Sadržaj

STRATEGIJE FORMATIVNOG VREDNOVANJA U FAKULATATIVNOJ NASTAVI MATEMATIKE

Strategije formativnog vrednovanja predstavljaju oblike aktivnosti koje nastavnicima i učenicima priskrbljuju informacije o učeničkom činjeničnom, konceptualnog i proceduralnom razumijevanju matematičkih sadržaja. Ovako osmišljene strategije potiču razvoj metakognitivnih vještina učenika, a lako ih možemo implementirati u svakodnevnu nastavu. Primarno se koriste za formativno vrednovanje (vrednovanje prije i tijekom procesa učenja), a na kraju procesa učenja u svrhu reflektiranja naučenog. One potiču interes učenika, iniciraju matematička istraživanja i ohrabruju učenike u razrednim diskusijama, te generalno ne uključuju ocjenjivanje.

U nastavku slijede opisi strategija i primjeri korištenja navedenih strategija po modulima.

MODUL: Geometrija 1

STRATEGIJA: S & N izjave (Slažem se i ne slažem se izjave)

Opis strategije:

Učenici će na nastavnom listiću dobiti određeni broj izjava vezanih uz matematičke koncepte ili procedure koje su u fokusu nastavnog sata na kojem se primjenjuje ova strategija. U prvom dijelu primjene ove strategije učenici se odlučuju slažu li se ili se ne slažu s danom izjavom ili izjavljuju da nemaju dovoljno informacija za tu odluku, pri čemu biraju ponuđenu opciju *ovisi*. U nastavku se od njih zahtijeva da svoju odluku argumentiraju.

Primjer 1.

Izjava	Kako to možemo otkriti?
1. Srednjica trokuta je paralelna jednoj stranici trokuta i njezina je duljina jednaka trećini duljine te stranice. ____ slažem se, ____ ne slažem se, ____ ovisi, ____ nisam siguran Moje razmišljanje:	

2. Središte trokutu opisane kružnice jest sjecište simetrala stranica tog trokuta. ____ slažem se, ____ ne slažem se, ____ ovisi, ____ nisam siguran Moje razmišljanje:	
3. Položaj karakterističnih točaka ovisi o vrsti trokuta. ____ slažem se, ____ ne slažem se, ____ ovisi, ____ nisam siguran Moje razmišljanje: 4. Težište i središte trokutu opisane kružnice su točke koje se uvijek nalaze unutar trokuta. ____ slažem se, ____ ne slažem se, ____ ovisi, ____ nisam siguran Moje razmišljanje:	
5. Svakom četverokutu se može opisati kružnica. ____ slažem se, ____ ne slažem se, ____ ovisi, ____ nisam siguran Moje razmišljanje:	

Primjer 2.

Izjava	Kako to možemo otkriti?
1. Trapez je tangencijalni četverokut. ____ slažem se, ____ ne slažem se, ____ ovisi, ____ nisam siguran Moje razmišljanje:	
2. Svi obodni kutovi nad istim lukom kružnice su jednaki. ____ slažem se, ____ ne slažem se, ____ ovisi, ____ nisam siguran Moje razmišljanje:	
3. Ovisno o položaju dviju kružnica, mogu postojati najviše dvije zajedničke tangente. ____ slažem se, ____ ne slažem se, ____ ovisi, ____ nisam siguran Moje razmišljanje:	

4. Potencija točke s obzirom na kružnicu ne ovisi o izboru te točke. ____ slažem se, ____ ne slažem se, ____ ovisi, ____ nisam siguran Moje razmišljanje:	

STRATEGIJA: Vrijedi uvijek, nekad ili nikad

Opis strategije:

Strategija *Vrijedi uvijek, nekad ili nikad* podrazumijeva listu izjava koju učenici pregledavaju i odlučuju vrijedi li dana izjava uvijek, nekad ili nikad. Ova strategija je korisna za otkrivanje generaliziraju li učenici ispravno svojstva vezana uz pojedine matematičke koncepte. Također, trebaju opravdati svoj odabir korektnom matematičkom argumentacijom.

Primjer 3.

1. Kod pravokutnog trokuta, ortocentar se nalazi unutar trokuta. ☐ uvijek ☐ nekad ☐ nikad	**Navedite primjere.**
2. Mjera obodnog kuta jednaka je mjeri dvostrukog središnjeg kuta nad istim lukom. ☐ uvijek ☐ nekad ☐ nikad	**Navedite primjere.**
3. Središte trokutu upisane kružnice jest sjecište simetrala stranica tog trokuta. ☐ uvijek ☐ nekad ☐ nikad	**Navedite primjere.**

4. Iz dane točke izvan kružnice mogu se konstruirati dvije tangente na tu kružnicu. ☐ uvijek ☐ nekad ☐ nikad	**Navedite primjere.**
5. Centralna simetrija je poseban slučaj rotacije. ☐ uvijek ☐ nekad ☐ nikad	**Navedite primjere.**

MODUL: Geometrija 2

STRATEGIJA: Karta migracija

Opis strategije:

Karta migracija je brzi način za dobivanje vizualnog dojma o učeničkom razmišljanju i o razini povjerenja u vlastite ideje. Nastavnik najprije s učenicima dogovori način pozicioniranja u učionici. Odredit će se dijelovi učionice gdje će se smjestiti učenici koji se odluče za pojedini odgovor te će svojim pozicioniranjem (npr. bliže prozoru) odati i razinu sigurnosti u svoj odabir. Nakon toga, učenici dobiju nastavni listić sa zadatkom koji će samostalno rješavati. Smještajući se u određeni dio učionice učenici tvore fizički graf iz kojeg se može očitati valjanost i razina sigurnosti učeničkog odgovora.

Primjer.

1. Presjek kocke ravninom ne može biti:
   a) Trokut
   b) Pravokutnik
   c) Šesterokut
   d) Sedmerokut

2. Tijelo koje ne možemo presjeći ravninom kroz sve njegove strane jest:

a) Tetraedar

b) Ikozaedar

c) Dodekaedar

d) Heksaedar

3. Presjek četverostane piramide ravninom ne može biti:

    a) Trokut

    b) Peterokut

    c) Šesterokut

    d) Četverokut

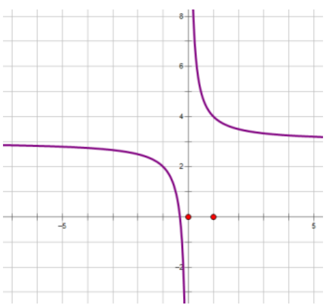
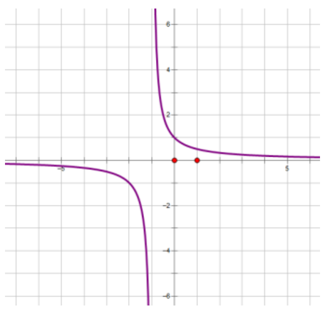
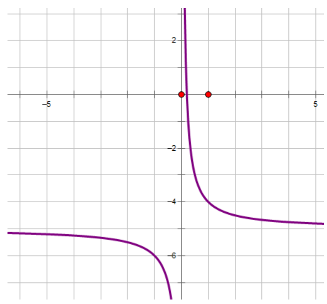
MODUL: Funkcije 1

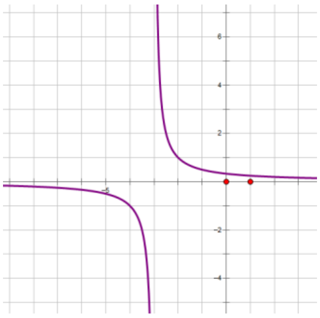
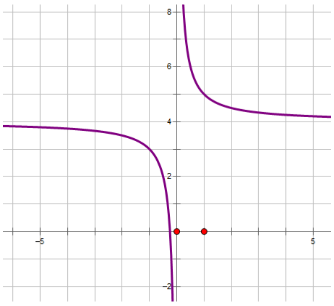
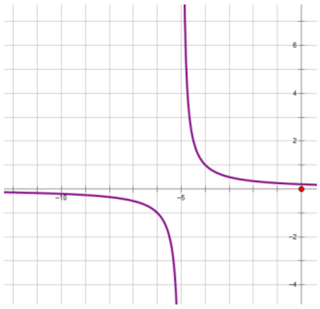
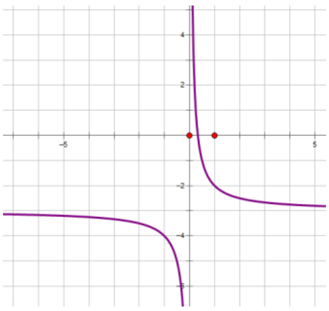
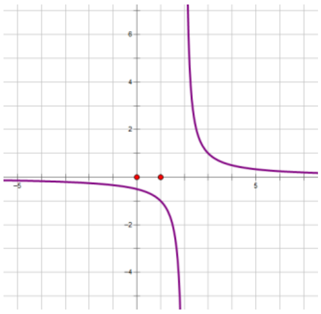
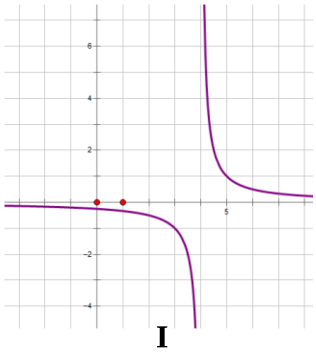
STRATEGIJA: Razvrstaj kartice

Opis strategije:

Strategija *Razvrstaj kartice* je aktivnost u kojoj učenici rade u skupinama. Surađujući, učenici razvrstavaju dane kartice na kojima mogu biti slike, brojevi, simboli ili riječi. Razvrstavaju ih prema uočenim ili zadanim svojstvima, koristeći svoje prethodno znanje o matematičkim konceptima i procedurama. Također, učenici trebaju argumentirati i opisati po kojem su kriteriju radili razvrstavanje kartica, ukoliko on nije unaprijed zadan.

Primjer.

 **A**	 **B**	 **C**

 **D**	 **E**	 **F**
 **G**	 **H**	 **I**

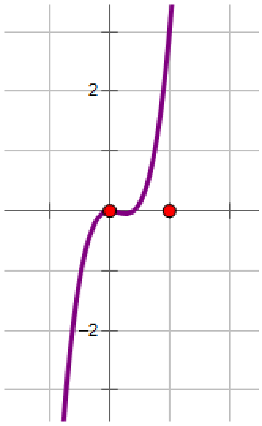
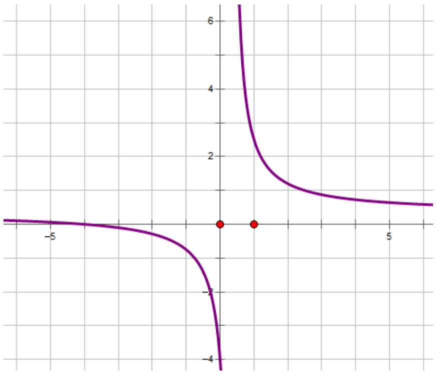
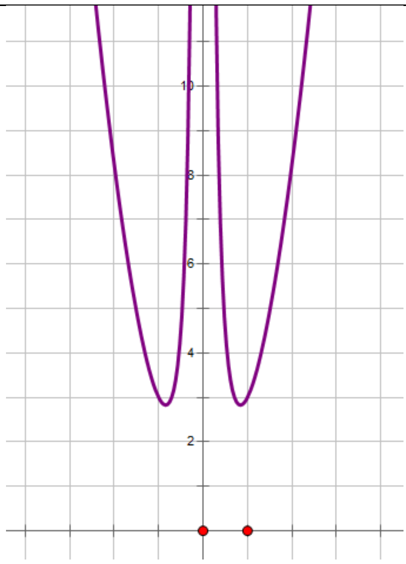
MODUL: Funkcije 2

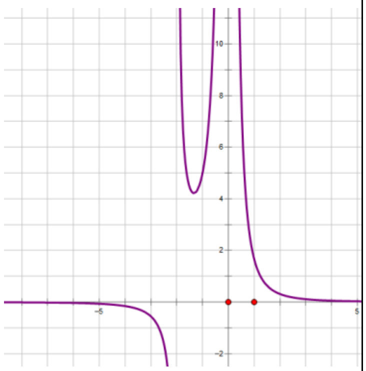
STRATEGIJA: Izbaci uljeza

Opis strategije:

Ova strategija podrazumijeva kombinaciju naizgled sličnih matematičkih objekata, brojeva, simbola, slika ili termina izazivajući pritom učenike na izdvajanje onog koji se nekim svojstvom ili izostankom svojstva razlikuje od drugih.

Primjer.

<table>
<tr><td colspan="4">1. skupina kartica</td></tr>
<tr><td>$f(x) = 5x^3 - 2x^2$</td><td>$\mathfrak{D}_f = \mathbb{R}$</td><td>
</td><td>$f'(x) = 8x^2 - 4x$</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. skupina kartica</td></tr>
<tr><td>$g(x) = \dfrac{x+4}{3x-1}$</td><td>$\mathfrak{D}_g$
$= \mathbb{R} \setminus \left\{-4, \dfrac{1}{3}\right\}$</td><td>
</td><td>$g'(x)$
$= -\dfrac{13}{(3x-1)^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. skupina kartica</td></tr>
<tr><td>$h(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$</td><td>$\mathfrak{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$</td><td>
</td><td>$h'(x) = 2 - \dfrac{2}{x^3}$</td></tr>
</table>

4. skupina kartica			
$i(x) = \dfrac{5}{x^2(x-2)}$	$\mathfrak{D}_i = \mathbb{R} \setminus \{-2,0\}$		$i'(x) = -\dfrac{5(3x+4)}{x^3(x+2)^2}$

MODUL: Matrice i vektori

STRATEGIJA: Kreiraj zadatak

Opis strategije:

Strategija *Kreiraj zadatak* je oblik aktivnosti u kojoj učenici umjesto rješavanja problema kreću od zadanog brojevnog izraza, jednadžbe, nejednadžbe, grafa ili slike i pokušavaju kreirati tekstualni zadatak koji odgovara toj situaciji.

Primjer.

U matričnom obliku sustav ima oblik $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$. Kreirajte i riješite tekstualni zadatak koji odgovara danom sustavu.

MODUL: Modeliranje

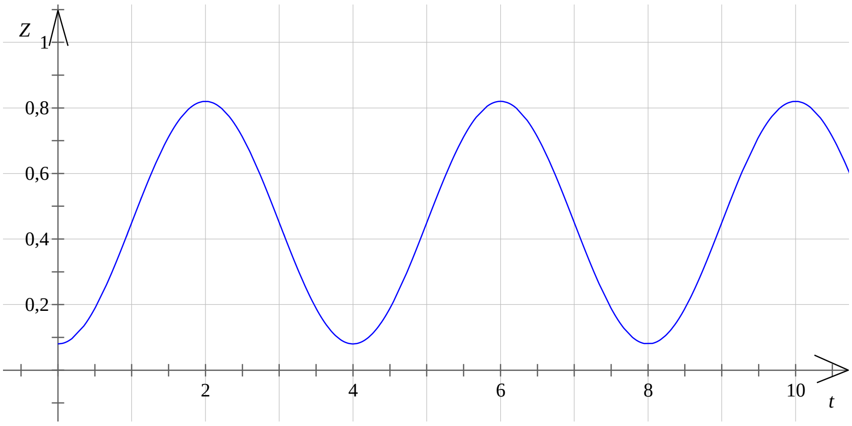
STRATEGIJA: Svaki graf ima svoju priču

Opis strategije:

Primjenom ove strategije otkriva se učenička sposobnost za smislenu interpretaciju raznih grafičkih prikaza. Istraživanja pokazuju da učenici svih uzrasta često pogrešno doživljavaju i interpretiraju grafičke prikaze kao doslovne slike situacije. Učenicima je dan grafički prikaz i realni kontekst te se od njih zahtjeva osmišljavanje priče koja mu najbolje odgovara.

Primjer.

Dani grafički prikaz prikazuje zapreminu zraka u plućima zdrave odrasle osobe t sekundi po izdisaju. Interpretirajte ga u terminima ljudskog disanja na segmentu [0,8].



Također, interpretirajte ga u matematičkom kontekstu grafova trigonometrijskih funkcija. Odredite domenu i kodomenu, maksimalnu i minimalnu vrijednost funkcije, period te u konačnici matematičkim simbolima zapišite pravilo pridruživanja funkcije.

MODUL: Statistika i vjerojatnost

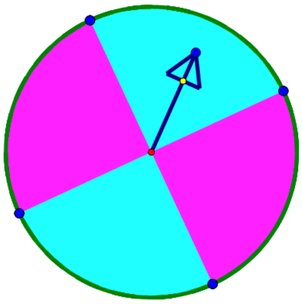
STRATEGIJA: Izbaci uljeza

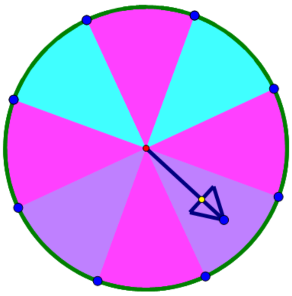
Opis strategije:

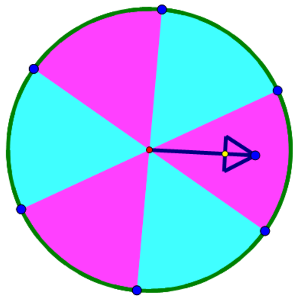
Ova strategija podrazumijeva kombinaciju naizgled sličnih matematičkih objekata, brojeva, simbola, slika ili termina izazivajući pritom učenike na izdvajanje onog koji se nekim svojstvom ili izostankom svojstva razlikuje od drugih.

Primjer.

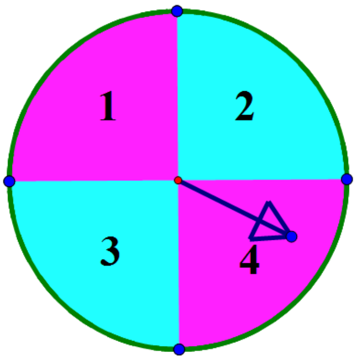
1. skupina kartica

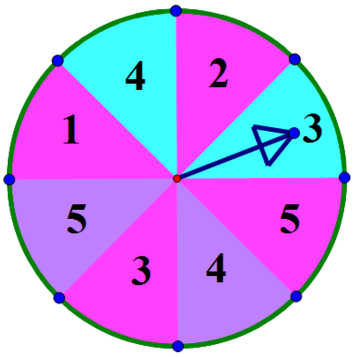


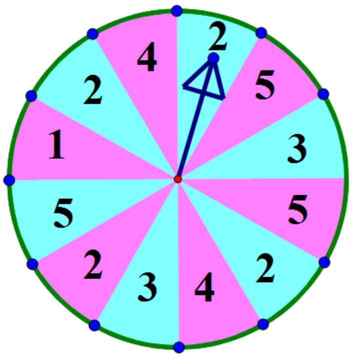




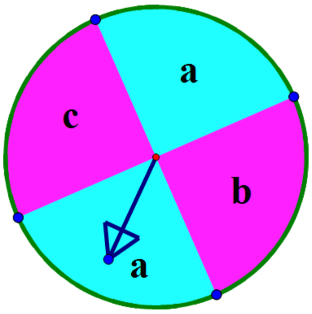
2. skupina kartica

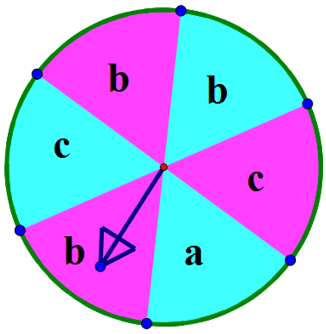


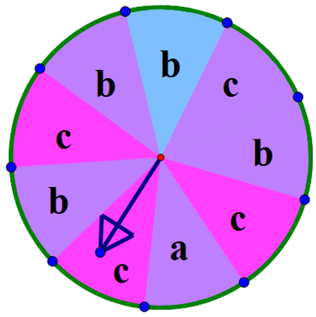




3. skupina kartica







MODUL: Financijska matematika

STRATEGIJA: Nekad sam mislio, sada znam

Opis strategije:

Ova strategija traži od učenika da usporede, verbalno i u pisanom obliku, svoje ideje s početka nastavnog sata ili s početka etape otkrivanja matematičkog koncepta, sa saznanjima do kojih su došli do kraja nastavnog sata ili etape. Učenici će nadopunjavati rečenicu *''Nekad sam mislio/la* __________*, a sada znam* __________*''* .

Primjer.

Nadopunite rečenice:

Nekad sam mislio da se zatezna kamata obračunava … , sada znam … .

Nekad sam mislio da banke kamatu obračunavaju … , sada znam … .

Nekad sam mislio da je kamatna stopa … , sada znam … .

MODUL: Teorija grafova

STRATEGIJA: Suglasni krugovi

Opis strategije:

Ova aktivnost osigurava fizički model kojim će učenici aktivirati svoje mišljenje i uključiti se u razredne diskusije braneći svoje ideje. Učenici formiraju veliki krug, a učitelj čita izjave. Učenici koji se slažu s izjavom zakorače u središte kruga, dok oni koji se ne slažu ostaju na mjestu, tj. na rubu kruga. Zatim nastavnik grupira učenike u manje skupine od 3-5 učenika u kojima su zastupljeni učenici različitog mišljenja. Slijedi rasprava u kojoj svaki učenik brani svoje mišljenje argumentirajući i obrazlažući svoje ideje. Postupak se ponavlja nekoliko puta. Za svaku novu izjavu učenici ispočetka formiraju veliki krug.

Primjeri izjava.

Graf u kojem postoji put između svaka dva vrha zove se multigraf.

Staza je šetnja bez ponovljenih bridova.

Eulerov ciklus je jednostavan ciklus koji sadrži sve vrhove.

Stupanj vrha je broj bridova s kojima je vrh spojen, tj. koji su incidentni vrhu.

Kod težinskog grafa barem jednom bridu je pridružen neki broj.

Jednostavan graf ima samo jednu petlju.

Put je šetnja u kojoj su svi vrhovi različiti.

MODUL: Optimizacija

STRATEGIJA: Dodaj problem

Opis strategije:

Ova strategija osigurava priliku aktiviranja svakog učenika i razmjene učeničkih ideja, kao i ispitivanja njihove valjanosti. Primjena strategije započinje postavljanjem problema i organiziranjem rada u paru, gdje se učenici upoznaju s problemom te biraju strategiju, odnosno različite matematičke pojmove i postupke koje će koristiti pri rješavanju problema. Svaki par učenika radi na problemu dok učitelj ne da znak za *dodavanje problema*, odnosno predavanje papira, na kojem su započeli rješavanje paru učenika koji sjedi ispred ili iza njih. Taj će par učenika analizirati djelomično rješenje koje je dano na papiru, utvrditi efikasnost korištene strategije i valjanost provedenog matematičkog računa, izvršiti nužne izmjene ili dopune te će do kraja riješiti postavljeni problem ne ignorirajući prethodni rad.

Primjer.

Zadatak 1. iz aktivnosti Linearno programiranje. Učenici jedne škole odlučili su sakupiti novac za napuštene životinje prodajom majica i privjesaka s likom neke životinje. Majice će ih koštati 20 kn po komadu, a privjesci 5 kn po komadu. Na majicama planiraju zaraditi 20 kuna, a na privjescima 8 kuna po komadu. Odlučili su uložiti minimalno 450 kuna, a s obzirom na iskustvo od prošle godine moraju naručiti barem 20 privjesaka. Kako se nisu na vrijeme predbilježili za kupnju, dućan u kojem su naručili, ne može im dostaviti više od 60 komada željene robe. Koliko bi komada majica, a koliko komada privjesaka učenici trebali naručiti kako bi njihova zarada bila što veća?

Literatura:

1. Soldić, D., Diplomski rad: *Strategije formativnog vrednovanja u nastavni matematike u osnovnoj I srednjoj školi*, 2014., PMF – Matematički odjel, Zagreb.

2. P. Keeley, C.R. Tobey, *Mathematics Formative Assessment: 75 Practical Strategies for Linking Assessment, Instruction, and Learning,* Corwin Press & NCTM, 2011.

PRIMJERI PISANIH ISPITA ZA SUMATIVNO VREDNOVANJE NA KRAJU MODULA

Ispit 1

Geometrija 1

1. a. Konstruirajte jednakokračan trapez s većom osnovicom duljine 3 cm i jednim kutom od $60°$. Koliko ima rješenja?
   b. Konstruirajte jednakokračan trapez s većom osnovicom duljine 3 cm i jednim kutom od $60°$ u koji se može upisati kružnica. Opišite konstrukciju.
   Koliko ima rješenja?
   c. Izračunajte opseg trapeza zadanog u b. zadatku.
   d. Izračunajte površinu trapeza zadanog u b. zadatku.

2. Lucija izrađuje privjeske od žice u obliku jednakostraničnog trokuta stranice duljine a. U trokut su upisane tri sukladne kružnice koje se međusobno dodiruju, a svaka od njih dodiruje i po dvije stranice trokuta. Izračunajte duljinu žice koja je potrebna za izradu jednog privjeska?

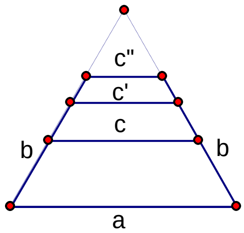
3. a. Duljina osnovice jednakokračnog trokuta je 60 cm, a polumjer upisane kružnice 15 cm. Izračunajte površinu trokuta.
   b. U kojem omjeru diralište kružnice dijeli krak trokuta?

4. Kroz proizvoljnu točku u danom trokutu povučene su paralele sa stranicama. Tako su dobivena tri manja trokuta čije su površine P_1, P_2 i P_3. Kolika je površina tog trokuta?

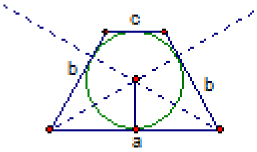
5. Nožište visine na hipotenuzu dijeli tu hipotenuzu na odsječke 25.6 cm i 14.4 cm.
   a. Izračunajte površinu upisanog kruga tom trokutu.
   b. Ako je tom trokutu opisana kružnica, odredite duljine njezinih lukova nad katetama.

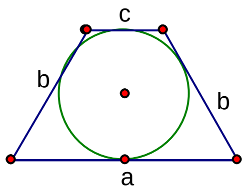
Ispit 1 rješenja

1. a. beskonačno mnogo, $0 < b < 3$cm.

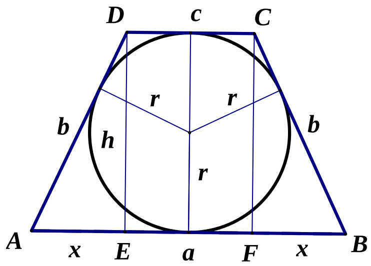


b. rješenje je jedinstveno, na stranicu a duljine 3 cm nanesemo kutove od $60°$ s obje strane. Sjecište simetrala tih kutova središte je kružnice upisane u trapez.





c. Neka je E nožište visine h iz vrha D. Tada je $\overline{AE} = x = b\cos 60° = \frac{b}{2}$.



Trapez je jednakokračan, pa je $x = \frac{a-c}{2}$, odnosno $\frac{b}{2} = \frac{a-c}{2}$, a kako je trapez tangencijalan, to je $2b = a + c$.

Dakle,

$2b = a + c$, $\frac{b}{2} = \frac{a-c}{2}$ i $a = 3$, odakle je

$$\left.\begin{array}{r} 2b = 3 + c \\ b = 3 - c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6 - 2c = 3 + c \\ b = 3 - c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3 = 3c \\ b = 3 - c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} c = 1 \\ b = 2 \end{array}\right\}.$$

Slijedi,

$O = a + 2b + c = 8$ cm .

d. Visinu h izračunat ćemo iz pravokutnog trokuta ΔAED:

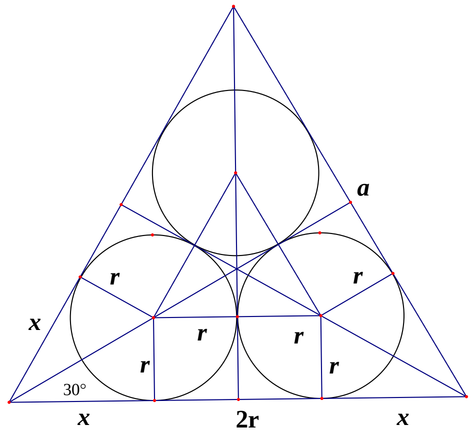
$h = b\sin 60° = \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$ $\qquad P = \frac{a+c}{2} \cdot h = 2\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

2. Neka je x udaljenost od vrha trokuta do dirališta kruga upisanog u taj trokut.

   Tada je $a = 2r + 2x$.

   Kako je $\frac{x}{r} = ctg30°$, to je $x = r\sqrt{3}$, pa je $a = 2r\left(1+\sqrt{3}\right)$, odakle je $r = \frac{a}{2\left(\sqrt{3}+1\right)}$,

   odnosno $r = \frac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$.



$o = 3a + 3o \quad o = 3a + 3\cdot 2r\pi \qquad o = 3a + \dfrac{3a\left(\sqrt{3}-1\right)\pi}{4}$

3. a. I.način

   Kako je, prema skici,

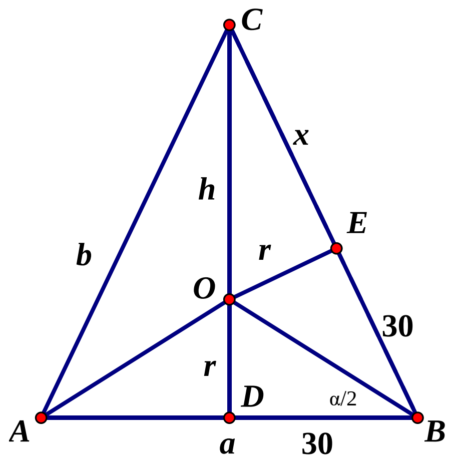
   $tg\frac{\propto}{2} = \frac{r}{\frac{a}{2}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$,

$\alpha = 53.13°$,

$P = \dfrac{a\cdot b\sin\alpha}{2} = \dfrac{60\cdot 50\cdot \sin 53.13°}{2} = 1200\,\text{cm}^2$. Ili je prema formuli za tangens dvostrukog kuta

$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.

Iz $\frac{h}{\frac{a}{2}} = tg\alpha$ slijedi $h = 40$ cm, pa je $P = \frac{ah}{2} = \frac{60\cdot 40}{2} = 1200\ \text{cm}^2$.



II.način

Neka je $\overline{AB} = a$ osnovica, $\overline{AC} = \overline{BC} = b$ krak i $\overline{CD} = h$ visina na osnovicu, O središte upisanog kruga.

Iz sličnosti trokuta $\Delta OCE \; i \; \Delta BCD$ slijedi

$x : r = h : \frac{a}{2}$, odnosno $\frac{b-30}{15} = \frac{h}{30}$, pa je $2(b-30) = h$.

Površinu trokuta ΔABC izračunat ćemo na dva načina:

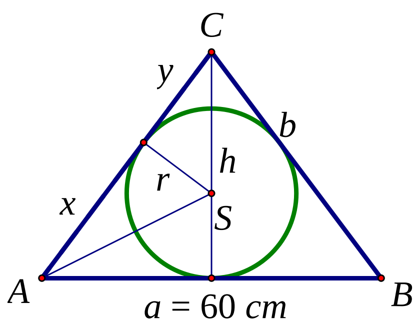
$$i)\; P = \frac{ra}{2} + 2\frac{br}{2} = \frac{15 \cdot 60}{2} + b \cdot 15 = 450 + 15b$$

$$ii)\; P = \frac{ah}{2} = \frac{60 \cdot 2(b-30)}{2} = 60(b-30)$$

Rješavanjem jednadžbe $450 + 15b = 60(30-b)$ slijedi $b = 50$ cm.

Dalje je $P = 450 + 15 \cdot 50 = 1200$ cm^2.

b.



$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = 50$ cm

$x = \dfrac{a}{2} = 30\,,\ \ y = b - x = 20\,,\ \ \ x : y = 3 : 2$

4. Trokuti $\Delta MB_1B_2\,, \Delta A_1MA_2\ i\ \ \Delta C_2C_1M$ su slični trokutu ΔABC jer su im svi odgovarajući kutovi sukladni (kutovi s paralelnim kracima).

Ako je $\overline{CB} = a,\ \ \overline{B_2M} = a_1,\ \ \overline{A_2A_1} = a_2\ \ \ i\ \ \ \overline{MC_2} = a_3$, prema uvjetu zadatke slijedi $a_1 + a_2 + a_3 = a.$

Površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati odgovarajućih stranica, pa je

$$\frac{P_1}{P} = \frac{a_1^2}{a^2} \Rightarrow P_1 = \frac{P \cdot a_1^2}{a^2} \Rightarrow \sqrt{P_1} = \frac{a_1}{a}\sqrt{P} \qquad (1)$$

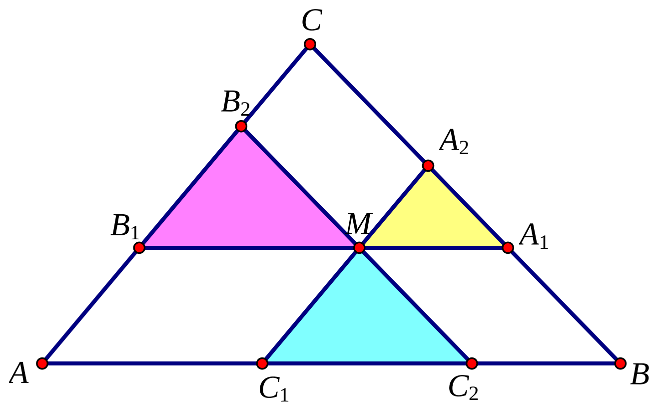
$$\frac{P_2}{P} = \frac{a_2^2}{a^2} \Rightarrow P_2 = \frac{P \cdot a_2^2}{a^2} \Rightarrow \sqrt{P_2} = \frac{a_2}{a}\sqrt{P} \qquad (2)$$

$$\frac{P_3}{P} = \frac{a_3^2}{a^2} \Rightarrow P_3 = \frac{P \cdot a_3^2}{a^2} \Rightarrow \sqrt{P_3} = \frac{a_3}{a}\sqrt{P} \qquad (3)$$

Iz (1) , (2) i (3) slijedi $\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2} + \sqrt{P_3} = \sqrt{P}\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{a}\right)$.

Odnosno,

$P = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}\right)^2.$



5. a. I.način

Neka je D nožište visine iz vrha B na hipotenuzu $\overline{AC}\,, \overline{AD} = 14.4\ cm\ i\ \overline{DC} = 25.6$ cm i neka je r polumjer upisane kružnice trokutu ΔABC. Tada iz sličnosti trokuta $\Delta ADB\ \ i\ \Delta ABC$ slijedi da je $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AB}$, odnosno $\overline{AB}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AC}$, a iz sličnosti trokuta $\Delta BCD\ i\ \Delta ABC$ slijedi da je $\overline{BC} : \overline{DC} = \overline{AC} : \overline{BC}$, odnosno $\overline{BC}^2 = \overline{DC} \cdot \overline{AC}$.

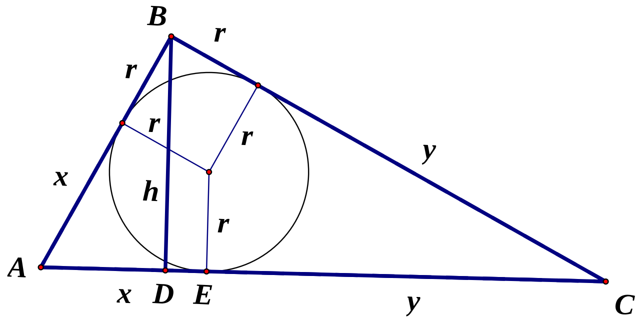
Kako je

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = 40 \text{ cm},$$
$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{AC}} = 24 \; cm \text{ i}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{DC} \cdot \overline{AC}} = 32 \text{ cm}, \; s = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}}{2} = 48 \text{ cm}.$$

Površinu trokuta možemo izračunati na dva načina:

$P = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = 384 \text{ cm}^2 \; ili \; P = rs.$

Slijedi, $r = 8 \; cm$, a površina kruga je $P = r^2\pi = 64\pi \text{ cm}^2$.



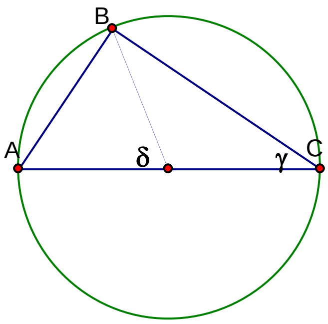
II.način

Kad se izračunaju stranice $\overline{AB} \; i \; \overline{BC}$, prema oznakama na skici ($\overline{AE} = x, \overline{EC} = y$) imamo:

$$\left.\begin{array}{r} x + r = 24 \\ y + r = 32 \\ x + y = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x + r = 24 \\ x + y + 2r = 56 \\ x + y = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow \; r = 8 \; cm.$$

b. Polumjer opisane kružnice je $r_o = \dfrac{AC}{2} = 20cm$, $\sin\gamma = \dfrac{AB}{AC} \;\; \Rightarrow \;\; \gamma = 36°52'$,

$\delta = 2\gamma = 73°44'$



$$l_1 = \frac{r_o \pi \delta}{180} = 8.2\pi \text{ cm}, \; l_2 = \frac{o}{2} - l_1 = \frac{r_o \pi}{2} - l_1 = 11.8\pi \text{ cm}$$

Ispit 2

Geometrija 2

1. Zaokružite jesu li sljedeće tvrdnje točne ili netočne.
    1. Presjek kocke i ravnine ne može biti peterokut.

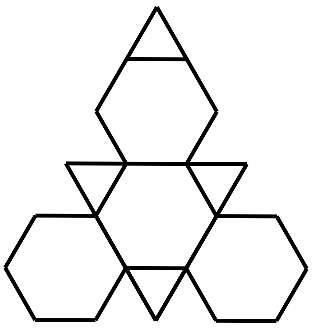
       T N
    2. Presjek pravilne četverostrane piramide i ravnine može biti trapez.

       T N
    3. Nogometna lopta je Platonovo tijelo.

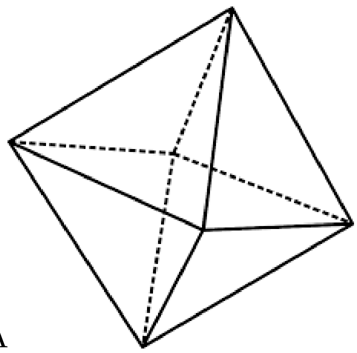
       T N
    4. Za Arhimedova tijela vrijedi Eulerova formula.

       T N

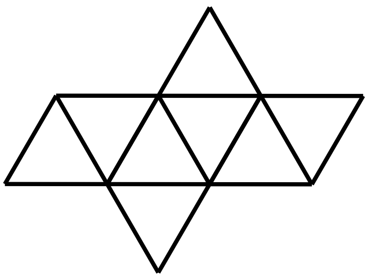
2. Povežite tijela i njihove mreže



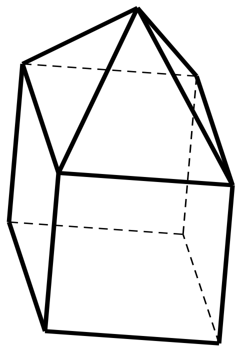
1



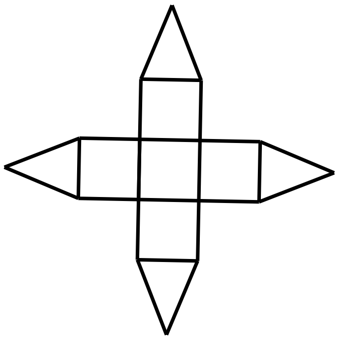
A



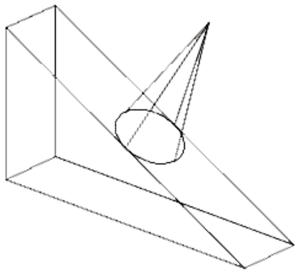
2



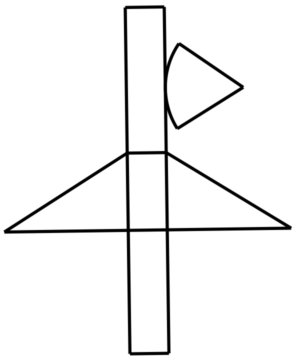
B



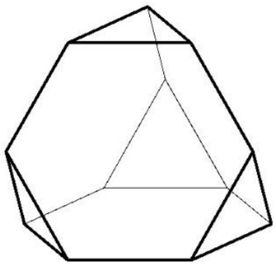
3



C

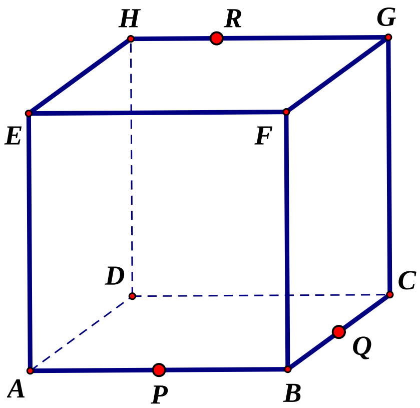


4



D

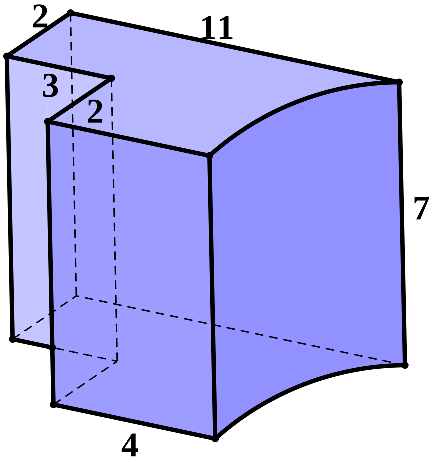
3. Zadana je kocka *ABCDEFGH* sa stranicom duljine a. Točke *P*, *Q*, *R* pripadaju njezinim bridovima kao na slici.



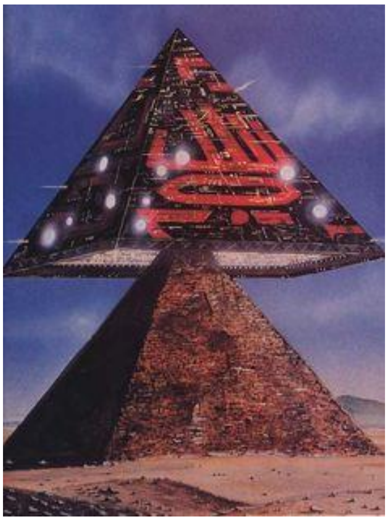
a. Skicirajte presjek kocke i ravnine *PQR*, ako su *P* i *Q* polovišta pripadajućih bridova, a *R* dijeli dužinu $\overline{HG}$ u omjeru 1 : 3 od vrha *H*.

b. Izračunajte površinu presjeka kocke i ravnine *PQR*, ako su *P*, *Q* i *R* polovišta pripadajućih bridova.

4. Odredite oplošje i obujam tijela sa slike.



5. Prema nekim su teorijama velike piramide u Egiptu zapravo sletišta za svemirske brodove kao na slici. Brodovi su oblika šuplje piramide tako da se mogu spustiti na Keopsovu piramidu i potpuno ju prekriti. Odredite obujam broda ako je „debljina“ njegove bočne strane 30 metara. Visina Keopsove piramide je $h = 146.72$ m, a osnovka kvadrat duljine stranice $a = 230.36$ m.



Ispit 2 rješenja

1.

a. Presjek kocke i ravnine ne može biti peterokut. Netočno

b. Presjek pravilne četverostrane piramide i ravnine može biti trapez. Točno

c. Nogometna lopta je Platonovo tijelo. Netočno

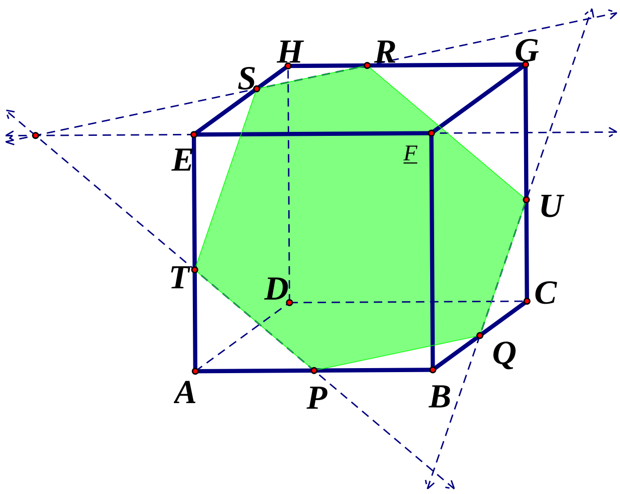
d. Za Arhimedova tijela vrijedi Eulerova formula.Točno

2.

1D, 2A, 3B, 4C

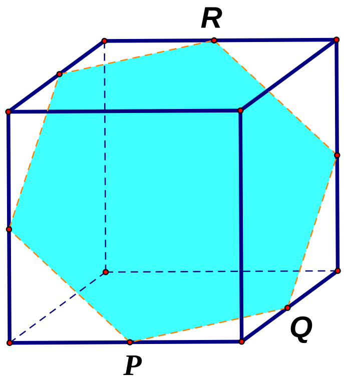
3.

a. Presjek kocke i ravnine *PQR*, ako su *P* i *Q* polovišta, a *R* dijeli dužinu $\overline{HG}$ u omjeru 1 : 3, od vrha *H*.

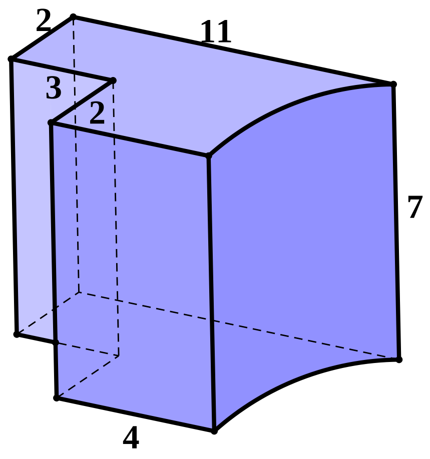


b. Površina presjeka kocke i ravnine *PQR*, ako su *P*, *Q* i *R* polovišta pripadajućih stranica.

$$P = 6\frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$



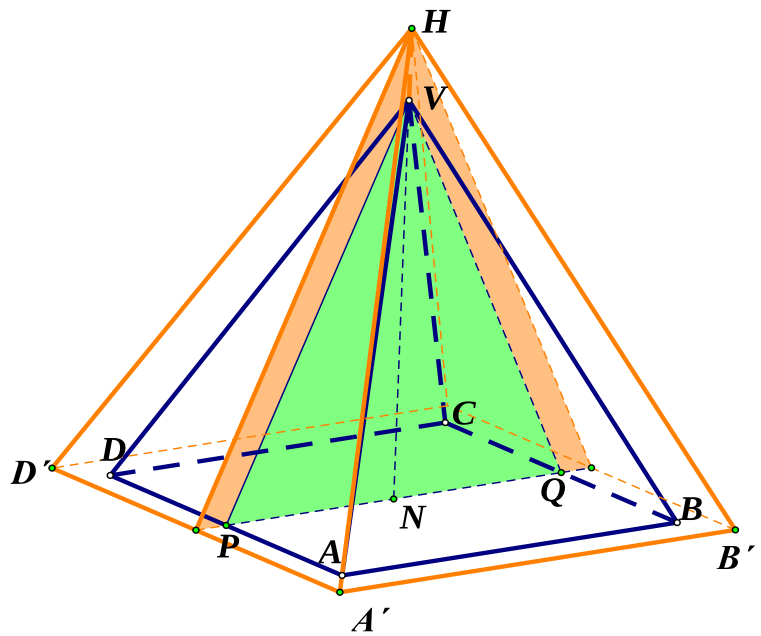
4. Oplošje i obujam tijela sa slike.

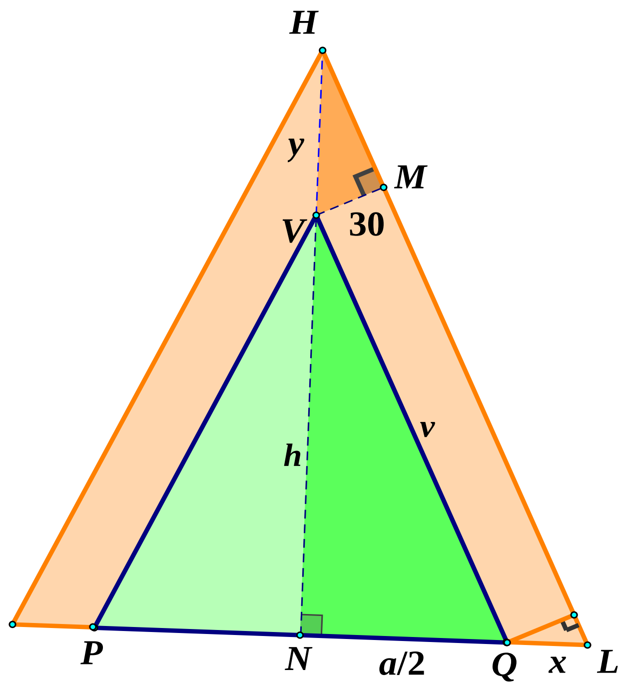


$$O = 11\cdot 7 + 2\cdot 7 + 3\cdot 7 + 2\cdot 7 + 4\cdot 7 + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 4 \cdot \pi \cdot 7 + 2 \cdot \left(4\cdot 11 - 3\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot 4^2\cdot \pi\right) = 230 + 6\pi \approx 248.85$$

$$V = 4\cdot 11\cdot 7 - 3\cdot 2\cdot 7 - \frac{1}{4}4^2\pi\cdot 7 = 266 - 28\pi \approx 178.04$$

5. „Debljina“ bočne strane broda je 30 metara. Visina Keopsove piramide je $h = 146.72$ m, a osnovka kvadrat duljine stranice $a = 230.36$ m.





Iz sličnosti trokuta *VMH* i *QNV* slijedi:

$$\frac{y}{v} = \frac{30}{\frac{a}{2}}$$

$$\frac{y}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{30}{\frac{a}{2}}$$

$$y = \frac{60}{a} \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$y = \frac{60}{230.36} \cdot \sqrt{146.72^2 + \left(\frac{230.36}{2}\right)^2} = 48.58\, m$$

$$h_{broda} = h + y$$

$$h_{broda} = 146.72 + 48.58 = 195.30\, m$$

$$a + 2x = a_{broda}$$

Iz sličnosti trokuta *HNL* i *VNQ* slijedi:

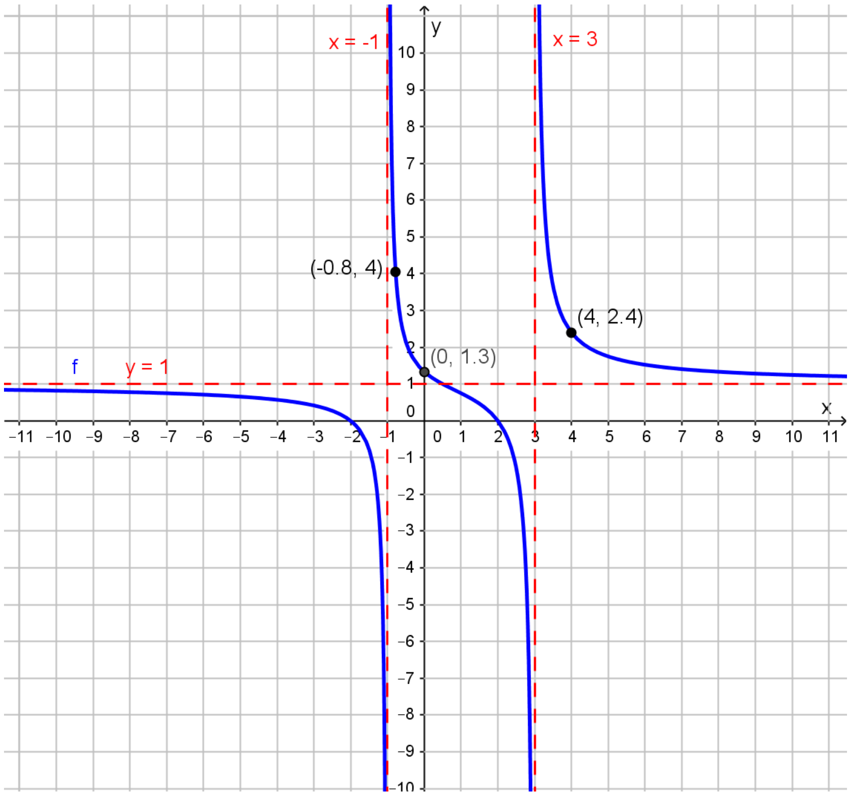
$$\frac{h_{broda}}{h} = \frac{a_{broda}}{a} \Rightarrow a_{broda} = a \cdot \frac{h_{broda}}{h} = 306.63\, m$$

$$V = \frac{1}{3}(a_{broda})^2 h_{broda} - \frac{1}{3}a^2 h = 3525561.45\, m^3$$

Ispit 3

Funkcije 1

I. Slika prikazuje graf funkcije *f*.



1. Ispunite slijedeću tablicu:

x	-2		4	0		3
f(x)		4			1	

2. Odredite:
   a. domenu funkcije *f* ______________________________
   b. sliku funkcije *f* ______________________________
   c. nultočke funkcije *f* ______________________________
   d. $f^{-1}(4)$ ______________________________
   e. $f(2)-3$ ______________________________
   f. $2^{f(4)}$ ______________________________

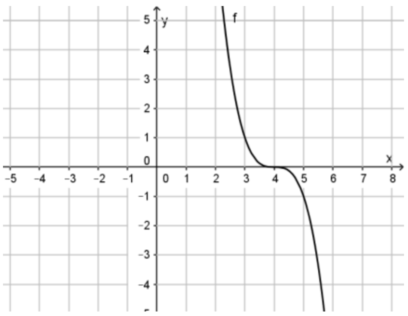
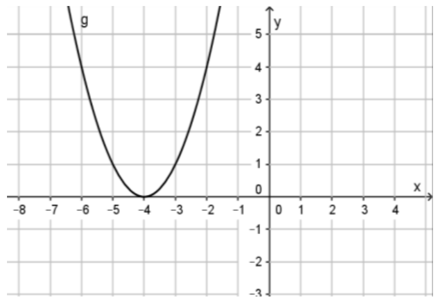
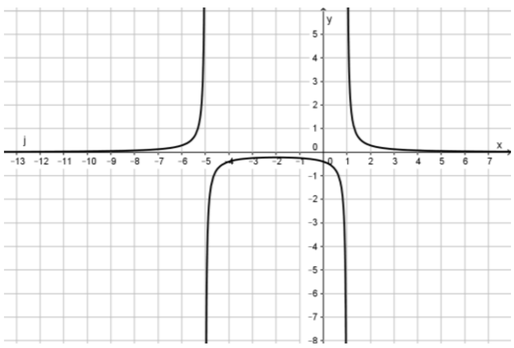
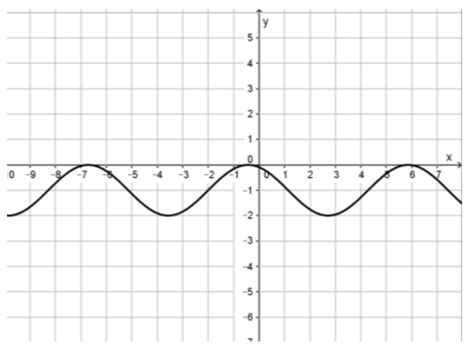
3. Zaokružite točan odgovor na postavljena pitanja.
   a. Je li funkcija čiji graf predstavlja slika injektivna? DA – NE
   b. Predstavlja li slika graf neke eksponencijalne funkcije? DA – NE
   c. Jesu li za $x > 2$ vrijednosti funkcije uvijek negativne? DA – NE

4. Koristeći sliku riješite nejednadžbu $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} - 1 \leq 0$.

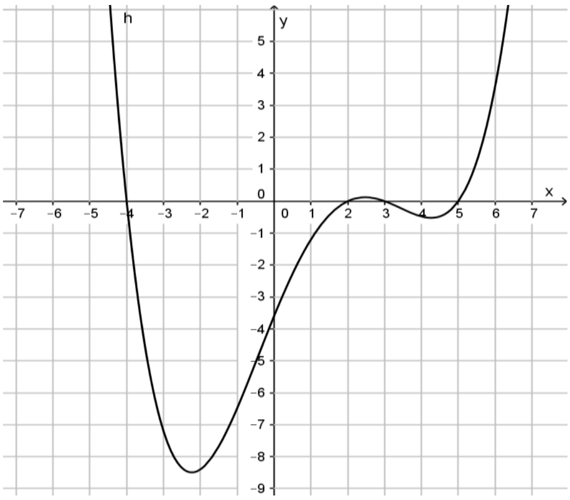
Rješenje: ____

II. Povežite grafove, formule i tvrdnje.

Upute: *U prazna polja uz graf upišite slovo odgovarajuće formule i tvrdnje. Neke od tvrdnji možete povezati s više grafova.*

<table>
<tr><td colspan="2">1.

</td><td colspan="2">2.

</td></tr>
<tr><td>Formula:</td><td>Tvrdnja:</td><td>Formula:</td><td>Tvrdnja:</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.

</td><td colspan="2">4.

</td></tr>
<tr><td>Formula:</td><td>Tvrdnja:</td><td>Formula:</td><td>Tvrdnja:</td></tr>
</table>

5.



Formula:	Tvrdnja:

Formule:

A. $f(x) = -(x-4)^3$

B. $f(x) = \frac{3}{10}(x^2 - 7x + 10)(x^2 + x - 12)$

C. $f(x) = \frac{2}{(x-1)(x+5)}$

D. $f(x) = x^4 - 2x^2$

E. $f(x) = x(x+8) + 16$

F. $f(x) = \cos(x+2) - 1$

G. $f(x) = \frac{2}{(x+1)(x+5)}$

H. $f(x) = (x-4)^3$

I. $f(x) = x^2 + 8x - 16$

J. $f(x) = \sin(x+2) - 1$

Tvrdnje:

a. Funkcija ima samo jednu nultočku kratnosti 2.

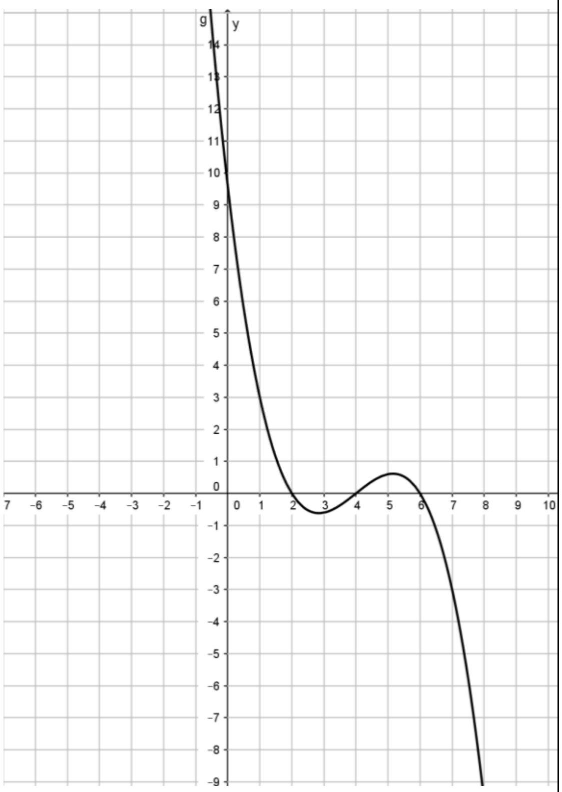
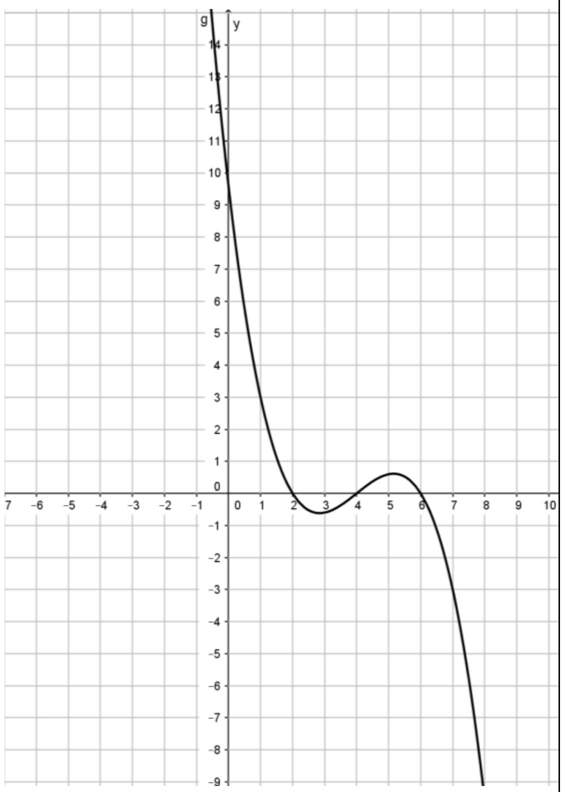
b. Funkcija je periodična.

c. $f(-2) + 1 > 0$

d. Funkcija nije injektivna.

e. Funkcija je definirana za sve realne brojeve.

III. Slike prikazuju graf $y = g(x)$.

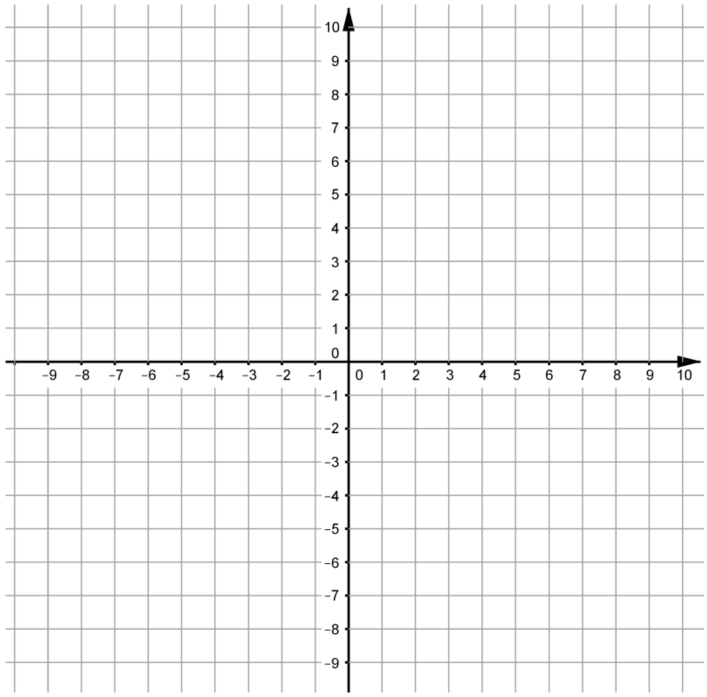
1. U istom koordinatnom sustavu nacrtajte i označite graf: a. $y = -g(x)$ b. $y = g(x) + 3$ 	2. U istom koordinatnom sustavu nacrtajte i označite graf: a. $y = g(2x)$ b. $y = g(x - 4)$ 

IV. Riješite slijedeće zadatke.

1. Skicirajte grafove funkcija $f(x) = e^{ax+b}$ i $g(x) = \ln(ax + b)$ gdje su a i b neki pozitivni realni brojevi.

   Odredite sjecišta nacrtanih grafova s koordinatnim osima.

   Jesu li funkcije međusobno inverzne?



2. Koliko realnih rješenja ima jednadžba $\frac{x+3}{x^2+x-2} = 2^x$?

3. Tvrtka koja proizvodi drvene stolice ima fiksne dnevne troškove od 1 500 kn i ukupne troškove od 66000 kn za 150 proizvedenih stolica dnevno.
   a. Ako je ukupni dnevni trošak linearno povezan s dnevnom proizvodnjom stolica napišite pravilo pridruživanja funkcije koja opisuje trošak.
   b. Koliki je mjesečni trošak proizvodnje ako se tijekom mjeseca sa 20 radnih dana proizvede 180 stolica dnevno?
   c. Izrazite formulom prosječni trošak po proizvedenoj stolici u jednom danu.
   d. Skicirajte graf funkcije prosječnog troška.

   Kojoj vrijednosti teži prosječni trošak kad dnevna proizvodnja raste?

Ispit 3 rješenja

I.

1.

x	-2	-0.8	4	0	nije u domeni	3
$f(x)$	0	4	2.4	1.3	1	nije def.

2.

a. domena funkcije f: $\underline{R \setminus \{-1,3\}}$

b. slika funkcije f: $\underline{R \setminus \{1\}}$

c. nultočke funkcije f: $\underline{(-2,0),\ (2,0)}$

d. $f^{-1}(4) = \underline{-0.8}$

e. $f(2) - 3 = \underline{-3}$

f. $2^{f(4)} = \underline{2^{2.4} \approx 5.28}$

3.

a. Je li funkcija čiji graf predstavlja slika injektivna? DA – $\boxed{\text{NE}}$

b. Predstavlja li slika graf neke eksponencijalne funkcije? DA – $\boxed{\text{NE}}$

c. Jesu li za $x > 2$ vrijednosti funkcije uvijek negativne? DA – $\boxed{\text{NE}}$

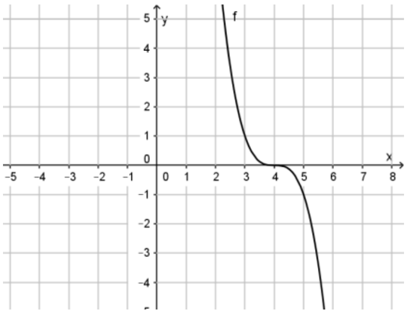
4. Koristeći sliku riješite nejednadžbu $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} - 1 \leq 0$.

Rješenje: $\underline{x \in \langle -\infty, -2] \cup \langle -1, 2] \cup \langle 3, +\infty \rangle}$

II. Povežite grafove, formule i tvrdnje.

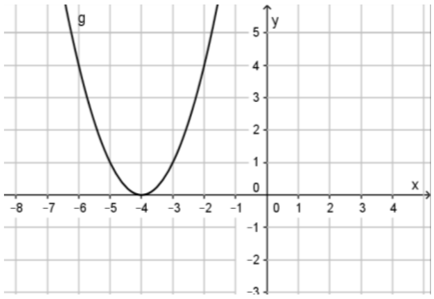
Upute: *U prazna polja uz graf upišite slovo odgovarajuće formule i tvrdnje. Neke od tvrdnji možete povezati s više grafova.*

4.



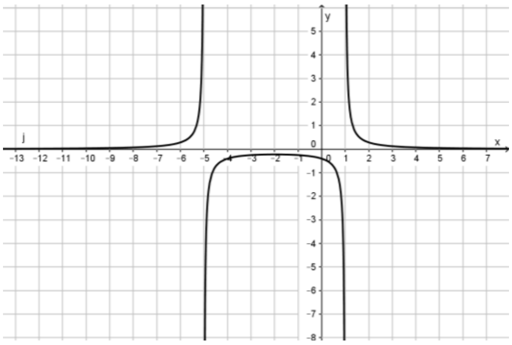
Formula:	Tvrdnja:
A	c,e

5.



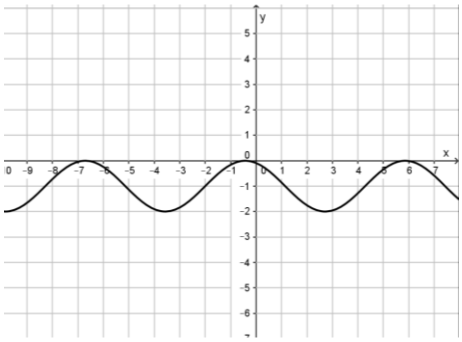
Formula:	Tvrdnja:
E	a,c,d,e

6.



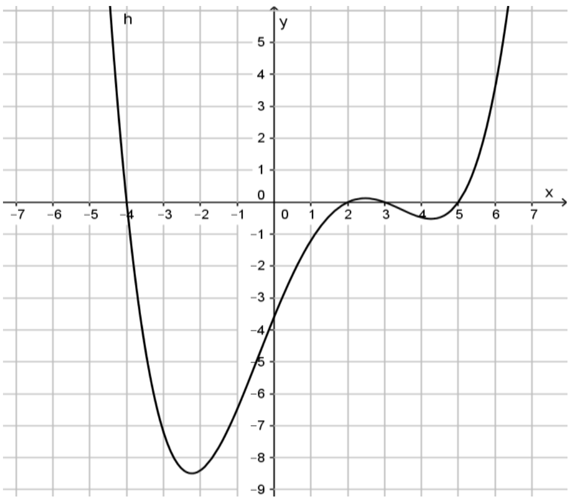
Formula:	Tvrdnja:
C	c,d

7.



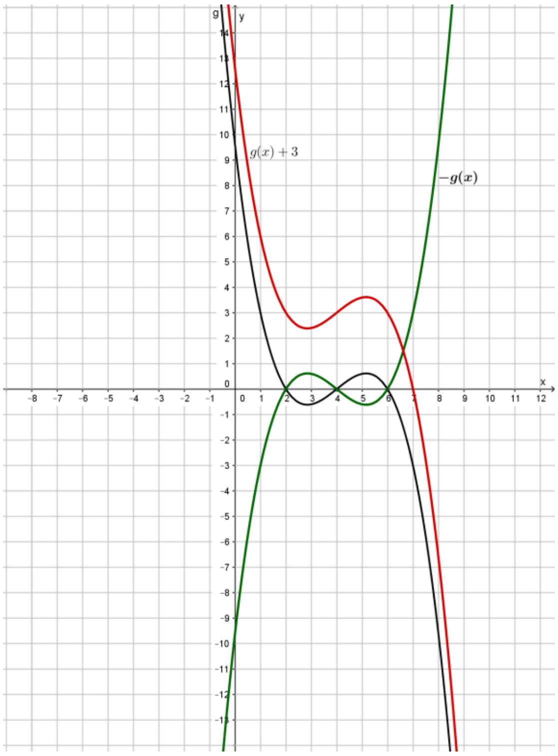
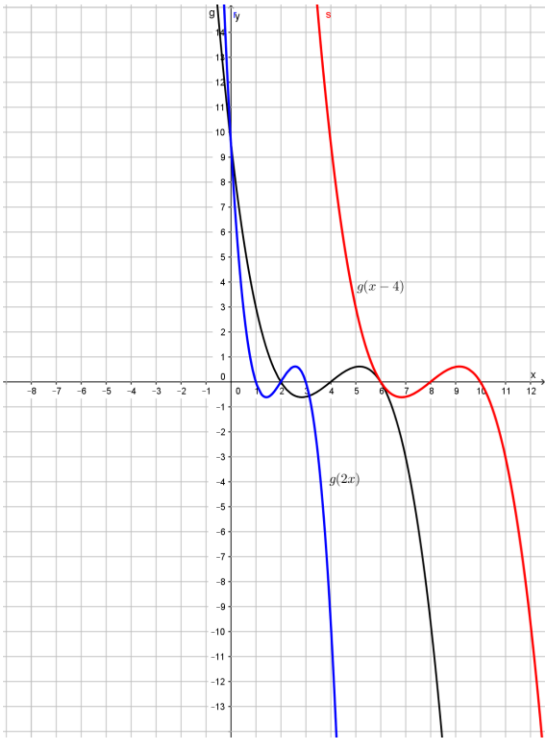
Formula:	Tvrdnja:
J	b,d,e

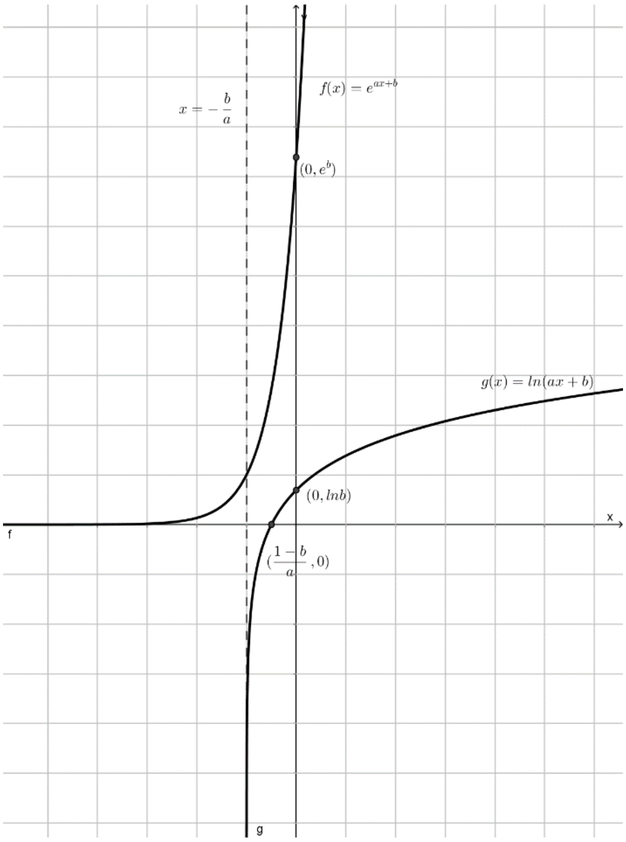
8.



Formula:	Tvrdnja:
B	d,e

III.

1. $y=-g(x)$, $y=g(x)+3$ 	2. $y=g(2x)$, $y=g(x-4)$ 



IV. Riješite slijedeće zadatke.

1. Skicirajte graf funkcije

   $f(x)=e^{ax+b}$ i $g(x)=\ln(ax+b)$

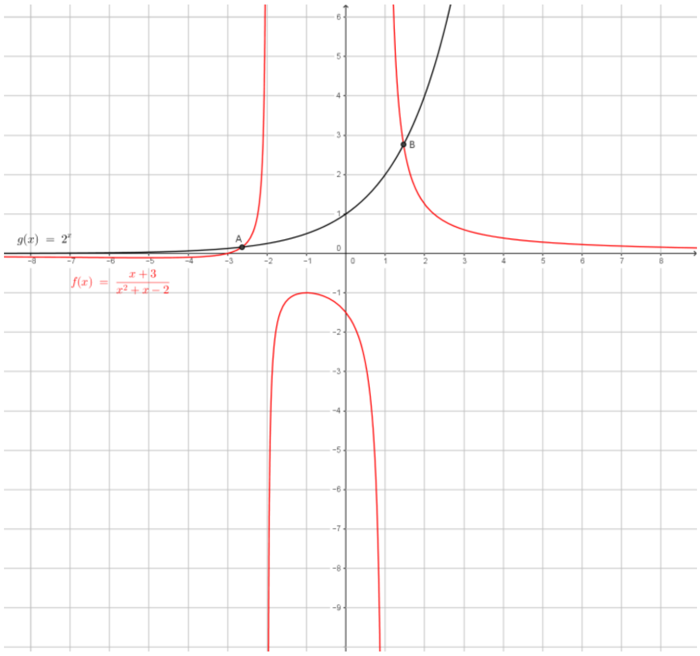
   gdje su a i b neki pozitivni realni brojevi.

   Odredite sjecišta grafova s koordinatnim osima.

   f: $(0,e^b)$, g: $\left(\frac{1-b}{a},0\right)$

   Je su li funkcije međusobno inverzne? NE

2. Koliko realnih rješenja ima jednadžba $\dfrac{x+3}{x^2+x-2} = 2^x$?



Jednadžba ima 2 rješenja.

3.

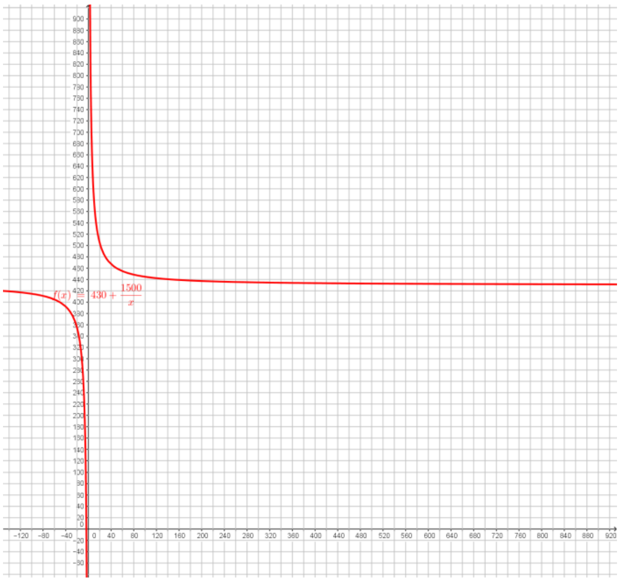
a. Jednadžba funkcije koja opisuje trošak: $\underline{f(x) = 440x + 1500}$, gdje je x broj proizvedenih stolica

b. Mjesečni trošak proizvodnje ako se tijekom tog mjeseca za 20 radnih dana proizvede 180 stolica dnevno? 1 614 000 kn

c. Prosječni trošak po proizvedenoj stolici u jednom danu:

$$\underline{t(x) = \frac{f(x)}{x} = 440 + \frac{1500}{x}}$$

d. Skicirajte graf funkcije prosječnog troška.



Napomena: Ovisno o uvjetima može se od učenika tražiti da umjesto skice koriste grafički kalkulator ili računalo.

e. Prosječni trošak kad dnevna proizvodnja raste teži iznosu od 440 kn.

Ispit 4

Modeliranje

U jednakostranični trokut duljine stranice a upisan je pravokutnik čija je jedna stranica na stranici trokuta, a dva ostala vrha pripadaju po jednoj od ostalih dviju stranica. Koji od takvih pravokutnika imaju najveću površinu?

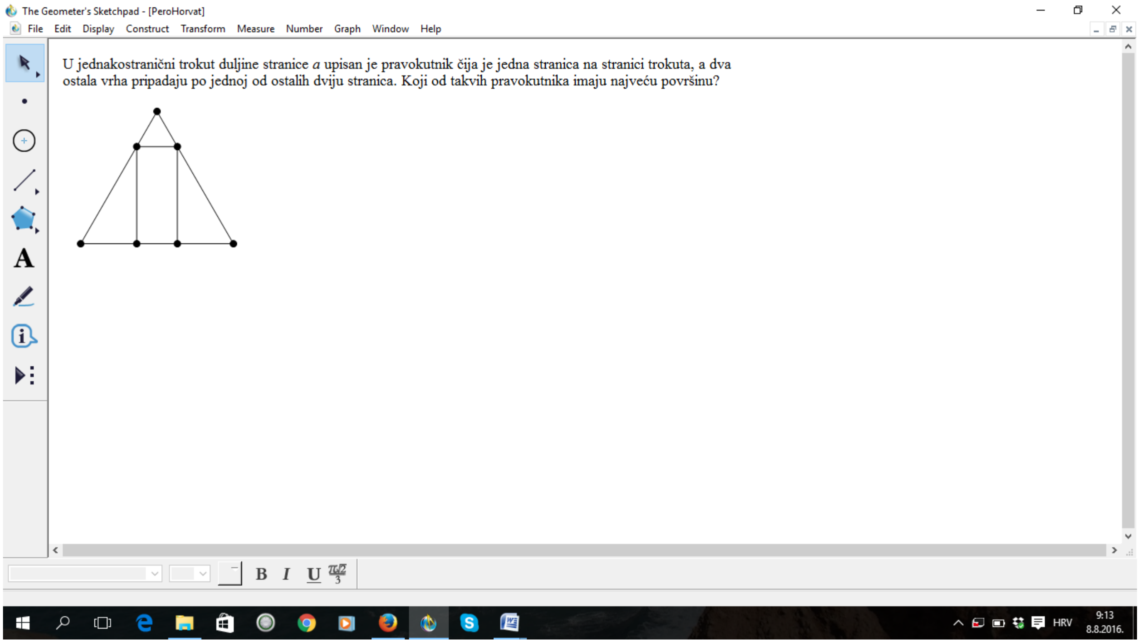
a) Kreirajte novi *SketchPad* dokument *ImePrezime.gsp*.
b) Prepišite tekst zadatka.
c) Kreirajte geometrijski model.
d) Mjerite duljinu stranice pravokutnika koja leži na stranici trokuta i površinu četverokuta. Tabelirajte izmjerene vrijednosti i ucrtajte ih u koordinatni sustav.
e) Pretpostavite funkcijsku ovisnost zadanih veličina. Nacrtajte graf funkcije koji joj odgovara koristeći klizače.
f) Očitajte i zapišite maksimum funkcije.
g) U kojem su odnosu maksimum funkcije i duljina stranice trokuta? Za koji pravokutnik je površina maksimalna?
h) Otvorite novu stranicu dokumenta. Kopirajte konstruirani jednakostranični trokut i njemu upisan pravokutnik. Izrazite površinu pravokutnika kao funkciju jedne varijable (duljine stranice pravokutnika koja leži na stranici jednakostraničnoga trokuta kojem je pravokutnik upisan). Svoja razmišljanja ilustrirajte i zabilježite.
i) Kada je površina pravokutnika maksimalna? Podudara li se rezultat s rješenjem pod g)?
j) Završeni uradak predajte nastavniku u elektronskom obliku.

<u>Napomena</u>

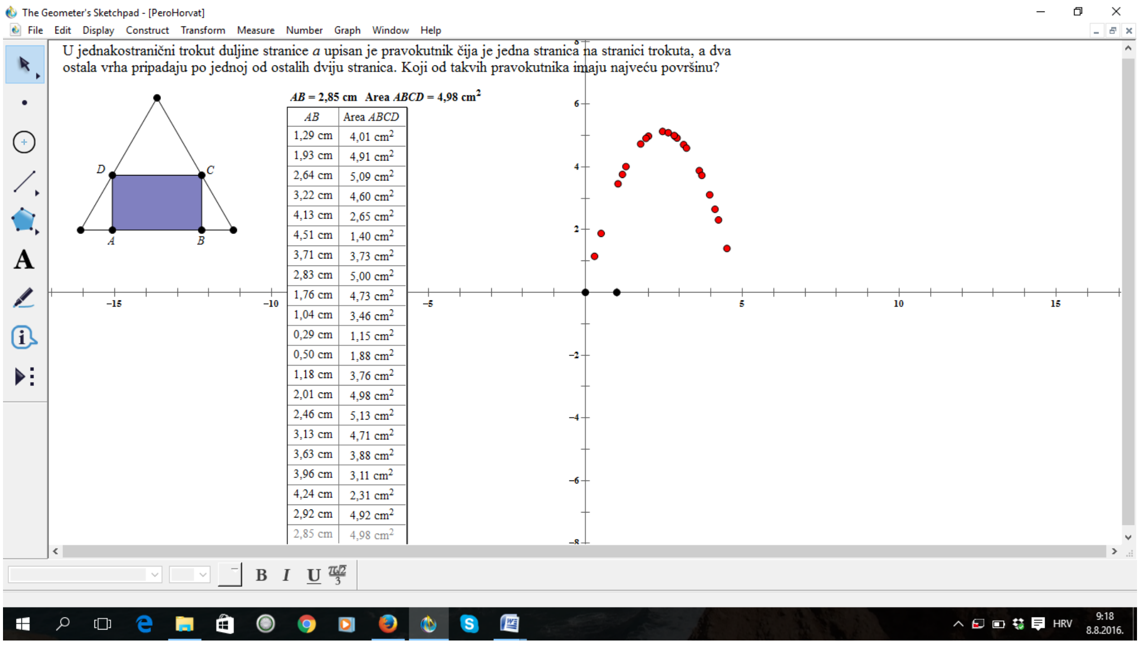
Za testiranje mogu biti korištena i dva dodatna zadatka (Primijenite naučeno) iz vježbenice, ukoliko nisu obrađena u redovnoj nastavi.

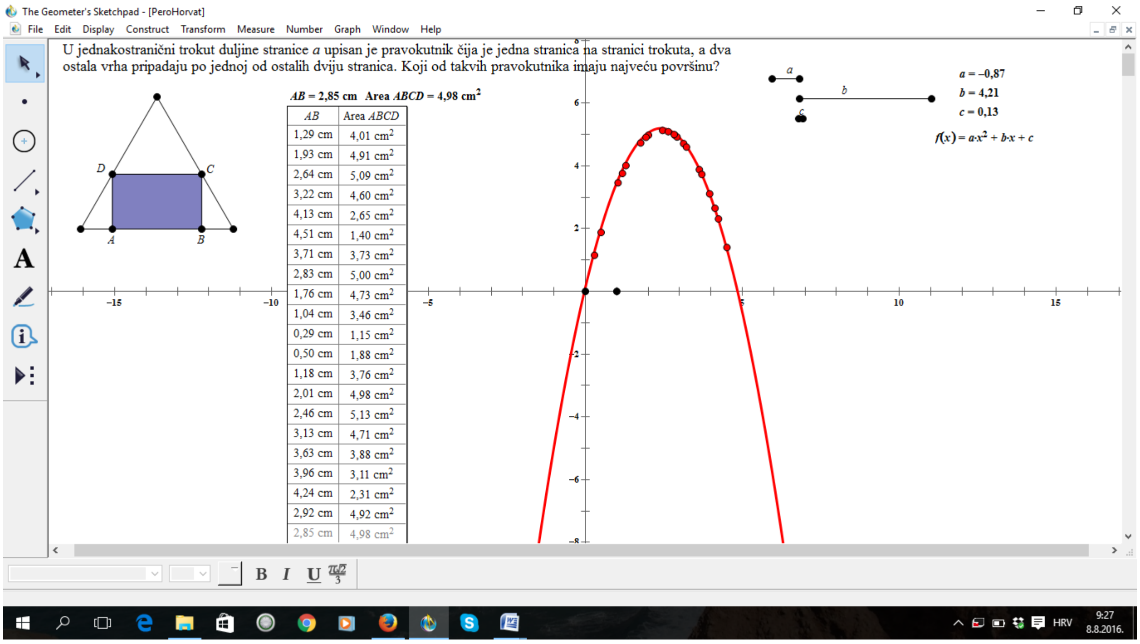
Ispit 4 rješenja

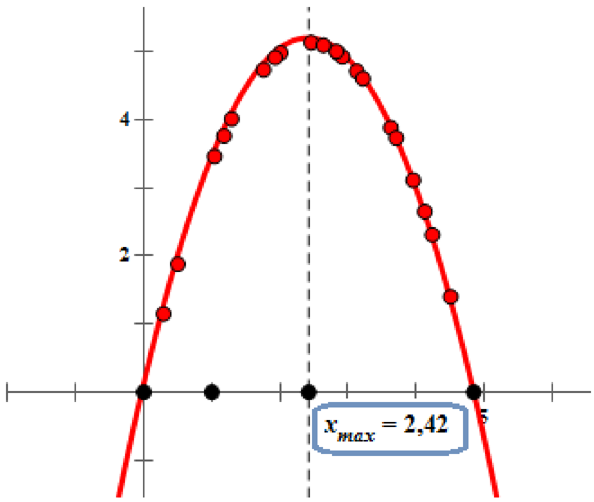
c)



d)

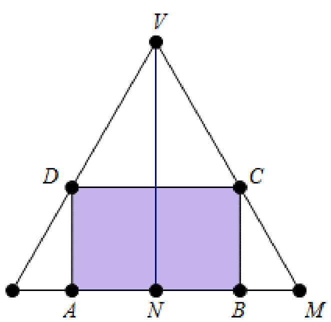


e) 

f) 

g) Mjerena duljina stranice pravokutnika koja daje pravokutnik maksimalne površine odgovara polovini duljine trokuta kojem je pravokutnik upisan.

h)

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
Označimo $|AB| = x$ i $|BC| = y$.
Tada je $P_{ABCD} = x \cdot y$.
Zbog $\Delta NMV \sim \Delta BMC$ vrijedi
$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a}{2} - \frac{x}{2}}{y} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}(a-x)}{2}.$$
Konačno, $P(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}ax$.
Maksimum funkcije postiže se $x_{Max} = \frac{a}{2}$
</td>
</tr>
</table>

i) Površina upisanog pravokutnika maksimalna je za $x = \frac{a}{2}$, odnosno $y = \frac{\sqrt{3}(a-x)}{2}$, gdje je x duljina stranice pravokutnika koja leži na stranici jednakostraničnoga trokuta, a y duljina druge stranice. Dobiveni rezultat približno se podudara s onim pod g), kao što i približno odgovaraju parametri tražene kvadratne funkcije, a uzimajući u obzir duljinu stranice konstruiranog jednakostraničnog trokuta. Eventualna odstupanja možemo pripisati (ne)preciznosti njihova određivanja pomoću klizača.

Ispit 5

Statistika i vjerojatnost

1. Pomoću Pascalovog trokuta odredite 11^3 i 11^6. Prikažite Pascalov trokut i rad.
2. Dane su liste bodova na probnoj državnoj maturi iz matematike za učenike 4.a i 4.b razreda. Ukupno je ostvarivo 60 bodova.

   4.a

   42, 40, 24, 19, 48, 20, 39, 41, 24, 31, 31, 33, 18, 47, 38, 36, 25, 22, 16, 22, 24, 21, 36, 27, 27, 22, 25, 26, 19, 22, 23, 37, 21, 42

   4.b

   29, 41, 28, 18, 25, 33, 32, 13, 39, 8, 53, 19, 28, 7, 29, 18, 25, 20, 55, 18, 37, 25, 18, 23, 32, 30, 46, 18, 19, 17, 24, 27, 40

   a. Pomoću grafičkog kalkulatora odredite šest statističkih vrijednosti: aritmetičku sredinu, minimum, donji kvartil, medijan, gornji kvartil, maksimum, za svaki od razreda te dopuni tablicu vrijednosti.

Razred	Aritmetička sredina	Minimum	Donji kvartil	Medijan	Gornji kvartil	Maksimum

   b. Svaki se razred ocjenjuje zasebno. Razredni kriteriji su takvi da je: 25% najbolje riješenih testova ocjena vrlo dobar ili odličan. Dok je najboljih 12% testova ocjena odličan (5). Odgovorite na pitanja i obrazložite odgovore!

   i. Iz kojeg je razreda odabrani učenik ako je ostvario 41 bod i dobio ocjenu odličan?

   ii. Neka za oba razreda vrijedi da su nedovoljnom ocjenom ocijenjeni svi učenici koji su postigli 20 ili manje bodova na testu probne državne mature. Koliko je nedovoljnih ocjena u 4a, a koliko u 4b?

   iii. Ocjene dovoljan i dobar u oba razreda su podijeljene tako da donja polovica preostalih učenika dobije ocjenu dovoljan, a druga polovica ocjenu dobar. Smatrate li da je ovakav način ocjenjivanja učenika pravedan? Argumentirajte svoj odgovor. Predložite pravednije ocjenjivanje.

3. Iva i Eva igraju poker. Nijedna nije baš vješta pa nisu sigurne na koje kombinacije karata da se klade. U poker špilu nalaze se 52 karte. Karte redom idu As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Dečko, Dama, Kralj, (AS), u svakoj od četiri boje: Herc ♥, Karo ♦, Tref ♣, Pik ♠. Odnosno As može predstavljati 1 (prvu kartu po redu) ili posljednju kao najjaču. Dobitne kombinacije (od 5 karata) donose određene bodove na slijedeći način:

Ruka	**Opis**	**Primjer**
Skala u boji	5 karata zaredom u istoj boji	♠As ♠2♠3♠4♠5
Poker	4 karte iste jačine (+1 bilo koja)	♠Q♣Q♦Q♥Q ♦10
Ful	Tris i par; 3 karte iste jačine + 2 iste jačine	♥J♣J♠J (tris) ♣4♥4(par)
Boja (fleš)	5 karata u istoj boji	♥As♥4♥5♥9♥K
Skala	5 karata zaredom – nije bitna boja	♥10♣J♠Q♠K♥As
Tris	3 karte iste jačine (+2 bilo koje, ali razl. jačine)	♠9♣9♦9 ♦8♠5
Dva para	Dva para karata istih jačina (+1 bilo koja razl. jačine)	♦10♣10 ♦K♠K ♣4
Jedan par	Par karata iste jačine(+3bilo koje razl. jačine)	♠Q♦Q ♣10♠2♣5
Jaka karta	Nijedna od navedenih kombinacija prije	♣As♠K♦10♠3♥6

a. Eva smatra da je vjerojatnije da će dobiti Ful, dok Iva misli da je vjerojatnije dobiti Boju. Koja je u pravu? Obrazložite odgovor i argumentirajte računom.
b. Iva se sjetila da joj je brat rekao da Skalu u boji skoro nikad neće dobiti i da je Poker 10 puta vjerojatniji nego Skala u boji. Je li Ivin brat pretjerao ili umanjio vjerojatnost dobivanja Pokera u odnosu na Skalu u boji? Obrazložite odgovor.

Ispit 5 rješenja

1. Učenici trebaju prikazati Pascalov trokut do sedmog retka. Povezuju redak Pascalovog trokuta sa binomnim koeficijentima u rastavu $(10+1)^3$ i čitaju znamenke na mjestima tj. $11^3 = 1331$. Dok za 11^6 potrebno je dodavati vrijednost znamenke sa višeg dekadskog mjesta tj. $11^6 = 1771561$, jer je 7-i redak u Pascalovom trokutu 1 6 15 20 15 6 1 .
2. Dane su liste bodova na državnoj maturi za 4.a i 4.b razred.

   a.

Razred	Aritmetička Sredina	Minimum	Donji kvartil	Medijan	Gornji kvartil	Maksimum
4.a	29	16	22	25,5	37	48
4.b	27	7	18	25	32,5	55

   b.

   i. U oba razreda 4 učenika je ocjenjeno sa 5. U 4.a to su učenici sa 42 i više bodova, dok u 4.b učenici sa 41 i više bodova. Odabrani učenik je iz 4.b.

   ii. U 4.a je 5, a u 4.b 12 učenika ocjenjeno s Nedovoljan.

   iii. Učenici ovdje trebaju iznijeti svoj stav o ocjenjivanju. Tu nema netočnih odgovora. Boduje se argumentiranost odnosno točno korištenje dobivenih brojeva.

   Prijedlog drugačijeg ocjenjivanja sa obrazloženjem

3. Iva i Eva igraju poker.

   a. $p(Eva) = p(Ful) = \frac{\binom{13}{2}2\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{6}{4165} \approx 0.001440576$, $p(Iva) = p(Boja) = \frac{4\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{33}{16660} \approx 0.001980792$. Vjerojatnija je Boja, odnosno u pravu je Iva.

   b. Poker vs Skala u boji.

$$p(Skala\,u\,boji) = \frac{10 \cdot 4}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{64974} \approx 0.00001539077$$

$$p(Poker) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 4}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{4165} \approx 0.000240096038, \quad \frac{p(Poker)}{p(Skala\,u\,boji)} = \frac{64974}{4165} = 15.6$$

Poker je čak 15 puta vjerojatniji u dijeljenju od Skale u boji, odnosno Ivin brat je umanjio vjerojatnost dobivanja pokera u odnosu na Skalu u boji.

Ispit 6

Financijska matematika

1. Uz koliku je godišnju kamatnu stopu Josip posudio 40000 kn ako je nakon 5 godina u cijelosti podmirio dug s iznosom od 57000 kn? Kamate se obračunavaju po jednostavnom kamatnom računu.

2. Koliko iznose ukupne jednostavne kamate na iznos od 15000 kn za razdoblje od 5 godina ako je godišnji kamatnjak u prve 2 godine p_1=10, a u preostale 3 godine smanjen je za 5%?

3. Koliki iznos treba Marko uložiti danas u banku ako želi na osnovi te uplate na kraju pete godine (računajući od danas) raspolagati iznosom od 10000 kn? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan, a banka obračunava kamate po godišnjoj stopi $p = 8$.

4. Koliko iznose ukupne složene kamate na iznos od 20000 kn za razdoblje od 6 godina ako je godišnji kamatnjak u prve 4 godine $p_1 = 10$, a u preostale 2 godine smanjen je za 10%?

5. Odredite vrijednost početnog kapitala u iznosu od 15.000,00 kn ukamaćenog uz dekurzivni godišnji kamatnjak 10 nakon 120 dana (godina nije prijestupna).

6. Koliki iznos možemo očekivati na računu u banci nakon 9 godina ako danas uložimo 2.000,00 kn, za 5 godina 5.000,00 kn, a za 6 godina (od danas) podignemo 8.000,00 kn? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivni, a godišnji kamatnjak prve 3 godine iznosi 7, u sljedeće 2 godine 8, a nakon toga kamatnjak iznosi 10. Grafički prikaži problem.

7. Petar je dogovorio vraćanje dugovanja u iznosu od 15.000,00 kn u 4 rate. Kolika je prva rata koju Petar mora uplatiti nakon 3 godine ako druga rata iznosi 4.000,00 kn i plaća se nakon 6 godina, a treća rata iznosi 1.000,00 kn i plaća se nakon 8 godina? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivni uz kamatnjak 4. Grafički prikaži problem.

8. Ana želi podići kredit u iznosu od 30000 kn na 3 godine. Dolaskom u banku dobije otplatni plan. Proučite ga.

MJESEC	ANUITET / RATA	OTPLATA KAMATE	OTPLATA GLAVNICE	STANJE GLAVNICE
0				30.000
1	1.330	150	1.180	28.820
2	1.330	144	1.186	27.635
3	1.330	138	1.191	26.443
4	1.330	132	1.197	25.246
5	1.330	126	1.203	24.043
6	1.330	120	1.209	22.833
7	1.330	114	1.215	21.618
8	1.330	108	1.222	20.396
9	1.330	102	1.228	19.169
10	1.330	96	1.234	17.935
11	1.330	90	1.240	16.695
12	1.330	83	1.246	15.449
13	1.330	77	1.252	14.196
14	1.330	71	1.259	12.938
15	1.330	65	1.265	11.673
16	1.330	58	1.271	10.402
17	1.330	52	1.278	9.124

18	1.330	46	1.284	7.840
19	1.330	39	1.290	6.550
20	1.330	33	1.297	5.253
21	1.330	26	1.303	3.949
22	1.330	20	1.310	2.639
23	1.330	13	1.316	1.323
24	1.330	7	1.323	0
UKUPNO	31.911	1.911	30.000	

1. Odredite godišnju kamatnu stopu po kojoj se računaju kamate.
2. Koliko iznosi svaki mjesečni obrok koji Ana otplaćuje?
3. Koliko je Ana dužna na kraju 15. mjeseca otplate?
4. Kojim iznosom su zastupljene kamate u 19. rati?
5. Koliko iznose ukupne kamate?
6. Koliko iznose ukupno sve rate kredita?
7. Nađite vezu između ukupnog duga, kamata i iznosa kredita.

Ispit 6 rješenja

1. C_0 = 40000

n = 5 (godine)

C_5 = 57000

p = ?

Ukupne jednostavne kamate: $I = C_5 - C_0 = 57000 - 40000 = 17000$

Iz formule $I = \dfrac{C_0 \cdot p \cdot n}{100}$ dobijemo da je $p = \dfrac{100 \cdot I}{C_0 \cdot n} = 8.5$.

2. Razdoblje od 5 godina treba podijeliti na 2 podrazdoblja: prvo podrazdoblje iznosi 2 godine, a drugo 3 godine. Za prvo podrazdoblje:

C_0 = 15000

p_1=10

$n = 2 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \dfrac{C_0 \cdot p \cdot n}{100} = \dfrac{15000 \cdot 10 \cdot 2}{100} = 3000$ kn

Za drugo podrazdoblje:

C_0 = 15000

$p_2 = 10 - 10 \cdot 5\% = 9.5$

$n = 3 \quad \Rightarrow$ kn $I_2 = \dfrac{C_0 \cdot p \cdot n}{100} = \dfrac{15000 \cdot 9.5 \cdot 3}{100} = 4275$ kn

Ukupne jednostavne kamate za razmatrano petogodišnje razdoblje iznose

$I = I_1 + I_2 = 3000 + 4275 = 7275$ kn.

3. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan, a banka obračunava kamate po godišnjoj stopi p = 8.

C_5 = 10000, n = 5, p = 8, C_0 =?

$p = 8 \Rightarrow r = 1 + \dfrac{p}{100} = 1 + \dfrac{8}{100} = 1.08$

Traženi ulog je:

$$C_5 = C_0 \cdot r^5 \Rightarrow C_0 = \frac{C_5}{r^5} = \frac{10000}{(1.08)^5} = 6805.83 \text{ kn}$$

4. Imamo 2 razdoblja u kojima je kamatnjak fiksan.

U prvom, četverogodišnjem razdoblju, početni iznos je

C_0 = 20000 kn, p_1 = 10.

Stoga je $C_4 = C_0 \cdot r_1^{\,4} = 20000 \cdot (1.1)^4 = 29282$ kn.

U drugom, dvogodišnjem razdoblju, početni iznos je

C_4 = 29282 kn, $p_2 = 10 - 10 \cdot 10\% = 9$ godišnje,

pa je $C_6 = C_4 \cdot r_2^{\,2} = 29282 \cdot (1.09)^2 = 34789{,}94$ kn.

Ukupne složene kamate iznose $I = C_6 - C_0 = 34789.94 - 20000 = 14789.94$ kn.

5. Primijenite:

a. Uz primjenu relativnog kamatnjaka konačna vrijednost kapitala nakon 120 dana iznosi

C_0 =15, n = 120 dana, p(G) = 10, m = 365

$$p_r = \frac{p(d_1)}{m} = \frac{10}{365} = 0.0273972603 \quad ,$$

$$r_r = 1 + \frac{p_r}{100} = 1 + \frac{0.0273972603}{100} = 1.0002739726\ 03$$

$$C_{120} = 15000 \cdot 1.000273973^{120} = 15501.28 \text{ kn}$$

Uz primjenu konformnog dnevnog kamatnjaka vrijednost kapitala nakon 120 dana iznosi:

$$p' = 100\left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1\right) = 0.02611578761$$

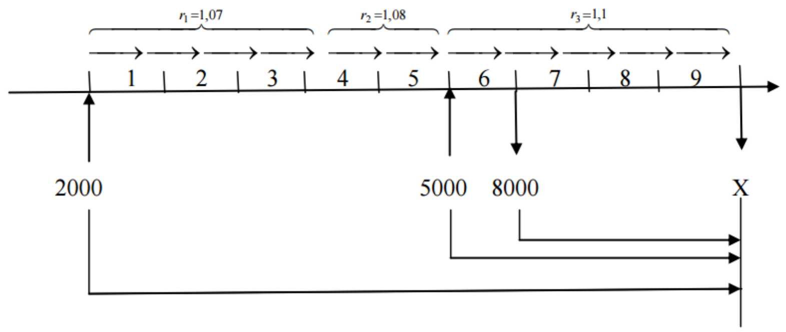
$$r' = 1.000261158$$

$$C'_{120} = 15000 \cdot 1.000261158^{120} = 15477.46 \text{ kn}$$

6. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivni, a godišnji kamatnjak prve 3 godine iznosi 7, u sljedeće 2 godine 8, a nakon toga kamatnjak iznosi 10.

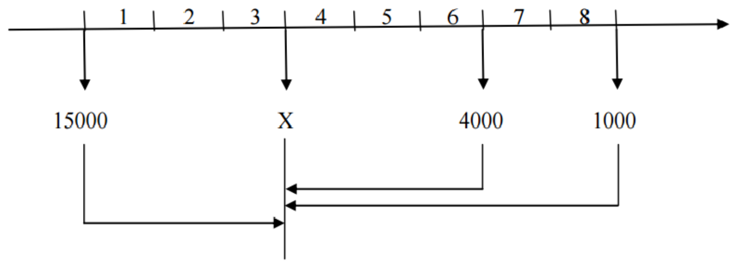
Najprije ćemo odrediti odgovarajuće dekurzivne kamatne faktore:

$$r_1 = 1 + \frac{7}{100} = 1.07\ ,\ r_2 = 1 + \frac{8}{100} = 1.08\ ,\ r_3 = 1 + \frac{10}{100} = 1.1$$



$$C_9 = 2000 \cdot 1.07^3 \cdot 1.08^2 \cdot 1.1^4 + 5000 \cdot 1.1^4 - 8000 \cdot 1.1^3 = 856.58 \text{ kn.}$$

7.



$$r = 1.04\ ,\ X = 15000 \cdot 1.04^3 - \frac{4000}{1.04^3} - \frac{1000}{1.04^5} = 12495.05 \text{ kn}$$

Nakon 3 godine Petar mora uplatiti 12.495,05 kn.

8.

1. Odredite godišnju kamatnu stopu po kojoj se računaju kamate.

$$I_1 = \frac{C_0 \cdot p}{12 \cdot 100}$$

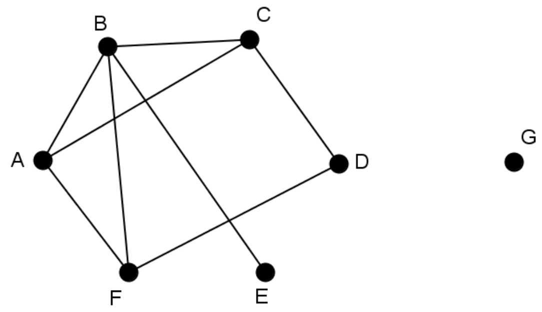
$$p = \frac{I_1 \cdot 1200}{C_0} = \frac{150 \cdot 1200}{30000} = 6$$

2. Svaki mjesečni obrok koji Ana otplaćuje iznosi 1330 kn.
3. Ana je na kraju 15. mjeseca otplate dužna 11673 kn.
4. Iznos kojim su zastupljene kamate u 19. rati je 39 kn.
5. Ukupne kamate iznose 1911 kn.
6. Sve rate kredita ukupno iznose 31911 kn.
7. Vezu između ukupnog duga, kamata i iznosa kredita: 31911 kn = 30000 kn + 1911 kn.

Ispit 7

Teorija grafova

1. Dan je sljedeći graf G:



a. Ispišite vrhove i bridove danog grafa.

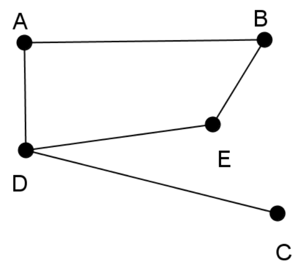
Vrhovi: ______________________________ Bridovi: ______________________________

b. Koji je minimalni, a koji maksimalni stupanj grafa G? Napišite i odgovarajuće vrhove.

c. Je li graf jednostavan? Je li povezan? Je li potpun? Objasnite.

d. Nacrtajte jedan podgraf grafa G koji ima 5 vrhova.

2. Dan je sljedeći graf:



a. Napišite jedan:

Hamiltonov put _____________ Hamiltonov ciklus _______________

Eulerov put _______________ Eulerov ciklus _______________

b. Napišite matricu susjedstva za dani graf.

3. Nacrtajte graf s točno 5 vrhova i sljedećim svojstvima:

a. Eulerov ciklus, a nije Hamiltonov ciklus	b. povezan, kromatski broj je 2 (obojite)

4. a. Objasnite pojam Eulerova formula u terminima teorije grafova.

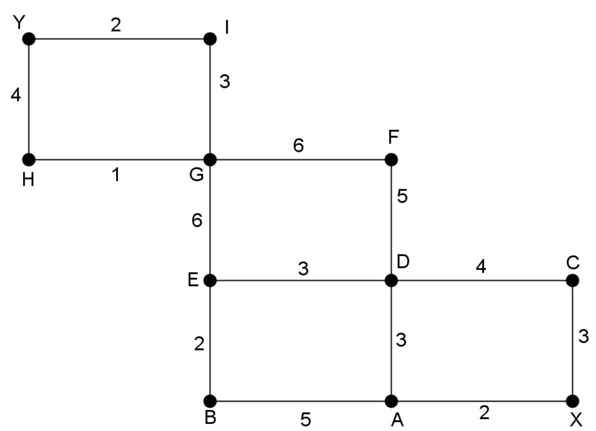
b. Opišite Problem trgovačkog putnika i Problem kineskog poštara. Povežite te ih s pojmovima iz teorije grafova.

5. Profesor Baltazar mora spremiti 7 kemikalija. No, neke kemikalije burno reagiraju kada su u blizini nekih drugih kemikalija pa ne smiju biti s njima u spremniku. U tablici je za svaku od 7 kemikalija napisana lista onih kemikalija s kojima ne smije biti u istom spremniku.

Kemikalija	**„Zabranjeni susjed“**
1	2, 5, 7
2	1, 3, 4, 5
3	2, 4, 6
4	2, 3, 7
5	1, 2, 6, 7
6	3, 5
7	1, 4, 5

Koliko najmanje spremnika treba profesor Baltazar? Napišite jedan mogući raspored spremanja. Zadatak riješite koristeći teoriju grafova.

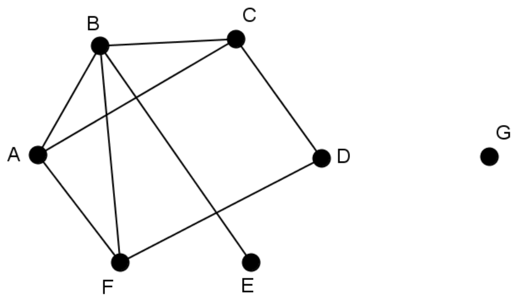
Koristeći Dijsktrin algoritam nađite najkraći put između vrhova X i Y u danom grafu:



Napomena: Postupak rješavanja mora biti vidljiv na grafu.

Ispit 7 rješenja

1. Dan je sljedeći graf G:



a. Vrhovi: A, B, C, D, E, F, G, Bridovi: AB, AC, AF, BF, BE, BC, CD, DF

b. Minimalni je stupanj 0 i ima ga vrh G. Maksimalni je 4 i to je stupanj vrha B.

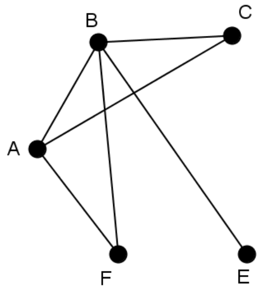
c. Je li graf jednostavan? Je li povezan? Je li potpun? Objasnite.

Jednostavan je jer nema petlji ni višestrukih bridova.

Nije povezan jer vrh G nije povezan ni sa jednim vrhom grafa.

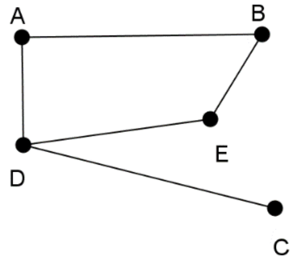
Nije potpun jer nisu svi parovi vrhova međusobno povezani bridom.

d. Nacrtajte jedan podgraf grafa G koji ima 5 vrhova.



2. Dan je sljedeći graf:

a.



Hamiltonov put: ABEDC Hamiltonov ciklus: nema

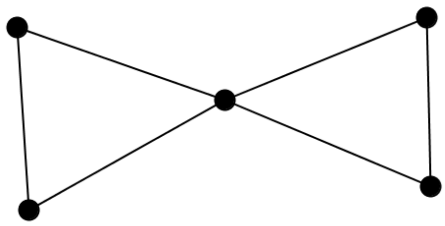
Eulerov put: CDEBAD Eulerov ciklus: nema

b. Matrica susjedstva za dani graf.

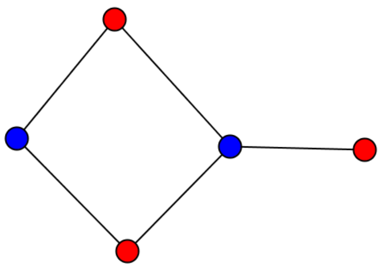
0	1	0	1	0
1	0	0	0	1
0	0	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	0

3. Graf s točno 5 vrhova i sljedećim svojstvima:

a. Eulerov je, a nije Hamiltonov ciklus



b. povezan, kromatski broj je 2 (tako ga i oboji)



4. a. Neka je G jednostavan, planarni i povezan graf s V vrhova, B bridova i P područja na koje graf dijeli ravninu. Eulerova formula glasi: $V - B + P = 2$.

   b. Problem trgovačkog putnika glasi:

   „Trgovački putnika kreće iz svog prebivališta i obilazi sva mjesta u okolici, te se vraća kući. Na koji će način obići sva susjedna mjesta, a da put koji prijeđe bude minimalne duljine?“.

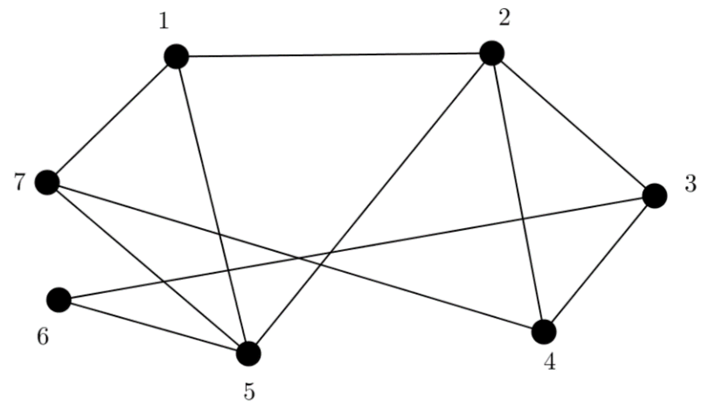
Zapravo tražimo postoji li Hamiltonov ciklus u grafu čiji vrhovi predstavljaju mjesta, a bridovi ceste.

Problem kineskog poštara glasi:

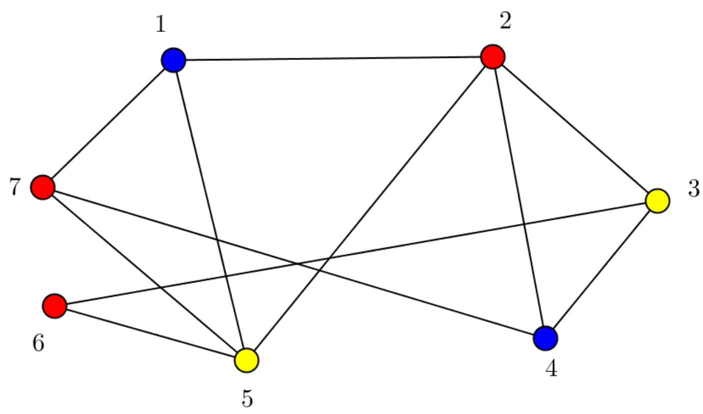
> *„Poštar mora krenuti iz poštanskog ureda, proći kroz brojne ulice kako bi dostavio poštu i vratio se nazad u poštanski ured. Kako da on to napravi, a da prijeđe minimalnu udaljenost?“.*

U ovom slučaju tražimo Eulerov ciklus u grafu čiji vrhovi predstavljaju mjesta, a bridovi ceste. Ukoliko ne postoji Eulerov ciklus onda tražimo one bridove kojima ćemo proći dvaput, a da ta udaljenost bude najmanja moguća.

5. Nacrtajmo graf čiji će vrhovi predstavljati kemikalije, a bridovi spajaju one kemikalije koje ne smiju biti u istom spremniku.



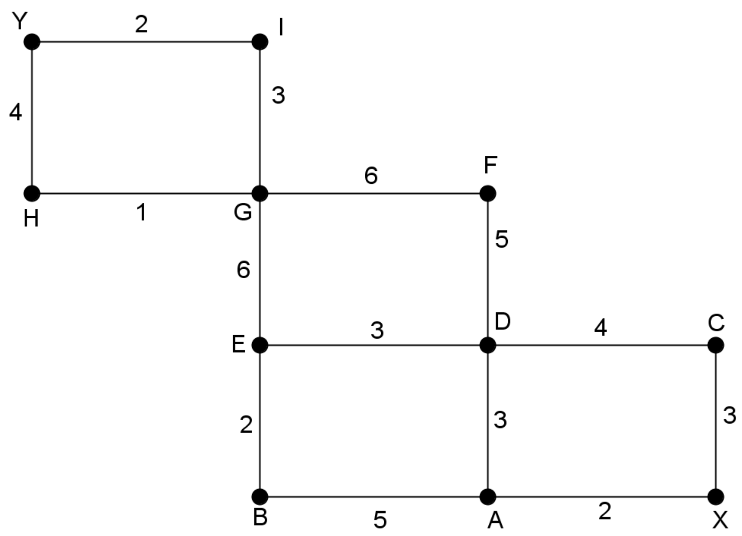
Naš problem svodi se na to kako obojiti dobiveni graf koristeći što manje boja. Boje će predstavljati spremnike. Jedno moguće rješenje je:



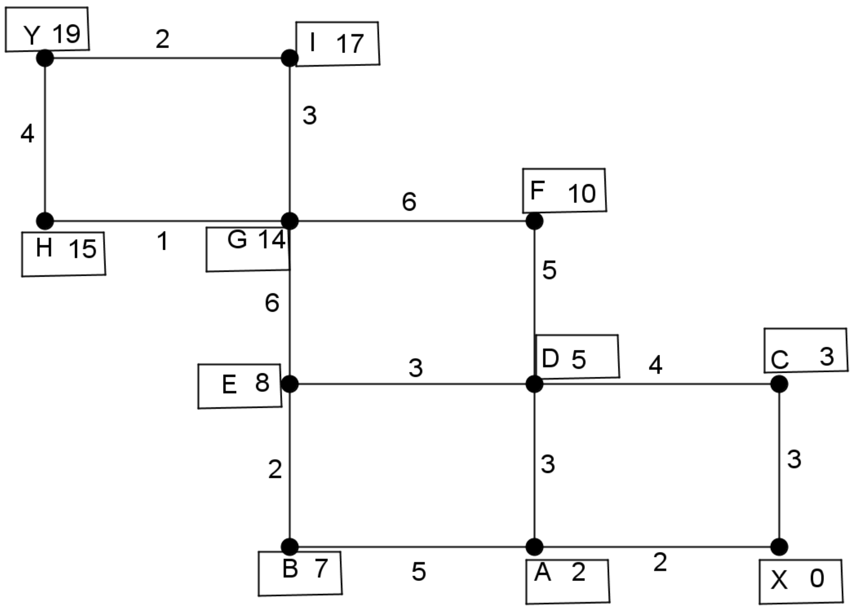
Dakle, potrebne su nam barem 3 boje da bismo obojili graf. Odnosno, potrebna su nam tri spremnika u koje će profesor Baltazar spremiti svoje kemikalije. Jedan mogući raspored:

Spremnik	Kemikalije
A	1, 4
B	2, 6, 7
C	3, 5

5. Koristeći Dijsktrin algoritam nađite najkraći put između vrhova X i Y u danom grafu:



Dva su moguća rješenja: XADEGHY i XADEGIY i oba su duljine 19.



Ispit 8

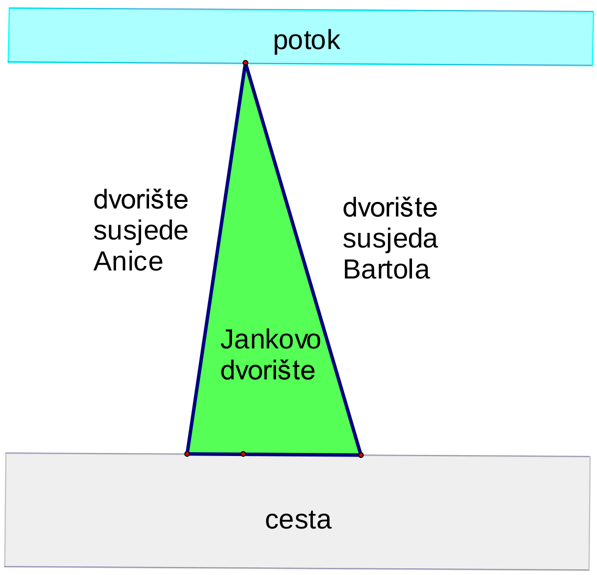
Optimizacija

1. Ivana i Maja naručile su pizzu i dok čekaju da se ispeče Ivana je osmislila zadatke za Maju.

   a. Ivana želi pojesti što veći komad pizze opsega 60 cm. Koliki mora biti promjer te pizze?

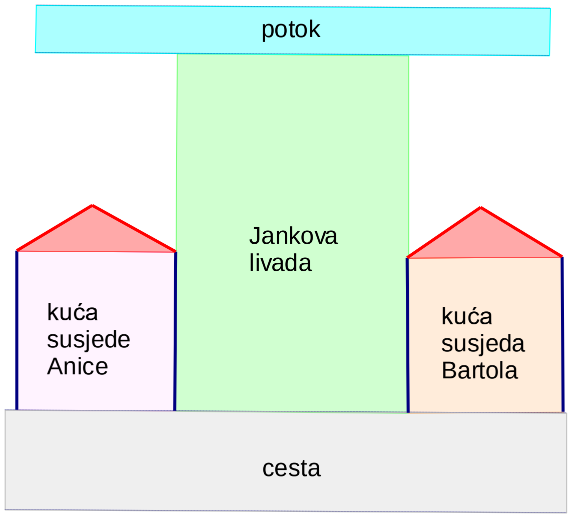
   b. Ivana i Maja dijele jednu pizzu. Maja je izrezala komad pizze površine 143 cm ^{2} , a ostatak prepustila Ivani. Ako je Ivana pojela manje nego Maja koliki je bio promjer pizze?

2. Na skici je prikazano Jankovo dvorište.



   Najveća udaljenost između dvorišta susjede Anice i susjeda Bartola (uz cestu) iznosi 4 m. Potok, koji je usporedan s cestom, od nje je udaljen 9 m. Janko u svome dvorištu želi sagraditi spremište za alat pravokutnog tlocrta površine 10 m ^{2} koji će imati ulaz s ceste. Je li to moguće? Obrazložite!

3. Janko je vlasnik livade koja se nalazi između Aničine i Bartolove kuće. Dimenzije livade su $10\text{m}\times 25\text{m}$.

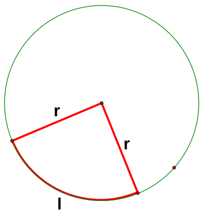


Na toj livadi želi uz cestu napraviti prostor za prodaju osvježavajućih pića kvadratnog tlocrta i odmah u produžetku, bez slobodnog prostora za prolaz, igralište za djecu u obliku jednakokračnog pravokutnog trokuta čija hipotenuza leži na cesti. Ne želi ostaviti slobodnog prostora do kuća svojih susjeda. Ako želi zauzeti što manje livade, kolika će biti površina koju će zauzeti prostor za piće, a kolika će biti površina igrališta?

4. Petrino dvorište kvadratnog je oblika površine 16 m^2. Petra planira urediti cvijetnjak u obliku pravokutnika sa stranicama usporednima s dijagonalama kvadrata (dvorišta). Koliko metara žice za ogradu treba kupiti ako želi cvijetnjak najveće moguće površine?

Ispit 8 rješenja

1. a.

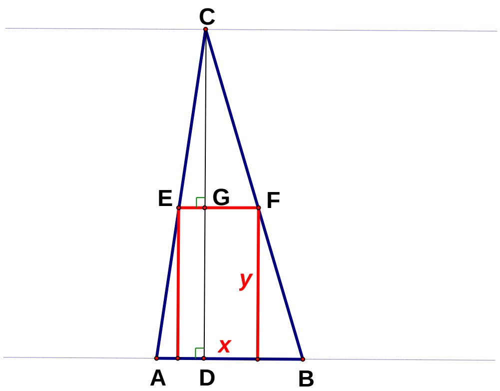


$$2r + l = 60 \Rightarrow l = 60 - 2r \Rightarrow P_i = \frac{rl}{2} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{2} r(60 - 2r) = -r^2 + 30r$$

$r_{Max} = \dfrac{-30}{-2} = 15 \Rightarrow$ promjer pizze treba biti 30 cm.

b. $\frac{1}{2} r^2 \pi < 143 \Rightarrow |r| < 9.54 \Rightarrow$ promjer je bio manji od 19.08 cm.

2. Janko mora graditi spremište kao na slici.



Neka su duljine stranica pravokutnika (spremišta) x i y.

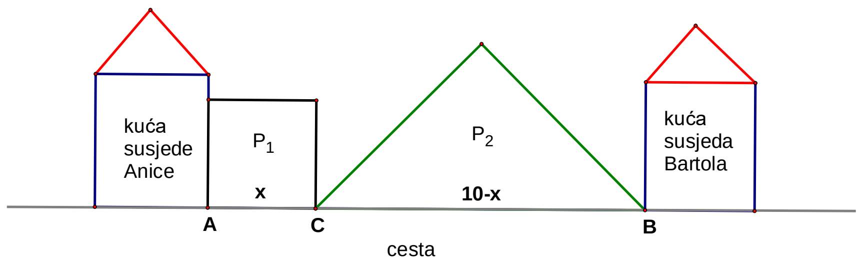
Poznato nam je $|AB| = 4$ m, $|CD| = 9$ m.

Trokuti ΔABC i ΔEFC su slični $\Rightarrow \dfrac{|EF|}{|AB|} = \dfrac{|CG|}{|CD|} \Rightarrow \dfrac{x}{4} = \dfrac{9-y}{9} \Rightarrow y = 9 - \dfrac{9}{4}x$.

Površina pravokutnika $P = xy \Rightarrow P(x) = x\left(9 - \dfrac{9}{4}x\right) = -\dfrac{9}{4}x^2 + 9x$.

Najveća površina će biti za $x_{Max} = \dfrac{-9}{2 \cdot \left(-\dfrac{9}{4}\right)} = 2$, tada je $y_{Max} = 9 - \dfrac{9}{4} \cdot 2 = 4.5$. Zaključujemo da je najveća moguća površina spremišta koje se može izgraditi jednaka 9 m^2, odnosno nije moguće izgraditi spremište željene površine. Janko mora odustati od gradnje ili graditi manje spremište.

3.



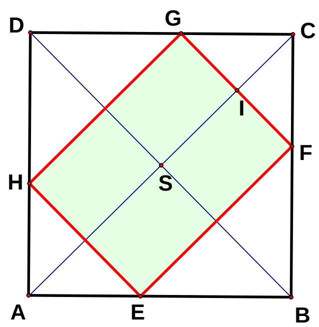
$$P = P_1 + P_2$$

$$P_1 = x^2,\; P_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{10-x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(10-x)^2}{4} \Rightarrow P(x) = \frac{5}{4}x^2 - 5x + 25 \;.$$

Funkcija P postiže minimum za $x_{Min} = \dfrac{5}{2 \cdot \dfrac{5}{4}} = 2$.

Dobivamo da će prostor za piće zauzeti 4 m^2, a igralište 16 m^2.

4.



$$|AB| = 4 \text{ m},\; d = |AC| = 4\sqrt{2} \text{ m}.$$

Neka je $x = |EH| = |FG|$, $y = |EF| = |GH|$.

Trokuti ΔDBC i ΔGFC su slični $\Rightarrow \frac{|GF|}{|DB|} = \frac{|CI|}{|CS|} \Rightarrow \frac{x}{d} = \frac{\frac{d}{2} - \frac{y}{2}}{\frac{d}{2}} \Rightarrow y = d - x$.

Površina cvijetnjaka $P = xy \Rightarrow P(x) = x(d - x) = -x^2 + dx$.

Najveća površina će biti za $x_{Max} = \frac{-d}{-2} = \frac{d}{2}$, tada je $y_{Max} = d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$, pa dobivamo da je najveća površina kada je cvjetnjak kvadratnog oblika.

Opseg tog kvadrata je $O = 4x = 2d = 8\sqrt{2} \approx 11.3137$.

Treba kupiti približno 11.32 m žice.