

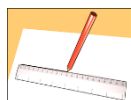
Modul: Funkcije 2

Kolo – naokolo grafovi funkcija



### Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti crtati grafove primjenjujući derivacije.



### Kako to izgleda?

Učenici se trebaju podijeliti u četveročlane grupe. Svaki član grupe dobiva jedan papir sa zadacima. Na svakom papiru je zadana druga funkcija. Svi članovi grupe rješavaju prvi zadatak sa svog papira. Kada ga riješe papir predaju članu desnom od sebe, a primaju papir od lijevog člana i rješavaju s novog papira drugi zadatak. Kad su ga riješili postupak ponove tj. opet desnom članu predaju papir, a od lijevog dobivaju te rješavaju treći zadatak s novog papira i postupak se ponavlja dok nije riješen i zadnji zadatak tj. dok graf zadane funkcije nije nacrtan.



### Potražite pomoć tehnologije.

Nacrtajte u programu dinamične geometrije grafove zadanih funkcija i usporedite sa grafovima koje ste vi nacrtali.

### Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura:

Antoliš, Copić: Matematika 4, Udžbenik sa zbirkom zadataka za prirodoslovno-matematičku gimnaziju, Školska knjiga, Zagreb, 2007

Kolo – naokolo grafovi funkcija

U ovoj će aktivnosti učenici:

- Crtati grafove funkcija primjenjujući svojstva funkcija i derivacije
- vrednovati svoj rad

Potrebni materijal: papiri sa zadacima.

**Kako to izgleda?**

Učenike raspodijelimo u četveročlane grupe i svakoj grupi podijelimo zadatke.

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$

1. domena, nultočke i  
asimptote funkcije  $f$

2. Parnost, neparnost i  
periodičnost funkcije  $f$

3. Intervali monotonosti i  
ekstremi funkcije  $f$

4. Intervali konveksnosti i  
konkavnosti, točke pregiba  
funkcije  $f$

5. Graf funkcije  $f$

	$g(x) = \frac{3x - 2}{2x + 3}$
1. domena, nultočke i asimptote funkcije $g$	
2. Parnost, neparnost i periodičnost funkcije $g$	
3. Intervali monotonosti i ekstremi funkcije $g$	
4. Intervali konveksnosti i konkavnosti, točke pregiba funkcije $g$	
5. Graf funkcije $g$	

$$h(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

1. domena, nultočke i  
asimptote funkcije  $h$

2. Parnost, neparnost i  
periodičnost funkcije  $h$

3. Intervali monotonosti i  
ekstremi funkcije  $h$

4. Intervali konveksnosti i  
konkavnosti, točke pregiba  
funkcije  $h$

5. Graf funkcije  $h$

	$i(x) = \frac{16}{x^2(x-4)}$
1. domena, nultočke i asimptote funkcije $i$	
2. Parnost, neparnost i periodičnost funkcije $i$	
3. Intervali monotonosti i ekstremi funkcije $i$	
4. Intervali konveksnosti i konkavnosti, točke pregiba funkcije $i$	
5. Graf funkcije $i$	

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$

1. domena, nultočke i asimptote funkcije  $f$

Domena  $\mathbf{R}$  Nultočke:  $x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{3}$ . Asimptota nema.

2. Parnost, neparnost i periodičnost funkcije  $f$

Funkcija  $f$  nije ni parna, ni neparna.  
Funkcija  $f$  nije periodična.

3. Intervali monotonosti i ekstremi funkcije  $f$

$f'(x) = 12x^2(x-1) \Rightarrow$  stacionarne točke  $x_1 = 0, x_2 = 1$

	$-\infty$		0		1		$\infty$
$f'$		-		-		+	
$f$		$\searrow$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Točka lokalnog minimuma je 1, a lokalni minimum je  $f(1) = -1$

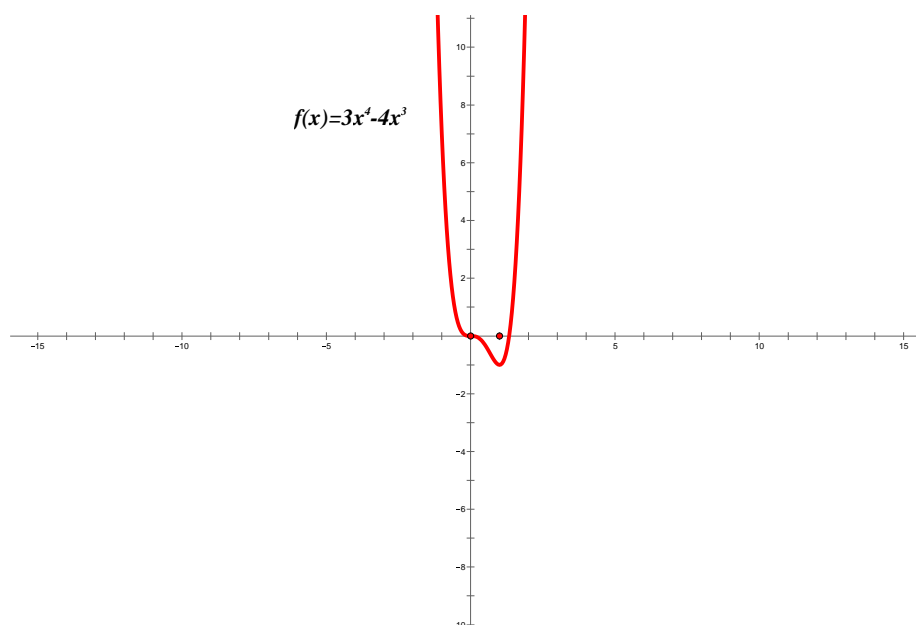
4. Intervali konveksnosti i konkavnosti, točke pregiba funkcije  $f$

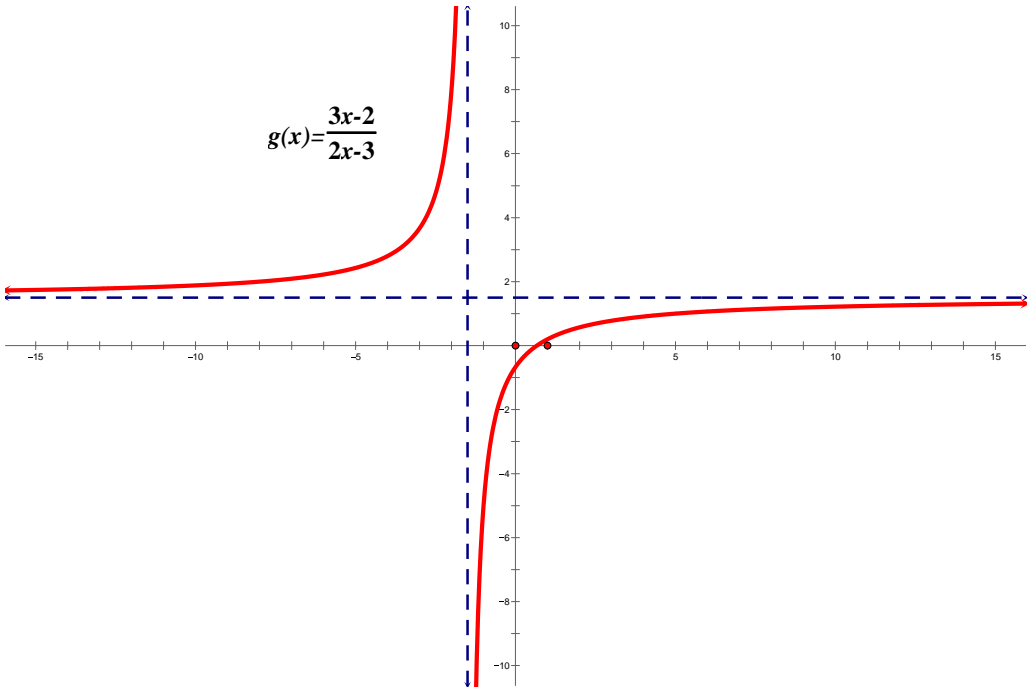
$f''(x) = 12x(3x-2)$   $f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$

	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$\infty$
$f''$		+	0	-	0	+	
$f$		$\cup$	0	$\cap$	-0.5926	$\cup$	

Točke pregiba:  $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$ .

5. Graf funkcije  $f$



	$g(x) = \frac{3x - 2}{2x + 3}$
1. domena, nultočke i asimptote funkcije $g$	Domena: $\mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$ . Nultočka: $x_0 = \frac{2}{3}$ . Vertikalna asimptota: $x = -\frac{3}{2}$ . Horizontalna asimptota: $y = \frac{3}{2}$ .
2. Parnost, neparnost i periodičnost funkcije $g$	Funkcija $g$ nije ni parna ,ni neparna. Funkcija $g$ nije periodična.
3. Intervali monotonosti i ekstremi funkcije $g$	$g'(x) = \frac{13}{(2x + 3)^2}$ , nema stacionarnih točaka . Funkcija $g$ raste na $\left\langle -\infty, -\frac{3}{2} \right\rangle, \left\langle -\frac{3}{2}, \infty \right\rangle$ .
4. Intervali konveksnosti i konkavnosti, točke pregiba funkcije $g$	$g''(x) = \frac{-52}{(2x + 3)^3}$ Funkcija $g$ je konveksna na intervalu $\left\langle -\infty, -\frac{3}{2} \right\rangle$ , a konkavna na intervalu $\left\langle -\frac{3}{2}, \infty \right\rangle$ . Nema točaka pregiba.
5. Graf funkcije $g$	 <p style="text-align: center;"><math>g(x) = \frac{3x-2}{2x-3}</math></p>



$$h(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

1. domena, nultočke i asimptote funkcije  $h$

Domena:  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ . Nultočka:  $x_0 = \sqrt[3]{-4} = -1.5874$   
 Vertikalna asimptota:  $x = 0$ . Kosa asimptota:  $y = x$ .

2. Parnost, neparnost i periodičnost funkcije  $h$

Funkcija  $h$  nije ni parna, ni neparna.  
 Funkcija  $h$  nije periodična.

3. Intervali monotonosti i ekstremi funkcije  $h$

$h'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} \Rightarrow$  stacionarna točka  $x_1 = 2$ .

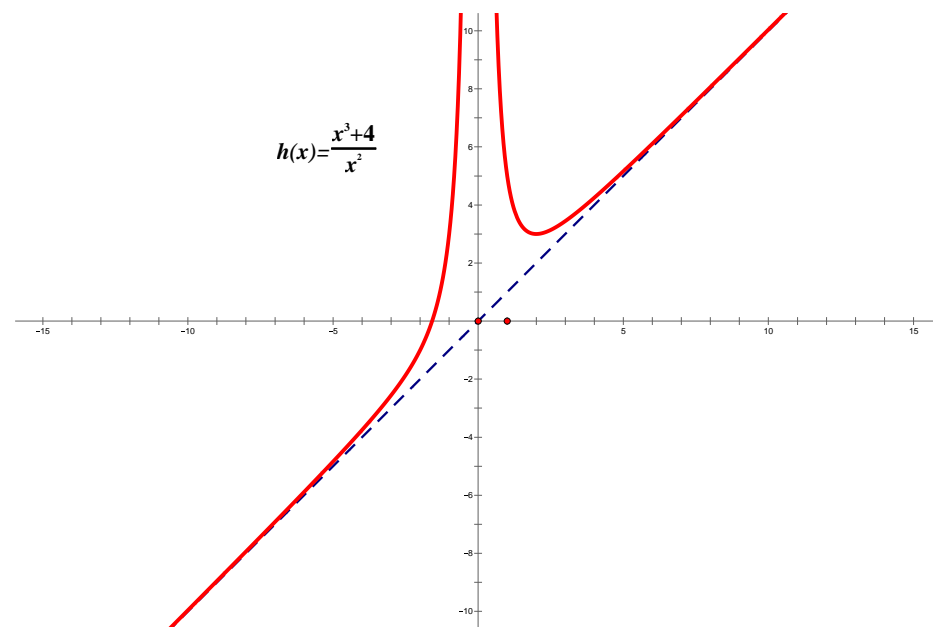
	$-\infty$		0		2		$\infty$
$f'$		+		-	0	+	
$f$		$\nearrow$		$\searrow$	3	$\nearrow$	

Točka lokalnog minimuma je 2, a lokalni minimum je  $h(2) = 3$

4. Intervali konveksnosti i konkavnosti, točke pregiba funkcije  $h$

$h''(x) = \frac{24}{x^4}$ , funkcija je konveksna na  $\langle -\infty, 0 \rangle, \langle 0, \infty \rangle$ . Nema točaka pregiba.

5. Graf funkcije  $h$



$$i(x) = \frac{16}{x^2(x-4)}$$

1. domena, nultočke i asimptote funkcije  $i$

Domena:  $\mathbf{R} \setminus \{0,4\}$ . Nema nultočaka.  
Vertikalna asimptote:  $x = 0$ ,  $x = 4$ . Horizontalna asimptota:  $y = 0$ .

2. Parnost, neparnost i periodičnost funkcije  $i$

Funkcija  $i$  nije ni parna, ni neparna.  
Funkcija  $i$  nije periodična.

3. Intervali monotonosti i ekstremi funkcije  $i$

$$i''(x) = \frac{-16(3x-8)}{x^3(x-4)^2} \Rightarrow \text{stacionarna točka } x = \frac{8}{3}$$

	$-\infty$		0		$\frac{8}{3}$		4		$\infty$
$f'$	-		+	0	-		-		
$f$	$\searrow$		$\nearrow$	$-\frac{27}{16}$	$\searrow$		$\searrow$		

Točka lokalnog maksimuma je  $\frac{8}{3}$ , a lokalni minimum je  $i\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{27}{16}$ .

4. Intervali konveksnosti i konkavnosti, točke pregiba funkcije  $i$

Funkcija  $i$  je konkavna na intervalima  $\langle -\infty, 0 \rangle, \langle 0, 4 \rangle$ . Funkcija  $i$  je konveksna na intervalu  $\langle 4, \infty \rangle$ .  
Nema točaka pregiba.

5. Graf funkcije  $i$

