linearna te da je domena te funkcije interval. Iz grafičkog prikaza moći će, koristeći točke grafa, odrediti pravilo pridruživanja $P(c) = 25 - 5c$ te približno odrediti maksimalnu površinu 4.29 cm^2 koja se postiže kad je trokut jednakokračni, a duljina je hipotenuze približno 4.14 cm.



Kako bi to riješila teorija?

Pravilo pridruživanja funkcije P možemo dobiti i bez tehnologije.

$$a+b+c=10$$
$$a+b=10-c$$
$$a^2+2ab+b^2=100-20c+c^2$$

Kako je $a^2+b^2=c^2$ ostaje $P=\dfrac{ab}{2}=\dfrac{100-20c}{4}=25-5c$.

Možemo li više?

U ovom je koraku potrebno poznavanje geometrijskog značenja koeficijenta u jednadžbi elipse pa ga učenici koji nemaju to predznanje preskaču.

Kružnica i elipsa se sijeku ako je mala poluos elipse manja ili jednaka polumjeru kružnice.

Velika os elipse jednaka je zbroju duljina kateta (uz fiksnu hipotenuzu) $a + b = 10 - c$ pa je velika poluos elipse $5-\dfrac{c}{2}$. Linearni ekscentricitet elipse je $\dfrac{c}{2}$. Stoga, mala je poluos elipse $\sqrt{\left(5-\dfrac{c}{2}\right)^2-\left(\dfrac{c}{2}\right)^2}=\sqrt{25-5c}$.

Polumjer kružnice jest $\frac{c}{2}$ pa je uvjet za postojanje sjecišta:

$\sqrt{25-5c} \le \frac{c}{2}$ iz čega dobivamo $c \le 5$ i kvadriranjem $c^2 + 20c - 100 \ge 0$. Presjek rješenja ovih nejednadžbi jest segment $\left[10\left(\sqrt{2}-1\right), 5\right]$. Linearna funkcija P padajuća je pa se maksimum postiže za $c = 10\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 4.14$ cm. Maksimalna je površina

$P\left(10\left(\sqrt{2}-1\right)\right) = 75 - 50\sqrt{2} \approx 4.29$ cm^2.

Za katete trokuta vrijedi:

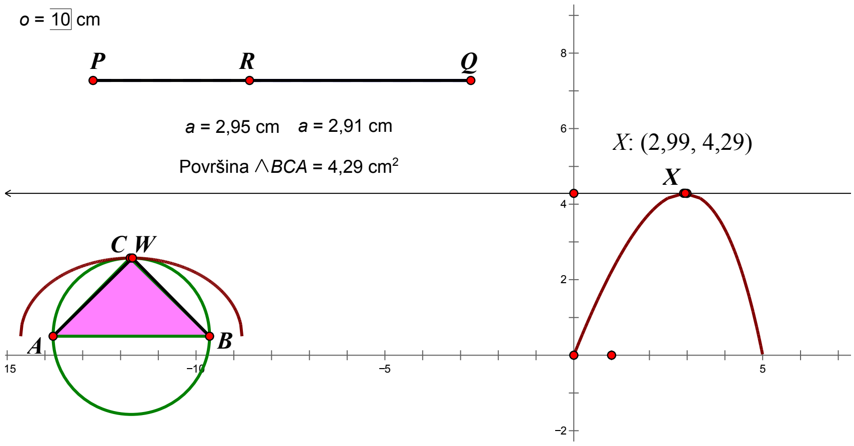
$$a + b = 10 - c = 20 - 10\sqrt{2}$$
$$ab = 2P = 150 - 100\sqrt{2}$$

iz čega se dobije $a = b = 10 - 5\sqrt{2} \approx 2.93$ cm.

Radni centar 2: Površina i kateta

Potražite pomoć tehnologije.

U ovom slučaju učenici neće moći pogoditi o kojoj se funkciji radi. Iz grafičkog će prikaza očitati da maksimalna površina iznosi 4.29 cm^2, a postiže se kad je trokut jednakokračan i duljina katete je približno 3 cm.



Kako bi to riješila teorija?

Pravilo pridruživanja funkcije P možemo dobiti i bez tehnologije.

$$a + b + c = 10 \Rightarrow c = 10 - a - b$$
$$c^2 = 100 + a^2 + b^2 - 20a - 20b + 2ab$$
$$20a - 100 = b(2a - 20)$$
$$b = \frac{10a - 50}{a - 10} \Rightarrow P = \frac{ab}{2} = \frac{5a^2 - 25a}{a - 10}$$

Možemo li više?

Ako učenici znaju derivirati, odredit će derivaciju

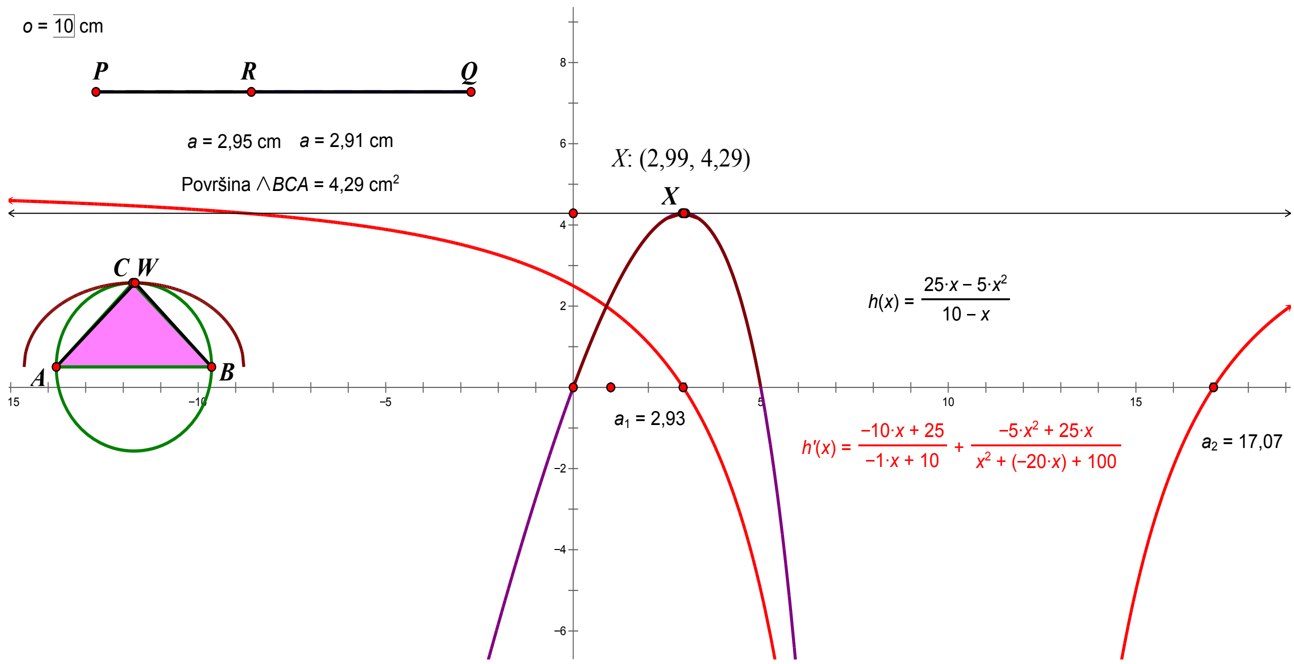
$P'(a)=\dfrac{a^2-20a+50}{(b-10)^2}$ i stacionarne točke $a_{1,2}=10\pm5\sqrt{2}$ od kojih $10+5\sqrt{2}$ nije u domeni jer je $a<10$.

Za stacionarnu točku $a=10-5\sqrt{2}$ lako se vidi da je točka maksimuma jer je derivacija pozitivna lijevo od te točke i negativna desno. Za katetu b dobivamo:

$$b=\frac{10a-50}{a-10}=\frac{100-50\sqrt{2}-50}{10-5\sqrt{2}-10}=10-5\sqrt{2}$$

pa se maksimalna površina od $P=\dfrac{ab}{2}=75-50\sqrt{2}$ cm² postiže kad je trokut jednakokračni pravokutni.

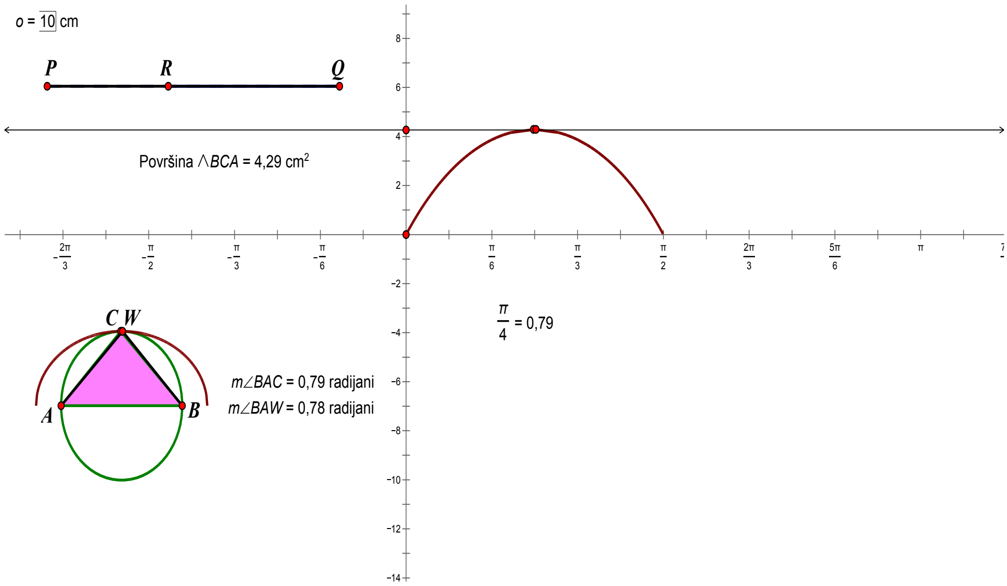
Ako učenici ne znaju derivirati, ovaj se dio može izostaviti ili riješiti pomoću tehnologije. Dovoljno je da učenici čuju da derivacija određuje koeficijent smjera tangente na graf. Lako će zaključiti da je u točki ekstrema tangenta paralelna s osi apscisom pa je koeficijent smjera, odnosno derivacija jednaka 0. Derivacija se može odrediti u programu dinamične geometrije i iz grafa derivacije očitati kad je jednaka 0.



Radni centar 3: Površina i kut

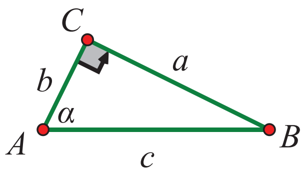
Potražite pomoć tehnologije.

U ovom slučaju učenici neće moći pogoditi o kojoj se funkciji radi iako će možda pretpostaviti da je riječ o kvadratnoj funkciji ili funkciji sinus. Iz grafičkog će prikaza očitati da maksimalna površina iznosi 4.29 cm² i da se postiže kad je mjera kuta $\dfrac{\pi}{4}$, odnosno kad je trokut jednakokračni.



Kako bi to riješila teorija?

Pravilo pridruživanja funkcije P možemo dobiti i bez tehnologije.



$$a = c\sin\alpha$$
$$b = c\cos\alpha$$
$$c\sin\alpha + c\cos\alpha + c = 10$$
$$c = \frac{10}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$$
$$P = \frac{ab}{2} = \frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{50\sin\alpha\cos\alpha}{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$$

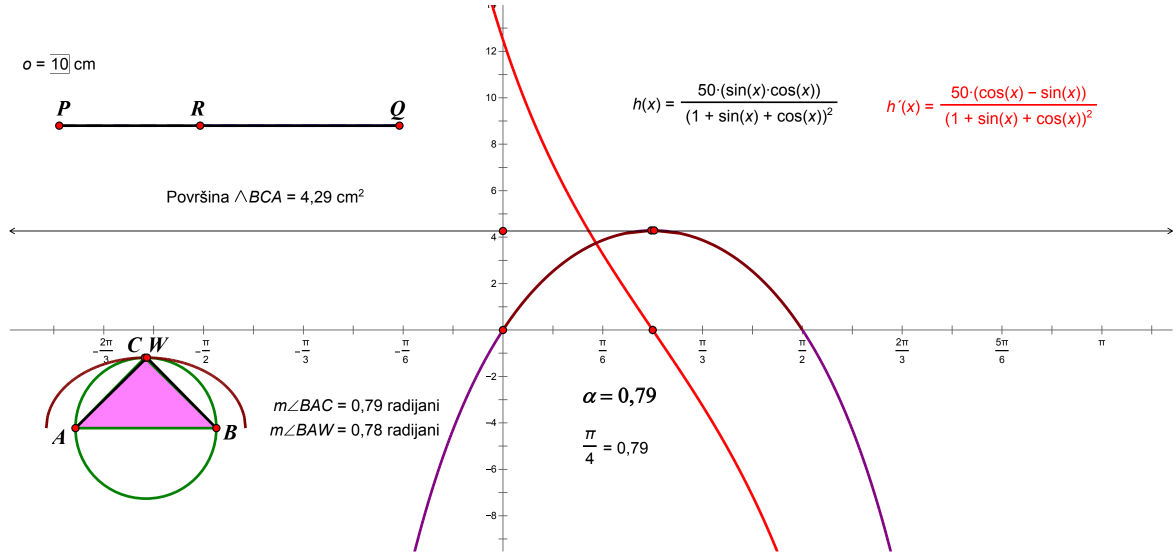
Možemo li više?

Ako učenici znaju derivirati, odredit će derivaciju

$P'(a) = \dfrac{50(\cos\alpha-\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$ i stacionarnu točku $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ za koju se lako se vidi da je točka maksimuma jer je derivacija pozitivna lijevo od te točke i negativna desno.

Maksimalna površina $P\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 75 - 50\sqrt{2}$ cm² postiže kad je trokut jednakokračni pravokutni.

Ako učenici ne znaju derivirati, ovaj se dio može izostaviti ili riješiti pomoću tehnologije. Dovoljno je da učenici čuju da derivacija određuje koeficijent smjera tangente na graf. Lako će zaključiti da je u točki ekstrema tangenta paralelna s osi apscisom pa je koeficijent smjera, odnosno derivacija jednaka 0. Derivacija se može odrediti u programu dinamične geometrije i iz grafa derivacije očitati kad je jednaka 0.



Sadržaj