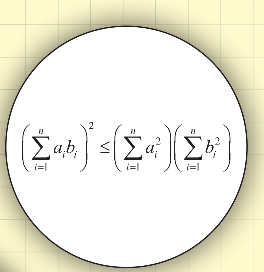
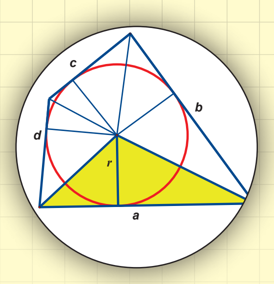
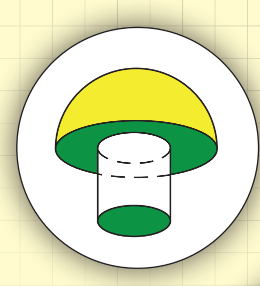
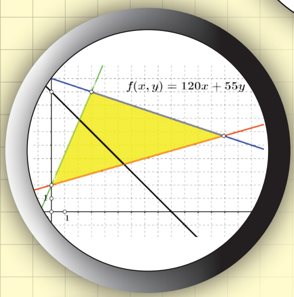
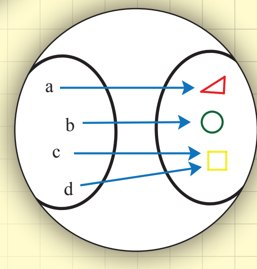






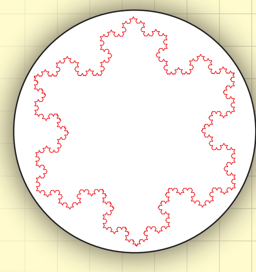


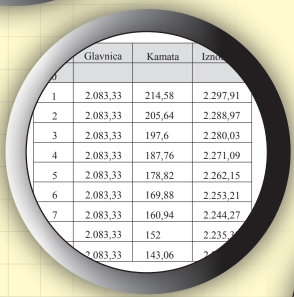


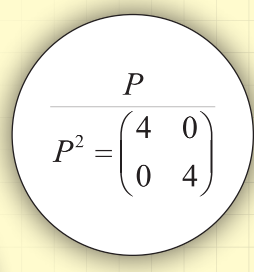
Financijska matematika

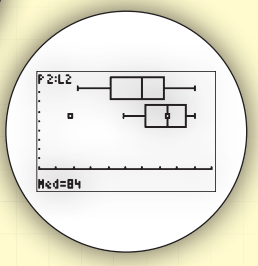
Teorija grafova

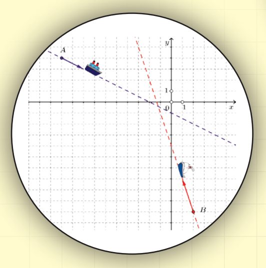
Optimizacija











4. vježbenica

Sadržaj ove publikacije/emitiranog materijala isključiva je odgovornost XV. gimnazije

Europska unija
Ulaganje u budućnost

STRUKTURNI I INVESTICIJSKI FONDOVI

ESF RAZVOJ LJUDSKIH POTENCIJALA

Projekt je sufinancirala Europska unija iz Europskog socijalnog fonda

8. Financijska matematika

8.1. Zatezne kamate

Što ćemo raditi?

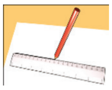
Upoznat ćete tajne jednostavnoga kamatnog računa.

U čemu je problem?

Plinarsko društvo Plinko svaki mjesec dostavlja račun s navedenom potrošnjom plina i iznosom novca koji za isporučeni plin trebate platiti. Račun za mjesec siječanj 2016. godine iznosi 1270.30 kn, a na računu je naveden datum dospijeća plaćanja (24. veljače 2016.) i zakonska zatezna kamata od 8.05% godišnje.

Zakasnimo li s plaćanjem računa dva dana, koliki će nam iznos zateznih kamata uračunati plinara pri sljedećemu mjesečnom obračunu?

Sukladno odredbama Zakona o kamatama, zatezna kamata obračunava se primjenom dekurzivnoga jednostavnoga kamatnog računa na dospjelu glavnicu u slučaju neredovitog podmirenja obveza.



Kako to izgleda?

Podsjetite se. Što je kamata?

Kamata je naknada koju dužnik mora platiti vjerovniku (kreditoru) zato što mu je na *određeno* vrijeme ustupio pravo raspolaganja nekim iznosom novca ili dobrom.

Osnovni pojmovi:

- kapital ili glavnica (početni iznos) C_0
- kamatna stopa p (izražena u %)
- jednostavne kamate ili interes K
- vrijeme (u godinama, mjesecima, danima) n

Kamate: $K = C_0 \cdot \dfrac{p}{100} \cdot n$

Konačni iznos duga *(konačna vrijednost glavnice)* nakon n obračunskih razdoblja (godina, mjeseci, kvartala…):

$$C_n = C_0 + C_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \cdot n\right).$$

Obračun je zateznih kamata dnevni, što znači da je obračunsko razdoblje kraće od godinu dana. Pri dnevnom obračunu kamata koristimo englesku metodu pri kojoj se broj dana u mjesecu (godini) određuje prema stvarnom kalendaru.

Broj dana označit ćemo pomoću d. Tada je $n = \dfrac{d}{365}$. Riješite početni primjer.

Možete li pretpostaviti?

Izgubili ste uplatnicu i račun platili tek 1. svibnja 2016. Koliki je iznos zateznih kamata? Pazite, godina je prijestupna. Kako iznos kamata ovisi o broju dana?

Napravite model.

Nacrtajte graf funkcije koja opisuje promjenu konačnog iznosa duga u ovisnosti o broju dana dugovanja. Kakva je to funkcija?

Zapišite funkciju formulom.

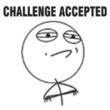
Parametarski odredite početni iznos računa i kamatnu stopu zateznih kamata.

Usporedite iznose duga ako je početni iznos računa dvostruko manji i ako je za sto kuna veći.

Usporedite iznose duga ako se zatezna kamatna stopa poveća za 0.5%, 1.5% te kad se smanji na pola. Što uočavate?

Potražite pomoć tehnologije.

Pri analizi promjena koristite program dinamične geometrije.



Možemo li više?

Koji iznos računa nismo platili do datuma dospijeća 24. 3. 2015. ako je istaknuta zatezna kamata od 35.60 kn na obračunu od 30. 1. 2016. godine?

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Odlučili ste kupiti novo računalo. Iskoristili ste prednosti obročne kupnje te ste iznos od 4130 kn platili kreditnom karticom u šest rata bez kamata i troškova.

Datum dospijeća prve rate bio je 15. 11. 2015., a svake sljedeće petnaestog u mjesecu idućih pet mjeseci.

To vam se činilo nebitnim te ste svoje račune prema kartici podmirivali neredovito i to sljedećom dinamikom: 19. 11. 2015., 21. 12. 2015., 30. 1. 2016., 29. 2. 2016., 16. 3.2016. i 20. 5. 2016.

Zakonska zatezna kamata tijekom 2015. godine bila je 8.3%, a 2016. narasla je za 0.6%. Koliko ste, zbog zateznih kamata, platili više svoje računalo od njegove prodajne cijene?

Kako smo radili i što smo naučili?

8.2. Novac stvara novac

Što ćemo raditi?

Upoznat **ćete** tajne složenog kamatnog računa.

U čemu je problem?

Kao poklon za svoj osamnaesti rođendan prikupili ste od roditelja, bake i rođaka 1600 kn. Prvotnu sreću i zadovoljstvo pokvarila je činjenica da je cijena novog mobitela koji ste tim novcem željeli kupiti 2040 kn. Roditelji su predložili da dobiveni novac uložite u banku i štedite za neku buduću i veću investiciju. Stariji brat imao je drugu ideju: da novac posudite njemu (jer mu upravo toliko nedostaje za željeni bicikl), a on će vam cjelokupni iznos vratiti za godinu dana uz zaslužene kamate te s tim uvećenim iznosom možete razmišljati što dalje. Što učiniti?

Kako to izgleda?

Prije donošenja bilo kakve odluke treba dobro razmotriti obje ponude i razjasniti "pravila igre".

Kao i obično, prvo ste saslušali starijeg brata.

Koji vam podatci nedostaju?

Prisjetite se što su i koliko iznose kamate?[1]

Brat je bio prilično velikodušan i ponudio 15% jednokratnih kamata na cjelokupni posuđeni iznos koji će isplatiti zajedno s posuđenih 1600 kuna nakon godinu dana.

Što nude roditelji? Ne nude ništa osim savjeta i pratnje do obližnje banke radi otvaranja štednog računa. Trebali biste se savjetovati s bankarskim službenikom. Na upit o uvjetima štednje, upute službenika vezane uz kamate bile su ovakve: Kamatna stopa na kratkoročnu kunsku štednju (od šest mjeseci do godine dana) iznosi 1.3 posto, dok je ona za štednju iznad godine dana 1.8 posto mjesečno.

1 **Kamata** je naknada koju **dužnik** mora platiti **vjerovniku** (kreditoru) zato što mu je na *određeno* vrijeme ustupio pravo raspolaganja nekim iznosom svog novca.

Možete li pretpostaviti?

Koja je od ponuda prihvatljivija? Postoji li mogućnost da u vremenu do dvije godine na svom računu imate traženi iznos od 2040 kn?

Napravite model.

Za početak izračunajte koji će vam iznos novca isplatiti brat nakon godinu dana.

Razmotrite ponudu roditelja. *Važno je znati da se kamate u banci obračunavaju svaki mjesec na ukupni iznos novca koji se trenutno nalazi na vašem računu.*

Pokušajte napraviti tablicu s točnim iznosom svoga novca iz mjeseca u mjesec. Pretpostavimo da je štednja kratkoročna do godinu dana.

Period (mjesec)	Kamate	Ukupni novčani iznos u banci
0.		1600 kn
1.	1600 · 1.2% = 19.20 kn	1619.20 kn
2.		

Razmislite o općoj formuli koja opisuje iznos kojim ćete raspolagati nakon *n* mjeseci.

Potražite pomoć tehnologije.

Ispunite sličnu tablicu u programu za izradu proračunskih tablica za slučaj dugoročnije štednje (iznad jedne godine). Koristite formule tog programa.

Nacrtajte grafikon koji opisuje iznos novca u banci po mjesecima.

Na osnovu tablica i grafikona utvrdite koja je vrsta ulaganja isplativija.

Nakon koliko vremena možemo uštedjeti dovoljno za kupnju mobitela?

Kako bi to riješila teorija?

Banke obračunavaju kamate po **složenome kamatnom računu.**

Osnovni pojmovi:

- C_0 = uloženi iznos (kapital, glavnica)
- p = kamatna stopa (izražena u %)
- K = kamate
- n = broj obračunskih razdoblja

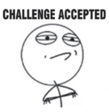
Složene kamate obračunavaju se za svako razdoblje ukamaćivanja od promjenjive glavnice (“kamate na kamate”). Koristi se **dekurzivni obračun kamata** što znači da se kamata obračunava na kraju obračunskog razdoblja.

Obrazložite sljedeću formulu složenoga kamatnog računa za C_n.

Konačna vrijednost C_n uložene glavnice C_0 nakon n obračunskih razdoblja:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \quad \text{ili} \quad C_n = C_0 \cdot r^n, \quad r = 1+\frac{p}{100} \ (\textit{dekurzivni kamatni faktor})$$

$$\text{Kamate: } K = C_n - C_0$$



Možemo li više?

Postoji li mogućnost da štedimo dovoljno dugo i od početnog iznosa 1600 kn postanemo milijunaš?

Primijenite naučeno.

Zadatak 1. *Jednostavni/složeni kamatni račun*

U banku je uloženo 10 000 kuna uz kamatnu stopu 4.1% godišnje. Usporedite kretanje iznosa novca u banci ako je obračun kamata:

a. jednostavan b. složen.

Uputa: Iznos novca ovisno o vremenu ukamaćivanja opišite funkcijama, nacrtajte grafove tih funkcija u istome koordinatnom sustavu. Koristite računalo ili grafički kalkulator. Što uočavate?

Zadatak 2. *Usporedba kamata*

U banku ulažemo 1000 kn uz složenu kamatnu stopu od 5.2% godišnje.

Kojim iznosom ćemo raspolagati na kraju pete godine ako je obračun kamata:

a. godišnji b. polugodišnji c. kvartalni d. mjesečni.

Po čemu se razlikuju ovi podzadatci?

Što uočavate? Usporedite kamate kad je obračun godišnji s kamatama kad je obračun mjesečni.

Nacrtajte grafikon (koristite tehnologiju) i utvrdite promjenu kamata s povećanjem broja obračunskih razdoblja. Kolike bi bile kamate da je obračunsko razdoblje dnevno? Pretpostavite da godina ima 365 dana.

Zadatak 3.

Petar i Ivan uložili su različite iznose novca u dvjema različitim štedionicama. Petar je uložio 1600 kn u prvoj štedionici gdje je kamatna stopa 5% mjesečno, a Ivan je uložio 1500 kn u drugoj gdje je kamatna stopa 7% mjesečno. Obračun je kamata složen i mjesečni. Koliko dugo trebaju štedjeti da bi Ivan imao više novaca od Petra?

Prikažite vrijednosti grafički.

Kako smo radili i što smo naučili?

8.3. Što se krije iza naziva kamatne stope?

Što ćemo raditi?

Razjasnit ćete što je efektivna kamatna stopa i čemu ona služi te naglasiti razliku između nominalnih, relativnih i konfornih kamatnih stopa.

U čemu je problem?

Već ste uočili (u prethodnoj aktivnosti) da je prilično jasan obračun kamata kad je razdoblje ukamaćivanja i razdoblje na koje se odnosi kamatna stopa jednako dugo.

Tada zadanu (nominalnu) kamatnu stopu možemo izravno upotrijebiti u matematičkom izrazu za izračunavanje kamata.

U slučajevima kada nominalna kamatna stopa nije prilagođena obračunskim razdobljima (npr. kamatna stopa izražena je na godišnjoj razini, a obračun je kamata kvartalni ili mjesečni), nominalnu kamatna stopa preračunava se u kamatnu stopu za kraće ili duže vremensko razdoblje.

Tako ćemo dobiti relativnu kamatnu stopu (p_r).

Može se dogoditi da različite banke obračunavaju kamate po različitim obračunskim razdobljima, a i kamatne stope uglavnom nisu jednake.

Jesu li usporedive kamatne stope i konačni iznosi koji se njima nakon nekoga vremenskog razdoblja ostvaruju?

Pogledajmo uvjete koji na prvi pogled izgledaju gotovo jednaki:

Banka	Kamatna stopa (%)	Obračun kamata
Banka B1	5.89	polugodišnji
Banka B2	5.88	kvartalni
Banka B3	5.87	mjesečni
Banka B4	5.86	dnevni

Uložimo li istu svotu novca u svaku od ovih banaka, gdje očekujemo najveću, a gdje najmanju dobit?

Uočite da konačni iznos u svakoj banci ovisi o dvama potpuno različitim parametrima.

Kako ih možemo usporediti?

Kako to izgleda?

Pokušajte svesti zadane parametre na jednostavni kamatni račun. Kolika bi bila kamatna stopa koja bi u jednostavnome kamatnom računu ostvarila istu konačnu vrijednost kao i složeni obračun kamata po propisanim uvjetima uz relativnu kamatnu stopu? Takvu kamatnu stopu zovemo **efektivna ili stvarna kamatna stopa**.[1]

$$C_0 \cdot \left(1+\frac{EKS}{100}\right) = C_0 \cdot \left(1+\frac{p_r}{100}\right)^m$$

$$EKS = 100 \cdot \left(\left(1+\frac{p_r}{100}\right)^m - 1\right)$$

Izračunajte efektivne kamatne stope u svakoj od banaka.

(Koristite grafički kalkulator ili računalo / proračunske tablice.)

Banka	**Kamatna stopa (%)**	**Obračun kamata**	**Broj obračunskih razdoblja** m	**Relativna kamatna stopa** p_r (%)	EKS
Banka B1	5.89	polugodišnji	2		
Banka B2	5.88	kvartalni	4		
Banka B3	5.87	mjesečni	12		
Banka B4	5.86	dnevni	365		

U kojoj će banci naš konačni iznos biti najveći? Jeste li očekivali takav rezultat? Zašto? Za koliko bi trebalo povećati kamatnu stopu u Banci B1 da bi štednja (ili depozit) u njoj bila najpovoljnija?

Kako bi to riješila teorija?

Prisjetite se.

Dovodi li upotreba nominalne kamatne stope i odgovarajuće relativne kamatne stope kod složenoga kamatnog računa do iste konačne vrijednosti glavnice? *Ne.*

Kamatna stopa koja daje **istu konačnu vrijednost** primjenom složenoga kamatnog računa kao i njoj ekvivalentna nominalna kamatna stopa primjenom jednostavnog ukamaćivanja naziva se **konformnom kamatnom stopom.**

1 U stvarnom bankarskom svijetu pri određivanju efektivne kamatne stope (EKS) kod kredita u konačni iznos duga uključuju se i sve naknade i troškovi pri sklapanju ugovora o kreditu. Cilj uvođenja EKS-a jest zaštita potrošača uvođenjem transparentnoga prikaza troškova kredita, odnosno prihoda depozita kod svih banaka.

Označite s p nominalnu godišnju kamatnu stopu i s m broj obračunskih razdoblja. Neka je p' oznaka za odgovarajuću konformnu kamatnu stopu. Možete li izvesti formulu za konformnu kamatnu stopu tako da slijedite definiciju konformne kamatne stope?

Možete li pretpostaviti?

Koji izračun daje veće kamatne stope, relativni ili konformni?

Prisjetite se postupka određivanja konformne kamatne stope i što ste uočili uspoređujući relativne i nominalne kamatne stope.

Može li broj obračunskih razdoblja m odrediti međusobni odnos relativne i konformne kamatne stope?

Napravite model.

Odredite relativnu i konformnu kamatnu stopu te ih usporedite ako je nominalna kamatna stopa 12% godišnje i ukamaćivanje:

a. godišnje b. polugodišnje c. kvartalno d. mjesečno.

Ispunite tablicu:

Vrijeme ukamaćivanja	Broj obračunskih razdoblja m	Relativna kamatna stopa p_r (%)	Konformna kamatna stopa p' (%)
Godišnje	1		
Polugodišnje	2		
Kvartalno	4		
Mjesečno	12		

Što uočavate?

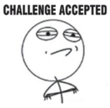
Može li broj obračunskih razdoblja biti manji od jedan?

Što je tada s odnosom relativne i konformne kamatne stope?

Potražite pomoć tehnologije.

Pomoću programa dinamične geometrije prikažite ovisnost relativne i konformne kamatne stope ovisno o nominalnoj kamatnoj stopi p. Funkciju definirajte pomoću parametra m.

Što uočavate? Je li relativna kamatna stopa uvijek veća od konformne? Istražite.



Možemo li više?

Što mislite kad banka koristi konformni, a kad relativni obračun kamata? Što je i kada povoljnije za potrošača?

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Prije pet godina Ivan je naslijedio 25 000 kuna. Uložio je novac u banku. Koliko bi novaca morao danas uložiti u banku kako bi za dvije godine uštеđenim novcem mogao kupiti automobil u vrijednosti od najmanje 70 000 kuna? Godišnja nominalna kamatna stopa je 2.2%, a obračun je kamata polugodišnji. Pri obračunu kamata banka koristi konformnu kamatnu stopu.

Zadatak 2.

Kolika bi trebala biti nominalna kamatna stopa u prethodnom zadatku da bi Ivanu bilo dovoljno da danas u banku uloži samo 30 000 kn te da nakon dvije godine ima potrebni iznos?

Zadatak 3.

Koliki bi iznos Ivan pod istim uvjetima danas trebao uložiti u banku u slučaju da banka pri obračunu koristi relativnu kamatnu stopu?

Pri određivanju svojih rješenja i analizi koristite grafički kalkulator.

Kako smo radili i što smo naučili?

U slučajevima kada nominalna kamatna stopa nije prilagođena obračunskim razdobljima (npr. kamatna stopa je izražena na godišnjoj razini, a obračun kamata je mjesečni), nominalna kamatna stopa preračunava se u kamatnu stopu za kraće ili duže vremensko razdoblje na sljedeća dva načina:

1. relativnim (razmjernim ili proporcionalnim načinom)
2. konformnim načinom.

Svaki obračun daje različiti konačni iznos.

Želimo li usporediti različite uvjete izračuna kamata koristit ćemo efektivne kamatne stope.

8.4. Kredit 1

Što ćemo raditi?

Promatrat ćemo, analizirati i računati kako se iznos novca koji smo dužni banci mijenja sa svakom otplatnom ratom.

U čemu je problem?

Tin već nekoliko godina u školi uči španjolski jezik. Želi učvrstiti svoje znanje te smatra da je odlazak u inozemstvo u vrijeme ljetnih praznika najbolji način za to. Jedini problem je to što je ljetna škola stranih jezika koju želi upisati preskupa. Tijekom godine dana nije uspio uštedjeti dovoljno novca pa želi uzeti kredit namijenjen srednjoškolcima koji će moći vraćati tijekom sljedeće školske godine. Otišao je u banku i bankar mu je predstavio uvjete za kredit, no kako je ovo njegov prvi kredit, ništa mu nije jasno pa vas moli da mu odredite koliko bi novaca morao svaki mjesec odvojiti od svoje stipendije da ispuni svoj cilj i provede ljeto u Barceloni. Tin prima stipendiju u iznosu od 800 kn mjesečno.

Kako to izgleda?

Cijena ljetne škole je 1 000 eura i to je iznos koji bi Tin trebao posuditi.

Ukupna godišnja kamatna stopa je 5.5%. Pozajmicu bi vraćao od mjesečnog iznosa stipendije.

Možete li pretpostaviti?

1. Koji iznos bi Tin trebao mjesečno odvojiti od svoje stipendije?
2. Može li si Tin priuštiti odlazak u Barcelonu?
3. Koji bi ukupni iznos, u eurima, Tin morao vratiti nakon godinu dana?
4. Koliko iznosi naknada (kamate) banci za uslugu posudbe?

Napravite model.

U banci je dobio tablicu u kojoj je opisan otplatni plan.

RB	Glavnica	Kamata	Mjesečni obrok	Nedospjela glavnica
0				1.000,00
1	81,26	4,58	85,84	918,74
2	81,63	4,21	85,84	837,11
3	82	3,84	85,84	755,11
4	82,38	3,46	85,84	672,73
5	82,76	3,08	85,84	589,97
6	83,14	2,7	85,84	506,83
7	83,52	2,32	85,84	423,31
8	83,9	1,94	85,84	339,41
9	84,28	1,56	85,84	255,13
10	84,67	1,17	85,84	170,46
11	85,06	0,78	85,84	85,4
12	85,4	0,39	85,79	0
Suma:	1.000,00	30,03	1.030,03	

Proučite tablicu.

- Koliko iznosi mjesečna rata koju bi Tin morao vratiti?
- Koliko iznose ukupne kamate, a koliko ukupan dug?
- Slažu li se vrijednosti s Tinovom pretpostavkom?
- Zašto je ukupni iznos otplaćenog duga manji nego što je on pretpostavio?
- Od čega se sastoji mjesečni obrok? Zašto se u svakoj sljedećoj rati (mjesečni obrok) povećava dio glavnice?
- Koliko iznosi dug na kraju devetog mjeseca?
- Čemu je jednak zbroj svih kamata, a čemu zbroj svih otplatnih obroka?
- Koliko se posto konačna vrijednost duga poveća u odnosu na početnu?

Kako bi to riješila teorija?

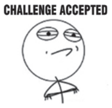
Pokušajte odrediti formulu po kojoj se određuju kamate za svako obračunsko razdoblje. Oznake:

- K_i – kamate za *i*-to razdoblje
- p – kamatna stopa
- C_i – nedospjela glavnica (ostatak duga) za *i*-to razdoblje

Napišite formulu za ukupne kamate i ukupan dug.

Potražite pomoć tehnologije.

Grafički prikažite, koristeći program dinamične geometrije ili proračunske tablice, ovisnost iznosa kamata o mjesecima, glavnice o mjesecima i nedospjele glavnice o mjesecima.



Možemo li više?

Nakon uspješnog boravka u Barceloni, u cijelosti otplaćene pozajmice, Tin razmišlja o studiranju u inozemstvu. Sada bi posudio 10 000 € na 5 godina, uz iste uvjete.

- Koliki ukupni iznos sada mora vratiti?
- Je li iznos sada također manji od 10 550 € (10 000 + 5.5% od 10 000)?
- Imali kakvog utjecaja što je sada otplata na 5 godina?
- Koliko bi po njegovu izračunu sada bila mjesečna rata?

Otplatna tablica za 10 000 € uz 5.5 % godišnju kamatnu stopu na pet godina.

RB	Glavnica	Kamata	Mjesečni obrok	Nedospjela glavnica
0				10.000,00
1	145,18	45,83	191,01	9.854,82
2	145,84	45,17	191,01	9.708,98
3	146,51	44,50	191,01	9.562,47
4	147,18	43,83	191,01	9.415,29
5	147,86	43,15	191,01	9.267,43

6	148,53	42,48	191,01	9.118,90
7	149,22	41,79	191,01	8.969,68
8	149,9	41,11	191,01	8.819,78
9	150,59	40,42	191,01	8.669,19
10	151,28	39,73	191,01	8.517,91
11	151,97	39,04	191,01	8.365,94
12	152,67	38,34	191,01	8.213,27
13	153,37	37,64	191,01	8.059,90
14	154,07	36,94	191,01	7.905,83
15	154,77	36,24	191,01	7.751,06
16	155,48	35,53	191,01	7.595,58
17	156,20	34,81	191,01	7.439,38
18	156,91	34,10	191,01	7.282,47
19	157,63	33,38	191,01	7.124,84
20	158,35	32,66	191,01	6.966,49
21	159,08	31,93	191,01	6.807,41
22	159,81	31,20	191,01	6.647,60
23	160,54	30,47	191,01	6.487,06
24	161,28	29,73	191,01	6.325,78
25	162,02	28,99	191,01	6.163,76
26	162,76	28,25	191,01	6.001,00
27	163,51	27,5	191,01	5.837,49
28	164,25	26,76	191,01	5.673,24
29	165,01	26	191,01	5.508,23
30	165,76	25,25	191,01	5.342,47
31	166,52	24,49	191,01	5.175,95
32	167,29	23,72	191,01	5.008,66
33	168,05	22,96	191,01	4.840,61
34	168,82	22,19	191,01	4.671,79
35	169,60	21,41	191,01	4.502,19
36	170,37	20,64	191,01	4.331,82
37	171,16	19,85	191,01	4.160,66
38	171,94	19,07	191,01	3.988,72
39	172,73	18,28	191,01	3.815,99
40	173,52	17,49	191,01	3.642,47

41	174,32	16,69	191,01	3.468,15
42	175,11	15,90	191,01	3.293,04
43	175,92	15,09	191,01	3.117,12
44	176,72	14,29	191,01	2.940,40
45	177,53	13,48	191,01	2.762,87
46	178,35	12,66	191,01	2.584,52
47	179,16	11,85	191,01	2.405,36
48	179,99	11,02	191,01	2.225,37
49	180,81	10,20	191,01	2.044,56
50	181,64	9,37	191,01	1.862,92
51	182,47	8,54	191,01	1.680,45
52	183,31	7,70	191,01	1.497,14
53	184,15	6,86	191,01	1.312,99
54	184,99	6,02	191,01	1.128,00
55	185,84	5,17	191,01	942,16
56	186,69	4,32	191,01	755,47
57	187,55	3,46	191,01	567,92
58	188,41	2,60	191,01	379,51
59	189,27	1,74	191,01	190,24
60	190,24	0,87	191,11	0
Suma:	10.000,00	1.460,70	11.460,70	

Analizirajte otplatnu tablicu.

- Kolike su sada ukupne kamate?
- Zašto je sada ukupni dug veći od 10 550 €?
- Koliko se posto konačna vrijednost duga promijeni u odnosu na početnu?
- Tijekom studija Tin povremeno radi, dobro zarađuje i u mogućnosti je pozajmicu otplatiti ranije.

Kojim iznosom Tin mora raspolagati na kraju treće godine otplate da bi u cijelosti otplatio dug (nema nikakve naknade za prijevremenu otplatu)?

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Na temelju vrijednosti u prvom retku popunite tablicu (svi mjesečni obroci su jednaki):

RB	Glavnica	Kamata	Mjesečni obrok	Nedospjela glavnica
0				5 .000,00
1	406,26	22,92	429,18	4.593,74
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
Suma:	5.000,00			

Zadatak 2.

Na internetskim stranicama potražite učeničke i studenske kredite u različitim bankama. Usporedite početne uvjete, ukupne kamate i ukupni iznos koji treba vratiti.

Zadatak 3.

Potrošački krediti mogu se otplaćivati po različitim modelima. Model po kojem je Tin dignuo kredit u oba je slučaja onaj s jednakim anuitetima (obračunskim ratama). Na temelju izračunske tablice koju je Tin dobio u banci za svoj prvi kredit od 1000 €, s otplatom na godinu dana, pokušajte doći do formule pomoću koje se određuje anuitet.

Prisjetimo se osnovnih uvjeta potrošačkih kredita:

- Nominalna kamatna stopa dijeli se na 12 relativnih kamatnih stopa $p_R = \frac{p}{12}$.

- Kamatni faktor iznosi $r = 1 + p_R$.
- Preostali dug dobiva se iz prethodnog, oduzimanjem te glavnice tako da od anuiteta oduzmemo plaćenu kamatu za taj mjesec.
- Svi anuiteti su jednaki.
- Preostali dug nakon posljednjeg obračunskog razdoblja treba biti 0.

Zadatak 4.

Provjerite vrijedi li ista formula za izračunavanje anuiteta i za obračunsku tablicu Tinova kredita od 10000 € na 5 godina?

Kako smo radili i što smo naučili?

Nakon kvalitetne analize tablica možete raspravljati o promjenama otplatnih obroka, iznosa ukupnih kamata ako mijenjamo početne uvjete (kamatnu stopu ili broj godina otplate).

Literatura

Šorić, Kristina. 2001. *Matematika 3, udžbenik i vježbenica za ekonomske škole*. Školska knjiga. Zagreb.

8.5. Kredit 2

Što ćemo raditi?

Promatrat ćemo kako se mijenjaju glavnica i kamata pri kreditu uz jednake anuitete i u kreditu uz rate (otplatne kvote). Početni su uvjeti u oba slučaja jednaki.

U čemu je problem?

Nakon Tinova dobrog iskustva s pozajmicom za školovanje i njegovi roditelji željeli bi podići stambeni kredit za adaptaciju kuće.

Informacije o kreditima prikupljaju na internetskim stranicama raznih banaka. Na internetskim stranicama jedne od banaka, uključuju „Kalkulator kredita", zatraže kredit u iznosu od 50 000 HRK uz otplatu od 2 godine. Nakon pitanja imaju li status klijenta u banci, sljedeće je pitanje želite li otplatu u jednakim anuitetima ili otplatu u ratama. Roditeljima razlika između pojmova anuiteta i rate nije baš jasna. Uzet ćemo primjer kredita uz oba uvjeta i usporediti ih.

Kako to izgleda?

Promatrat ćemo dva različita kredita u iznosu od 50 000 HRK s rokom otplate od 2 godine uz iste početne uvjete. Početni uvjeti:

- iznos kredita: 50 000 HRK
- godišnja kamatna stopa (fiksna): 5.15%
- broj mjesečnih otplata (rata): 24
- klijent ste banke (osoba kojoj se isplaćuju redovna mjesečna primanja na račun banke).

Način otplate: **otplata u jednakim anuitetima, otplata u ratama.**

Možete li pretpostaviti?

Koja je razlika između kredita u ratama i kredita s jednakim anuitetima? Je li razlika u obračunu kamata? Koliki ukupni iznos moramo vratiti u svakom od slučaja?

Napravite model.

Pogledajmo otplatne tablice.

Otplata u ratama:

Rata	Glavnica	Kamata	Iznos rate	Preostali iznos kredita
0				50.000,00
1	2.083,33	214,58	2.297,91	47.916,67
2	2.083,33	205,64	2.288,97	45.833,34
3	2.083,33	196,7	2.280,03	43.750,01
4	2.083,33	187,76	2.271,09	41.666,68
5	2.083,33	178,82	2.262,15	39.583,35
6	2.083,33	169,88	2.253,21	37.500,02
7	2.083,33	160,94	2.244,27	35.416,69
8	2.083,33	152	2.235,33	33.333,36
9	2.083,33	143,06	2.226,39	31.250,03
10	2.083,33	134,11	2.217,44	29.166,70
11	2.083,33	125,17	2.208,50	27.083,37
12	2.083,33	116,23	2.199,56	25.000,04
13	2.083,33	107,29	2.190,62	22.916,71
14	2.083,33	98,35	2.181,68	20.833,38
15	2.083,33	89,41	2.172,74	18.750,05
16	2.083,33	80,47	2.163,80	16.666,72
17	2.083,33	71,53	2.154,86	14.583,39
18	2.083,33	62,59	2.145,92	12.500,06
19	2.083,33	53,65	2.136,98	10.416,73
20	2.083,33	44,71	2.128,04	8.333,40
21	2.083,33	35,76	2.119,09	6.250,07
22	2.083,33	26,82	2.110,15	4.166,74
23	2.083,33	17,88	2.101,21	2.083,41
24	2.083,41	8,94	2.092,35	0,00
Suma:	50.000,00	2682,29	52.682,29	

Napomena: Rata je iznos (mjesečni obrok) koji mjesečno otplaćujemo banci.

Otplata u jednakim anuitetima:

Anuitet	Glavnica	Kamata	Iznos anuiteta	Preostali iznos kredita
0				50.000,00
1	1.982,35	214,58	2.196,93	48.017,65
2	1.990,85	206,08	2.196,93	46.026,80
3	1.999,40	197,53	2.196,93	44.027,40
4	2.007,98	188,95	2.196,93	42.019,42
5	2.016,60	180,33	2.196,93	40.002,83
6	2.025,25	171,68	2.196,93	37.977,57
7	2.033,94	162,99	2.196,93	35.943,63
8	2.042,67	154,26	2.196,93	33.900,96
9	2.051,44	145,49	2.196,93	31.849,52
10	2.060,24	136,69	2.196,93	29.789,28
11	2.069,08	127,85	2.196,93	27.720,20
12	2.077,96	118,97	2.196,93	25.642,23
13	2.086,88	110,05	2.196,93	23.555,35
14	2.095,84	101,09	2.196,93	21.459,51
15	2.104,83	92,1	2.196,93	19.354,68
16	2.113,87	83,06	2.196,93	17.240,81
17	2.122,94	73,99	2.196,93	15.117,87
18	2.132,05	64,88	2.196,93	12.985,83
19	2.141,20	55,73	2.196,93	10.844,63
20	2.150,39	46,54	2.196,93	8.694,24
21	2.159,62	37,31	2.196,93	6.534,62
22	2.168,89	28,04	2.196,93	4.365,74
23	2.178,19	18,74	2.196,93	2.187,54
24	2.187,54	9,39	2.196,93	0,00
Suma:	50.000,00	2726,32	52.726,32	

Napomena: Anuitet je iznos (mjesečni obrok) koji mjesečno otplaćujemo banci.

Kako bi to riješila teorija?

Otplata u ratama	*Otplata u jednakim anuitetima*
• Koliko iznosi prvi mjesečni obrok? • Mijenja li se i kako se mijenja mjesečni obrok? • Od čega se on sastoji? • Tko utječe na njegovo smanjenje? • Kako se i na koji iznos računaju kamate? • Kako nazivamo takvu kamatnu stopu? • Koliko iznose ukupne kamate? • Koji ukupni iznos treba vratiti nakon dvije godine? • Ako bismo kredit htjeli otplatiti jednokratno nakon desete rate, kojim iznosom to možemo učiniti (nema nikakve naknade za zatvaranje kredita)?	• Koliko iznosi prvi mjesečni obrok? • Mijenja li se i kako se mijenja mjesečni obrok? • Od čega se on sastoji? • Kako se i na koji iznos računaju kamate? • Koliko iznose ukupne kamate? • Kako nazivamo takvu kamatnu stopu? • Koji ukupni iznos treba vratiti nakon dvije godine? • Ako bismo kredit htjeli otplatiti jednokratno nakon desete rate, kojim iznosom to možemo učiniti (nema nikakve naknade za zatvaranje kredita)?

Koji je način otplate za nas povoljniji?

Zašto banci više odgovara kredit uz jednake mjesečne obroke (anuitete)?

Zašto ljudi češće uzimaju kredite uz jednake anuitete, a za njih su nepovoljniji? Što ih ograničava?

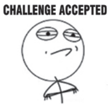
Potražite pomoć tehnologije.

Zadatak 1.

Nacrtajte grafikone uz pomoć tehnologije.

a. U istom koordinatnom sustavu prikažite kako se mijenjaju kamate s mjesecima za oba načina otplate.

b. Prikažite mjesečnu promjenu preostalog iznosa kredita za oba slučaja.



Možemo li više?

Zadatak 2. *(rad u paru)*

Kredit u iznosu od 20 000 kuna, uz godišnju kamatnu stopu 5.10% odobren je na godinu dana.

Kredit se vraća u mjesečnim obrocima, a koristi se relativna kamatna stopa.

Napravite otplatnu tablicu. Možete koristiti proračunske tablice:

a. Otplata u ratama (1. učenik)

Rata	Glavnica	Kamata	Iznos rate	Preostali iznos kredita
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
Suma:				

b. Otplata u jednakim anuitetima (2. učenik)

Anuitet	Glavnica	Kamata	Iznos anuiteta	Preostali iznos kredita
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
Suma:				

Za određivanje *iznosa anuiteta* koristite rješenje zadatka 3. iz prethodne aktivnosti.

Odgovorite na postavljena pitanja:

a. Koliko mora iznositi preostali iznos kredita na kraju 12. mjeseca u oba slučaja?
b. Usporedite ukupno vraćeni iznos pri obje otplate.
c. Usporedite ukupne kamate u oba slučaja.
d. Odredite omjer ukupnih kamata kredita uz jednake rate i jednake anuitete.
e. Usporedite dobiveni omjer s omjerom kamata iz našega početnog problema (zadane tablice).
f. Što očekujete kada će razlika ukupnih kamata biti puno veća?

9. Teorija grafova

9.1. Šetnja, staza, put...

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti upoznati osnovne pojmove teorije grafova.

U čemu je problem?

Dobili ste kartice (prilog 1) na kojima su nacrtani grafovi. Svi se nacrtani grafovi sastoje od točaka – vrhova i dužina koje ih spajaju – bridova. Što im je zajedničko? Po čemu se razlikuju? Možete li opisati neke njihove karakteristike?

Kako to izgleda?

Grupirajte, odnosno složite grafove u skupine prema nekome zajedničkom svojstvu. Opišite što im je zajedničko, odnosno zašto ste ih stavili u istu skupinu. Pokušajte ih opisati koristeći termine *vrh* i *brid*.

Možete li pretpostaviti?

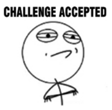
Možete li i kako grupirati grafove prema još nekom načelu?

Kako bi to riješila teorija?

Graf možemo kratko opisati kao skup vrhova i bridova ili preciznije:

Graf *G* je uređeni par $G = (V, E)$, gdje je V neprazan **skup vrhova**, a E je **skup bridova**. Svaki brid $e \in E$ spaja dva vrha $u, v \in V$ koji se zovu krajevi od e. Broj vrhova u grafu označimo s $v(G)$, a broj bridova s $e(G)$. **Podgraf** grafa G je graf čiji vrhovi pripadaju skupu V, a bridovi skupu E. **Stupanj vrha** broj je bridova s kojima je vrh spojen, tj. koji su **incidentni** vrhu. Kod usmjerenih grafova izlazni je stupanj broj bridova koji „izlaze” iz vrha, a ulazni stupanj broj je bridova koji „ulaze” u vrh.

U prilogu 2. nalaze se definicije ili opisi osnovnih pojmova teorije grafova. Povežite dane pojmove s nacrtanim grafovima, odnosno pronađite i označite opisane pojmove na nekom od nacrtanih grafova.



Možemo li više?

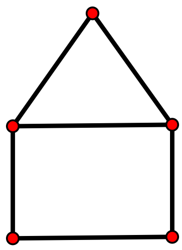
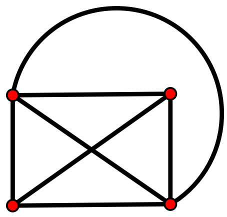
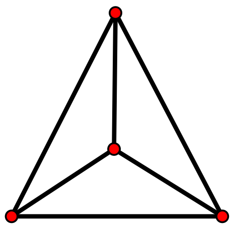
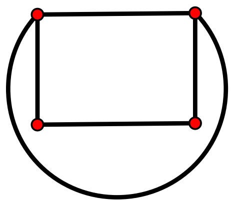
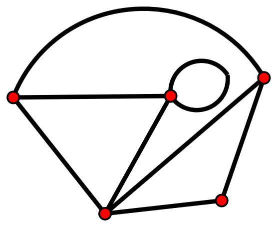
Zalijepite kartice s opisom pojmova na A3 papir (ili u bilježnicu), a zatim kraj svakog pojma nacrtajte neki novi primjer grafa, koji prikazuje taj pojam. Ako je potrebno, označite drugom bojom dio na grafu koji prikazuje taj pojam.

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Promotrite nacrtane grafove:

A. B. C. D. E.

a. Koji su od nacrtanih grafova jednostavni?

b. Za svaki od grafova zbrojite stupanj svih vrhova i podijelite dobiveni zbroj s dva. Ako vrh ima petlju, dogovorno se uzima da se tada stupanj vrha poveća za dva.

Što računa opisani algoritam? Vrijedi li zaključak i općenito?

Zadatak 2.

Nacrtajte grafove, ako je moguće, koji imaju točno:

a. 3 vrha stupnja 1 i 3 vrha stupnja 3;

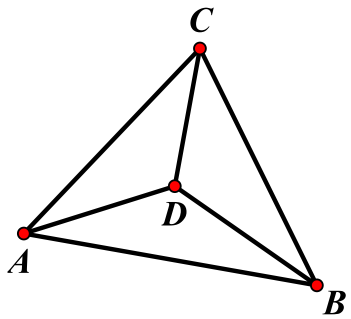
b. 1 vrh stupnja 1 i 3 vrha stupnja 3;

c. 2 vrha stupnja 1 i 3 vrha stupnja 3.

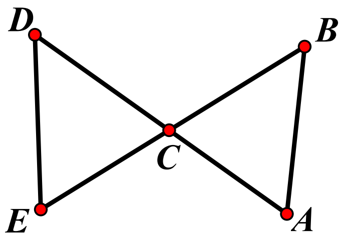
Zadatak 3.

Za sljedeće grafove ispišite stazu, put, ciklus (barem dva od svakog pojma).

a.



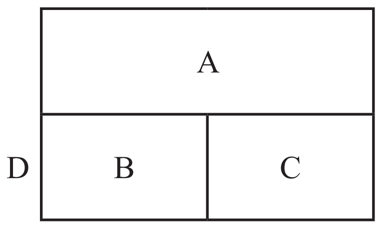
b.



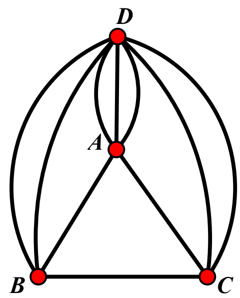
Postoji li Eulerov ciklus, odnosno Hamiltonov ciklus za grafove a. i b.?

Zadatak 4.

a. Može li se proći linijom bez prekida kroz područja *A, B, C, D* presijecajući samo jednom svih deset dužina od kojih se sastoji sljedeći lik?



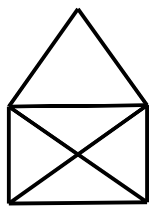
b. Usporedite sljedeći graf s likom iz zadatka a. Što primjećujete?



Zadatak 5.

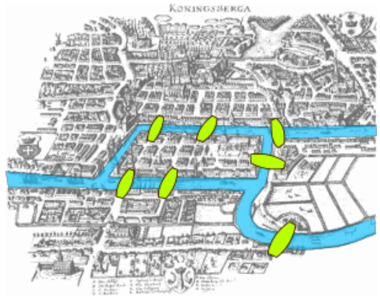
Može li se skica „kućice” nacrtati u jednom potezu bez podizanja olovke s papira?

Zapišite zadatak koristeći terminologiju teorije grafova?



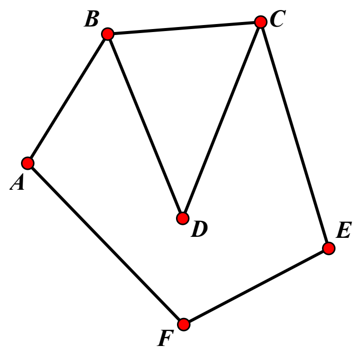
Zadatak 6. *Königsberški mostovi*

Smatra se da je povijesni trenutak, početak teorije grafova, vezan za rješenje jednoga stvarnog problema u 17. stoljeću. Naime, u istočnopruskom gradu Königsbergu (današnji Kalinjgrad u Rusiji) postojalo je sedam mostova na rijeci Pregel. Građani toga grada pokušavali su gradom šetati tako da od svoje kuće prijeđu svaki od sedam mostova točno jednom i da se vrate kući. Kako to nikako nisu uspijevali, pitali su švicarskog matematičara L. Eulera je li to uopće moguće? Skica situacije u Königsbergu prikazana je na slici. Kako je Euler odgovorio na pitanje? Obrazložite.



Zadatak 7.

Za prikazani graf:



a. Napišite stazu koja počinje u vrhu A i završi u vrhu E tako da kroz sve vrhove kojima prolazi prođe samo jednom.

b. Napišite Hamiltonov put koji počinje u A i završi u E.

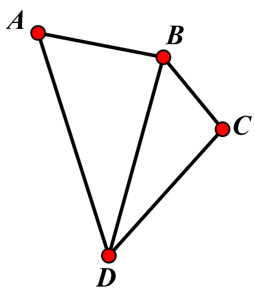
c. Napišite Hamiltonov ciklus iz A.

d. Napišite Hamiltonov ciklus iz D.

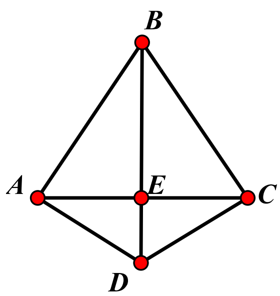
e. Nacrtajte razapinjuće stablo koje sadrži bridove AB i AF.

Zadatak 8.

a. Za nacrtani graf nacrtajte što više možete razapinjućih stabala.



b. Za nacrtani graf napišite sve Hamiltonove cikluse iz C.



Zadatak 9.

Plinovod povezuje nekoliko gradova. Ako je cijena postavljanja plinovoda u svim regijama ista, najjeftiniji je graf:

A.Hamiltonov ciklus B. Eulerov ciklus C. Razapinjuće stablo D. Potpuni graf.

Zadatak 10.

Pokažite da u svakoj grupi od šestero ljudi postoji troje ljudi koji se međusobno poznaju ili postoje troje ljudi od kojih ni jedan ne poznaje preostalo dvoje.

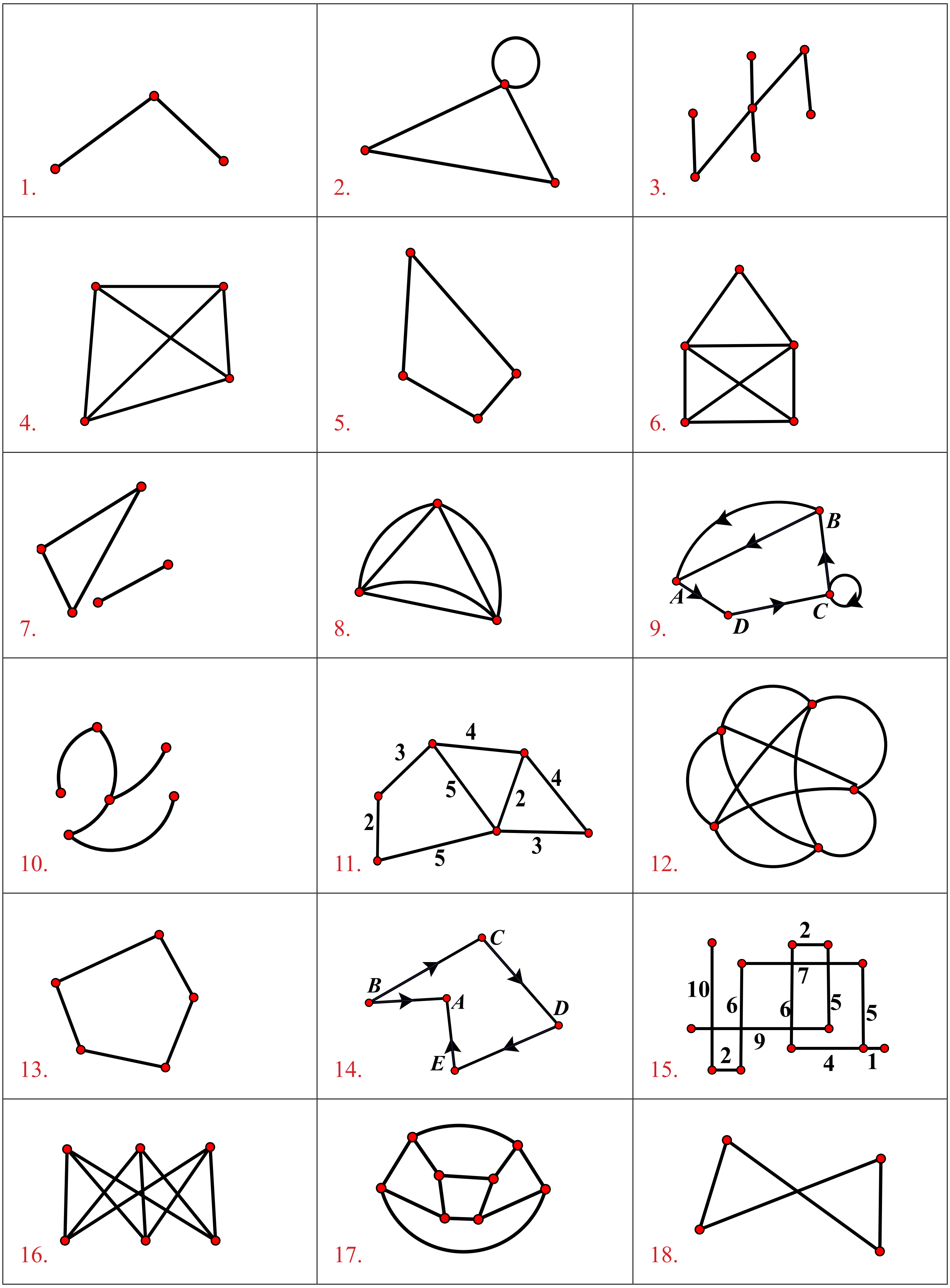
Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura:

http://nrich.maths.org/8257,

Dolan, Stan. 2013. *Use of Maths forAQA: Decision Maths*. Oxford University Press. Oxford.

Vollmar, Pamela; Kemp, Edward and others. 2008. *Mathematics for the international student, Pre+Diploma SL and HL (MYP 5 Plus) – Second edition.* Haese&Harris publications. Adelaide, Australia.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
B
A
D
C
9.
10.
4
3
5
2
4
2
3
5
11.
12.
13.
C
B
A
D
E
14.
2
7
10
6
6
5
5
9
2
4
1
15.
16.
17.
18.

Prilog 1.

Brid čiji se krajevi podudaraju zove se **petlja.**	Ako dva ili više bridova povezuju isti par vrhova, takve bridove zovemo **višestruki bridovi**. Graf koji sadrži višestruke bridove, zove se **multigraf**.	Graf u kojem postoji put između svaka dva vrha jest **povezani graf**.
Ako graf nema ni petlji ni višestrukih bridova, zove se **jednostavni** graf.	Ako bridu dodamo strelicu, graf je **usmjerni**.	Jednostavan graf u kojemu je svaki par vrhova povezan bridom jest **potpuni graf**.
Ako je svakom bridu pridružen jedan broj (duljina ceste, cestarina i sl), taj broj zovemo **težina brida** s oznakom *w(e)*, a pripadni graf se zove **težinski graf**.	Šetnja u G niz je vrhova i bridova. U jednostavnom grafu šetnja je jednoznačno određena nizom vrhova.	**Staza** je šetnja bez ponovljenih bridova.
Put je šetnja kojoj su svi vrhovi različiti.	**Zatvorena šetnja** je šetnja kod koje je početak i kraj u istom vrhu.	**Ciklus** je zatvorena staza.
Eulerova staza je staza u grafu koja sadrži svaki brid.	**Eulerov ciklus** je zatvorena Eulerova staza.	Graf koji ima Eulerov ciklus je **Eulerov graf.**
Hamiltonov put je put u grafu koji sadrži sve njegove vrhove.	**Hamiltonov ciklus** jednostavan je ciklus koji sadrži sve vrhove.	Graf koji ima Hamiltonov ciklus je **Hamiltonov graf.**
Graf se naziva **stablo** ako su svaka dva vrha u njemu povezana točno jednim putem.	**Razapinjuće stablo** je jednostavan povezani graf bez ciklusa.	**Stupanj vrha** je broj bridova s kojima je vrh spojen, tj. koji su **incidentni** vrhu.

Prilog 2.

9.2. U susjedstvu

Što ćemo raditi?

Prikazat ćete podatake o povezanosti unutar nekog sustava koristeći različite grafove i tablice.

U čemu je problem?

Tvrtka *Sunce* kupila je nova računala koja mora smjestiti u sedam soba jedne poslovne zgrade i povezati u mrežu. Četiri su glavna kabla koja izlaze iz osnovne jedinice. Jedan ide kroz sobu za šefa i sobu njegove tajnice. Drugi ide kroz sobu za računovođu i sobu šefova pomoćnika. Treći ide na drugi kat i tu se grana na tri koja idu u sobe A, B i C za zaposlenike, a četvrti ide direktno na treći kat u sobu C za glavnog programera. Kako biste prikazali i dokumentirali ove podatke?

Kako to izgleda?

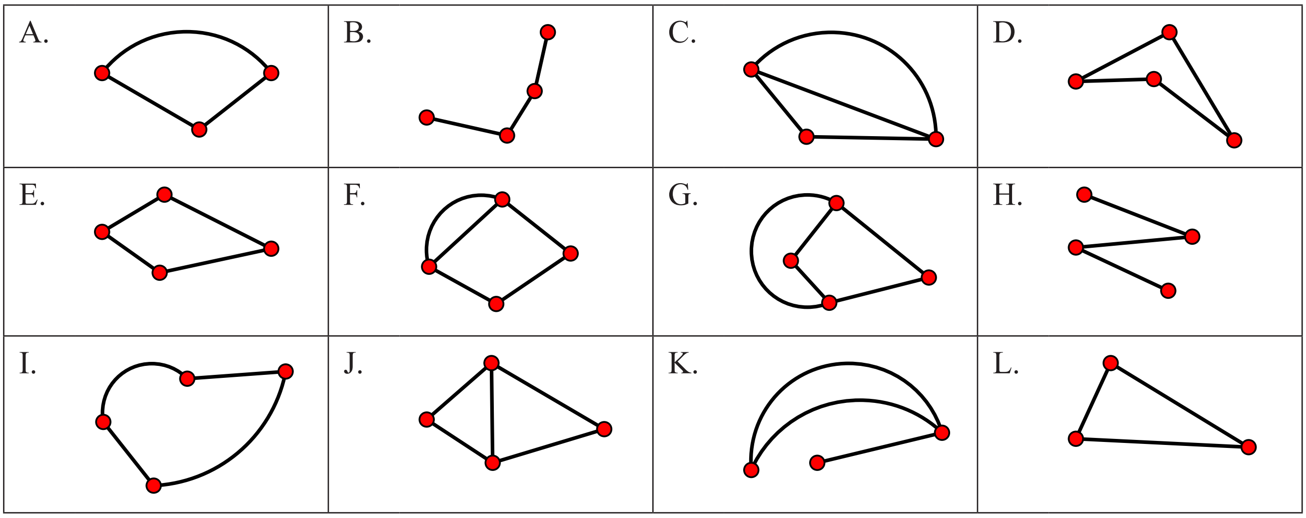
Nacrtajte graf koji prikazuje mrežu povezanosti računala u tvrtki *Sunce*. Usporedite svoju mrežu s mrežama drugih učenika.

Provjerite odgovara li svaka mreža opisu povezanosti. Izgledaju li sve korektne mreže isto? Postoji li za danu situaciju uvijek jedinstveni način crtanja grafa?

Grafovi koji izgledaju drugačije, ali prikazuju istu informaciju su *topološki ekvivalentni ili izomorfni*. Broj bridova koji spajaju bilo koja dva vrha jednoga grafa jednak je broju bridova koji spajaju odgovarajuća dva vrha njemu izomorfnoga grafa.

Možete li pretpostaviti?

Koji su od sljedećih grafova izomorfni?



Kako bi to riješila teorija?

Marta je odlučila pozvati nekoliko prijatelja i sestričnu na proslavu rođendana. Neki od njih se međusobno poznaju iz osnovne škole, neki iz razreda, neki iz glazbene škole, a neki se uopće ne poznaju. Pozvala je Anu, Bornu, Danijelu, Enu, Frana, Gorana, Jelenu i Katarinu. Većina pozvanih pitala je Martu hoće li na proslavi biti netko njemu poznat. Marta je umjesto odgovora svima poslala sljedeću tablicu *poznanstva*:

	A	**B**	**D**	**E**	**F**	**G**	**J**	**K**	**M**
A	-	0	0	0	0	0	1	0	1
B	0	-	1	1	0	1	0	0	1
D	0	1	-	1	0	1	0	0	1
E	0	1	1	-	0	1	0	0	1
F	0	0	0	0	-	0	1	0	1
G	0	1	1	1	0	-	0	0	1
J	1	0	0	0	1	0	-	0	1
K	0	0	0	0	0	0	0	-	1
M	1	1	1	1	1	1	1	1	-

Slova A, B,..., M označavaju prvo slovo imena pozvanih, 0 (ponekad se piše i -) znači da se osobe tog reda i stupca međusobno ne poznaju, a 1 da se poznaju.

Može li se na osnovu tablice zaključiti koje se osobe međusobno poznaju? Nacrtajte graf koji odgovara danoj tablici.

Većina algoritama kojima se rješavaju problemi teorije grafova iz realnog svijeta koristi računala zbog složenosti ili veličine mreža. Zato podatke treba pregledno spremiti u numeričkom obliku. Primjerice, podatke iz prethodnog zadatka možemo zapisati i u nešto jednostavnijoj tablici 9×9:

Svaki od 9 redaka i 9 stupaca u tablici predstavlja jedan od vrhova grafa, a svaki element tablice je broj bridova između dvaju vrhova koja su određena retkom i stupcem u kojima se taj element nalazi.

Ovakvu tablicu zovemo **matrica susjedstva** jer pokazuje koji su vrhovi međusobno susjedni, odnosno koji su vrhovi direktno povezani bridom. Matrica susjedstva koristi se za spremanje većih količina podataka koje koristimo pri rješavanju problema iz realnog konteksta. Ako je graf težinski, umjesto broja bridova između dvaju vrhova, elementi matrice bit će težine bridova.

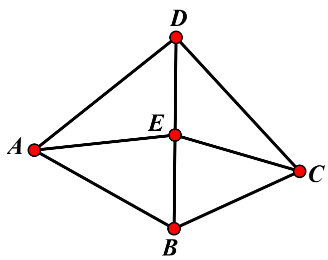
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

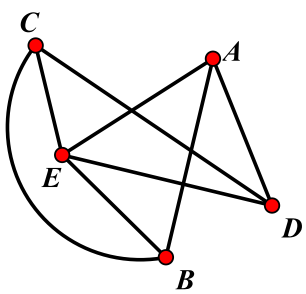
Ako graf nema petlji, na glavnoj dijagonali, koja ide od gornjeg lijevog do donjeg desnog vrha tablice, nalaze se nule. Za koje će grafove matrica susjedstva imati samo nule i jedinice, a za koje grafove može imati i druge brojeve?


Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Napišite matricu susjedstva za sljedeće grafove. Što zaključujete o tim grafovima?

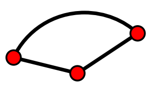




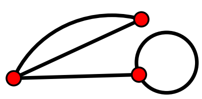
Zadatak 2.

Napišite matricu susjedstva za sljedeće grafove:

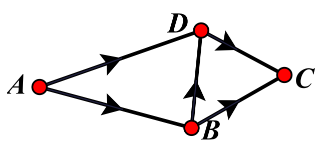
a.



b.



c.



Zadatak 3.

Nacrtajte grafove prema sljedećim matricama susjedstva:

a.

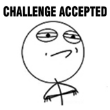
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Možemo li više?

Zadatak 4.

U jednoj su općini mjerodavne službe uočile da primarna zdravstvena skrb za stanovnike osam sela njihove općine nije učinkovita. Odlučili su da svako selo mora ili imati svoju ambulantu ili mora biti udaljeno manje od 6 km od nekog sela koje ima svoju ambulantu. Odredite najmanji broj potrebnih ambulanti kako bi općina mogla sprovesti svoju odluku. U tablici je prikazano osam sela koja su povezana cestom, a broj 1 označava koja su sela na udaljenosti *manjoj* od 6 km. U kojim će selima biti smještene te ambulante? Riješite problem za slučaj da je jedna ambulanta već smještena u selu E koje ima najviše stanovnika.

$$\begin{array}{c|cccccccc} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \hline A & - & - & - & - & 1 & 1 & - & - \\ B & - & - & 1 & 1 & - & 1 & - & - \\ C & - & 1 & - & - & - & - & - & 1 \\ D & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\ E & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 \\ F & 1 & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - \\ G & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - \\ H & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & - \end{array}$$

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

Dolan, Stan. 2013. *Use of Maths for AQA: Decision Maths*. Oxford University Press. Oxford.

Vollmar, Pamela; Kemp, Edward and others. 2008. *Mathematics for the international student, Pre+Diploma SL and HL (MYP 5 Plus) – Second edition.* Haese&Harris publications. Adelaide, Australia.

9.3. Problem povezivanja

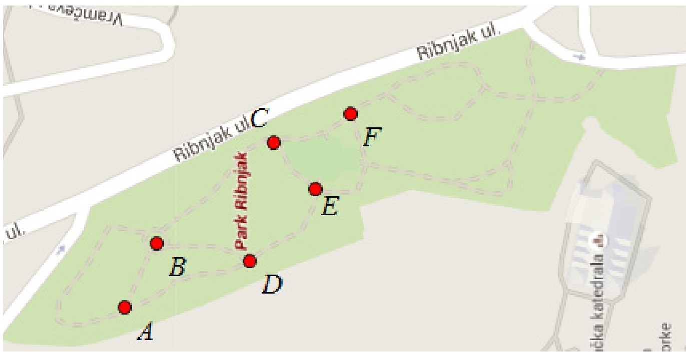
Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti rješavati probleme povezivanja ili umrežavanja koristeći algoritme teorije grafova.

U čemu je problem?

Gradske vlasti odlučile su u parku Ribnjak postaviti pet novih fontana s pitkom vodom na lokacijama označenima s A, B, C, D, E. Fontane treba povezati s postojećom vodovodnom mrežom koja završava na lokaciji označenoj s F (ne nužno direktno). Koliko najmanje metara cijevi treba za povezivanje fontana s postojećom vodovodnom mrežom? U tablici su udaljenosti (u metrima) između lokacija na kojima će biti fontane.

lokacije	udaljenost
A,B	50
A,D	99
B,D	72
B,C	110
D,E	80
C,E	48
C,F	56
E,F	65



Kako to izgleda?

Nacrtajte graf u kojemu su fontane i postojeća mreža vrhovi, a težine bridova udaljenosti između danih lokacija. Koji ća dio grafa dati najbolje rješenje problema?

Podsjetnik: Razapinjuće stablo jednostavan je graf bez ciklusa koji povezuju sve vrhove.

Možete li pretpostaviti?

Nacrtajte nekoliko različitih mreža vodovodnih cijevi, odnosno razapinjućih stabala za nacrtani graf. Koje stablo ima minimalnu duljinu? Koliko bridova ima razapinjuće stablo?

Kako bi to riješila teorija?

Mreže računala, telefonske i internetske mreže mogu biti vrlo složene, pa je teško odrediti koje razapinjuće stablo u njihovu grafu ima minimalnu težinu. Zato postoje algoritmi pomoću kojih se može odrediti minimalno razapinjuće stablo. Mi ćemo koristiti Kruskalov algoritam, Primov algoritam i algoritam najbližeg susjeda.

Kruskalov algoritam:

1. Ispišite sve bridove u rastućem poretku s obzirom na njihovu težinu.
2. Izaberite brid s najmanjom težinom koji ne formira ciklus s prethodno odabranim bridovima.
3. Ponavljajte 2. korak dok niste odabrali svih $n - 1$ bridova.

Primov algoritam:

1. Krenite iz bilo kojeg vrha O.
2. Dodajte stablu brid AO gdje je vrh A onaj koji je najbliži vrhu O. Označite vrh A.
3. Od preostalih bridova odaberite najkraći brid koji spaja jedan od prethodno označenih vrhova s jednim neoznačenim.
4. Ponavljajte postupak dok niste označili sve vrhove i dobili svih $n - 1$ bridova.

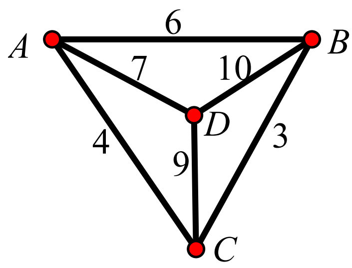
Algoritam najbližeg susjeda

1. Pronađite najduži brid koji se može ukloniti bez prekidanja grafa.
2. Uklonite taj brid.
3. Ponavljajte 1. i 2. korak sve dok uklanjanjem sljedećeg brida ne uzrokujete prekid grafa.
4. Zbrojite duljine svih bridova spojenih u razapinjuće stablo minimalne duljine.

Zadatak.

Riješite početni primjer radeći u trima grupama. Prva će grupa riješiti postavljeni problem koristeći Kruskalov algoritam, druga grupa koristeći Primov algoritam, a treća koristeći algoritam najbližeg susjeda. Pogledajte kako se koriste opisani algoritmi na sljedećem primjeru:

Primjer.

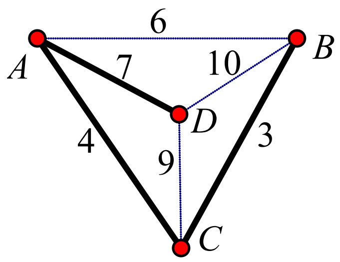


Odredimo minimalno razapinjuće stablo za nacrtani graf koristeći sva tri algoritma.

Kruskalov:

Težine bridova poredane od najmanje do najveće:

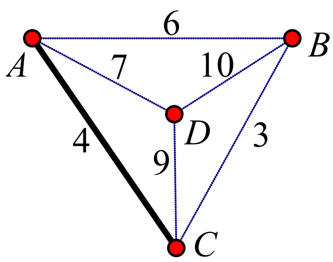
Brid	*BC*	*AC*	*AB*	*AD*	*CD*	*BD*
težina	3	4	6	7	9	10
redoslijed	1.	2.	-	3.	-	-

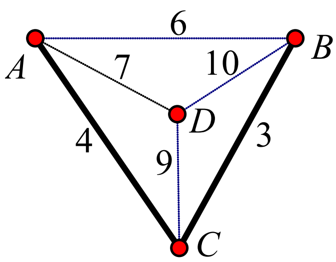


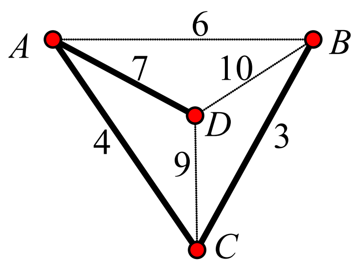
Bridovi *AB, CD* i *BD* nisu odabrani jer bi u tom slučaju formirali ciklus.

Primov:

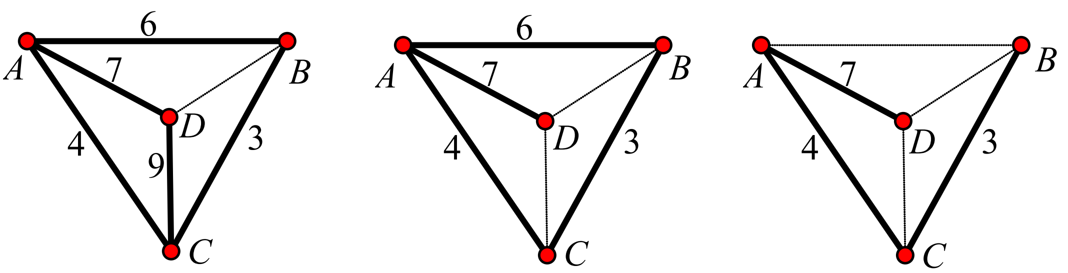
Vrhove ćemo označavati tako da ih podcrtamo. Neka je početak razapinjućeg stabla u vrhu *A*. Njemu dodajemo najbliži vrh *C*, odnosno brid *AC*. Sada postupak nastavljamo odabirom brida *BC* jer je kraći od brida *AB*. Označimo vrh *B*. Jedini je neoznačeni vrh *D*. Najkraći brid koji ga povezuje s jednim od označenih vrhova je brid *AD*. Označimo vrh *D*. Time smo označili sve vrhove.





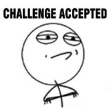


Algoritam najbližeg susjeda:



Brid AD ne možemo ukloniti u zadnjem koraku jer bismo time prekinuli graf i izolirali vrh D.

Koje su prednosti, a koji nedostaci opisanih algoritama?



Možemo li više?

Primov algoritam korisno je preformulirati za matricu susjedstva jer se u tom slučaju algoritam može jednostavnije isprogramirati za rješavanje stvarnog problema pomoću računala.

Primov algoritam za matrice:

1. Odaberite početni vrh stabla S.
2. Zaokružite u prvom redu odabrani vrh.
3. Prekrižite red u kojem se nalazi taj vrh.
4. Pronađite najmanju težinu od svih preostalih težina u stupcima zaokruženih vrhova iz prvog reda. Zaokružite tu težinu.(Ako je više istih, odaberite nasumice.)
5. Vrh u čijem je redu zaokružena težina sljedeći je vrh u stablu S.
6. Ponavljajte korake 2, 3, 4 i 5 dok svi vrhovi u prvom redu ne budu zaokruženi.

Kako to izgleda za prethodni primjer:

Nakon koraka 1, 2, 3, 4, 5:

	A	B	C	D
A	-	6	4	7
B	6	-	3	10
C	4	3	-	9
D	7	10	9	-

Ponovljeni koraci 1 do 5:

	A	B	C	D
A	-	6	4	7
B	6	-	3	10
C	4	3	-	9
D	7	10	9	-

Konačno:

	A	B	C	D
A	-	6	4	7
B	6	-	3	10
C	4	3	-	9
D	7	10	9	-

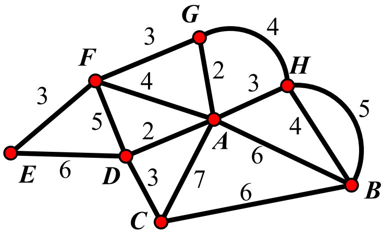
Rješenje: Bridovi određeni retcima i stupcima zaokruženih težina, BC, CA, DA.

Primijenite naučeno.

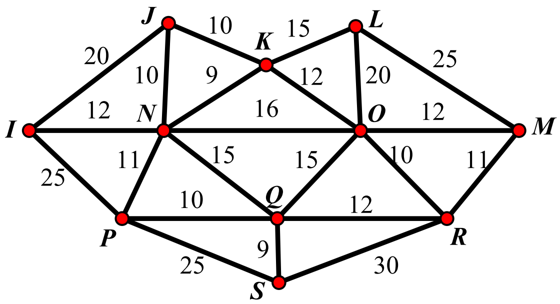
Zadatak 1.

Odredite minimalno razapinjuće stablo za sljedeće grafove:

a.



b.



Zadatak 2.

Na osam lokacija u centru grada označenim s A, B, C, D, E, F, G i H treba postaviti božićnu rasvjetu. Rasvjetu s ovih osam lokacija treba direktno ili indirektno povezati kablovima s električnim vodom koji se nalazi na lokaciji O. Odredite minimalnu duljinu kabla potrebnog za postavljanje rasvjete. Udaljenosti (u metrima) između pojedinih lokacija dane su tablicom:

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**O**
A	-	120	55	90	75	30	50	100	40
B	120	-	50	80	35	20	30	80	65
C	55	50	-	25	70	60	80	95	35
D	90	80	25	-	50	40	35	85	20
E	75	35	70	50	-	40	80	90	30
F	30	20	60	40	40	-	40	75	25
G	50	30	80	35	80	40	-	60	100
H	100	80	95	85	90	75	60	-	160
O	40	65	35	20	30	25	100	160	-

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

https://www.google.hr/maps/dir/ (24.7.2016.)

Dolan, Stan. 2013. *Use of Maths for AQA: Decision Maths*. Oxford University Press. Oxford.

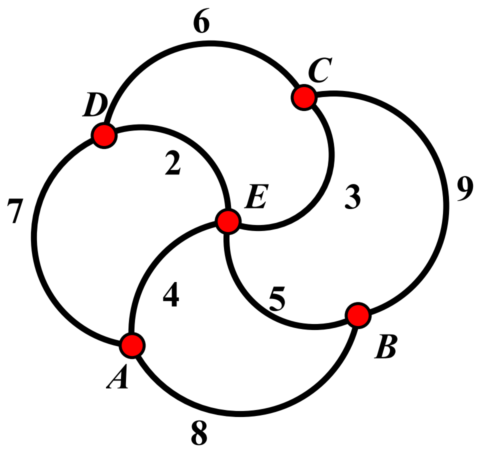
9.4. Problem kineskog poštara

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti tražiti najkraću ili najefikasniju rutu koja će proći svim cestama nekog područja.

U čemu je problem?

U grad dolazi važan vladin službenik. Zaštitari lokalnog ureda dobili su zadatak obaviti nadzor svih cesta kojima će proći taj službenik. Njihov ured nalazi se na lokaciji A. Također, dobili su naredbu da se kreću najkraćim mogućim putem kako bi minimizirali troškove. Pomozite zaštitarima odrediti najkraću moguću rutu kojom će obaviti nadzor svih cesta i vratiti se u ured.



Kako to izgleda?

Uzmite olovku u ruke i pokušajte proći svim bridovima grafa u jednom potezu. Jeste li svim bridovima prošli samo jednom?

Možete li pretpostaviti?

Hoće li zadatak imati jedinstveno rješenje?

Kako bi to riješila teorija?

Problem kao ovaj ima poseban naziv: **Problem kineskog poštara**. Naziv je dobio prema kineskom matematičaru Kean Mei-Ko. Problem glasi:

„Poštar mora krenuti iz poštanskog ureda, proći kroz brojne ulice kako bi dostavio poštu i vratio se u poštanski ured. Kako da on to napravi, a da prijeđe minimalnu udaljenost?"

Prisjetite se Eulerova grafa. Povežimo taj pojam s danim primjerom. Naime, poštar mora proći svim bridovima težinskoga grafa, kojem su vrhovi sjecišta cesta. Ako poštar želi proći svakom ulicom samo jednom, tada će taj graf biti Eulerov. Od ranije znamo da je to moguće samo ako je stupanj svakog vrha neparan. Ako ne postoji Eulerov ciklus, tada moramo izabrati kojim ćemo bridovima proći dvaput, a da ta udaljenost bude najmanja moguća. Dakle, treba proći dvaput bridovima između vrhova neparnog stupnja. Je li promatrani graf Eulerov?

Za rješavanje Problema kineskog poštara najčešće se koristi sljedeći algoritam:

1. Ispišite sve vrhove grafa koji su neparnog stupnja.
2. Napišite sve moguće kombinacije parova tih vrhova tako da svaki vrh upotrijebite točno jednom. Primjerice, za vrhove X, Y, Z, W moguće su sljedeće tri kombinacije parova:

   XY i ZW, XZ i YW, XW i YZ.

3. Za svaku kombinaciju parova:
   - odredite najkraću šetnju (najmanje ukupne težine) između vrhova svakog pojedinog para u toj kombinaciji
   - izračunajte zbroj S svih tako dobivenih najmanjih težina.
4. Kombinacija parova za koju je zbroj S najmanji daje bridove kojima se mora proći dvaput. Optimalna ruta ima duljinu S + zbroj težina svih bridova promatranoga grafa.

Primijenite dani algoritam na početni primjer popunjavanjem tablice:

Kombinacija	Najpovoljnija ruta	Minimalna duljina	Zbroj minimalnih duljina
AB CD	$A \to B$ $C \to E \to D$	8 5	13
...	...	...	...

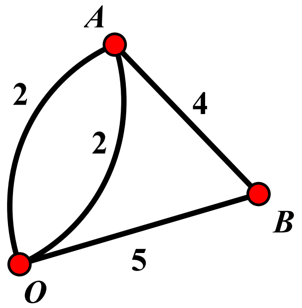
Kojim će cestama zaštitari morati dva puta prolaziti? Koliki je najkraći put koji će zaštitari prijeći? Napišite redoslijed lokacija koje će tada obići.

Primijenite naučeno.

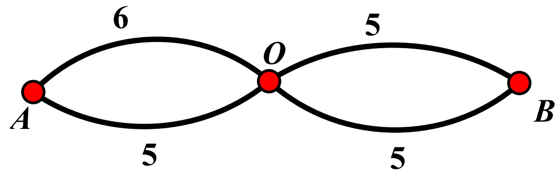
Zadatak 1.

Riješite Problem kineskog poštara za sljedeće grafove, ako je poštarov glavni ured u vrhu O.

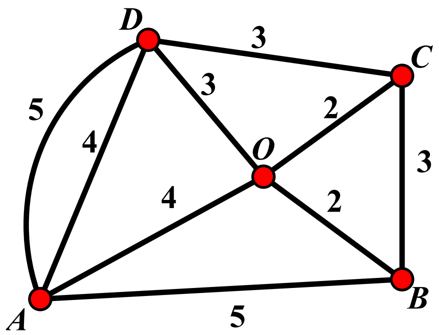
a.



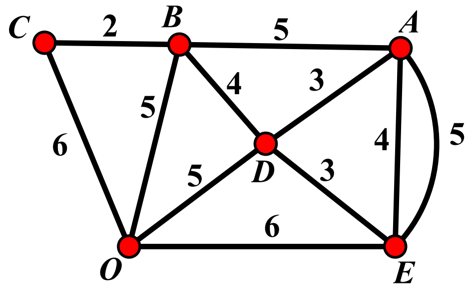
b.



c.

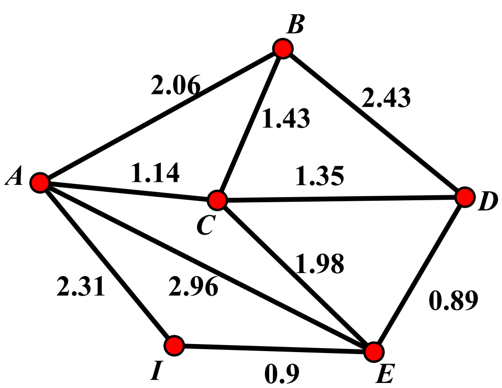


d.



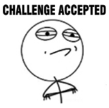
Zadatak 2.

U Planinogradu je pao snijeg. Svaki odjel zimske službe dobiva svoj dio grada koji mora očistiti. Graf prikazuje dio grada koji treba očistiti *Brzi Čistač*. Taj je radnik dobio takav naziv zbog brzine obavljanja svog posla. Tajna njegove brzine jest u tome što uvijek prije polaska isplanira najkraću rutu kojom će očistiti sve svoje ulice. Slovom *I* označeno je njegovo polazište i odredište, a duljina ulica dana je u kilometrima. Pomozite *Brzom Čistaču* isplanirati rutu.



a. Odredite najpovoljniju rutu. Kojim će bridovima morati dva puta proći?

b. Koju će minimalnu udaljenost u kilometrima prijeći?



Možemo li više?

Naći minimalnu udaljenost između vrhova nije uvijek jednostavno. U gornjem primjeru išli smo intuitivno. No, za traženje minimalne udaljenosti između dvaju vrhova njačešće se koristiti *Dijkstrin algoritam* iskazan u sljedećim koracima:

1. Početnom vrhu V pridružite vrijednost 0 te taj vrh trajno uokvirite i označite s 0.
2. Uočite sve neuokvirene vrhove T povezane s vrhom V koji ste upravo uokvirili. Označite ih privremeno brojem koji je jednak zbroju težine brida VT i broja pridruženog vrhu V (ako je ta vrijednost manja od njegove prethodne vrijednosti).
3. Od svih neuokvirenih vrhova izaberite vrh kojemu je pridružena najmanja vrijednost i trajno ga uokvirite. Ako je više takvih vrhova, odaberite nasumice.
4. Ponavljajte korake 2. i 3. sve dok zadnji vrh ne bude uokviren.
5. Vratite se natrag kroz uokvirene vrhove kako biste odredili najkraći put između dvaju promatranih vrhova.

Primijenite dani algoritam u početnom primjeru na vrhove A i C.

Zadatak 3.

U Nacionalnom matematičkom muzeju u New Yorku otvara se nova izložba. Prethodna izložba nije bila dobro posjećena, pa su organizatori odlučili angažirati studente da razdijele reklamne letke. Robert treba pokupiti letke u muzeju, obići sve ulice dijela grada u kojem se nalazi muzej, razdijeliti letke i vratiti se u muzej.

Duljine ulica koje Robert treba obići prikazane su u metrima na sljedećoj slici:

a. Odredite najkraću rutu kojom Robert treba obići sve označene ulice i razdijeliti letke. Muzej je označen točkom O.

b. Odredite najkraći put kojim Robert treba ići da dođe od lokacije N do lokacije D. Koristite Dijkstrin algoritam.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

http://blog.excelmasterseries.com/2014/05/solving-traveling-salesman-problem-with.html (20.6.2016.)

Mathematics for the international student HL (Options), Haese and Harris Publications

9.5. Problem trgovačkog putnika

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti određivati najpovoljniju rutu za obilazak lokacija, gradova i slično.

U čemu je problem?

Marko se nalazi s prijateljima u gradu. Odlučili su posjetiti trgovački centar i igralište. No, kako bi dobio dozvolu za izlazak, Marko je morao usput otići u ljekarnu. Svaki od njih ima ograničeno vrijeme izlaska, pa kako bi im što više vremena ostalo za druženje, odlučili su odrediti put minimalne duljine kako bi obišli sve lokacije u najkraćem vremenu. Željeli bi sve spomenute lokacije posjetiti samo jednom i vratiti se na mjesto polaska.

Sljedeća tablica pokazuju udaljenosti u metrima između spomenutih lokacija:

	Polazište	Trg. centar	Ljekarna	Igralište
Polazište	0	160	180	140
Trg. centar	160	0	330	250
Ljekarna	180	330	0	240
Igralište	140	250	240	0

Možete li pretpostaviti?

Kojim biste vi putem išli?

Napravite model.

Nacrtajte graf čiji su vrhovi zadane lokacije i napišite težinu svakog brida. Pokušajte olovkom proći po grafu tako da zadovoljite postavljene uvjete.

Potražite pomoć tehnologije.

Riješite dani problem koristeći program za izradu proračunskih tablica.

Kako bi to riješila teorija?

Navedeni problem pripada skupu problema koji se jednim imenom nazivaju **Problem trgovačkog putnika**. Taj problem glasi: „Trgovački putnik kreće iz svog prebivališta, obilazi sva mjesta u okolici te se vraća kući. Na koji će način obići sva susjedna mjesta, a da put koji prijeđe bude minimalne duljine?“

U klasičnoj verziji postoji zahtjev da putnik obiđe svako mjesto točno jednom, dok se u praktičnoj verziji taj uvjet izostavlja. Koristeći terminologiju teorije grafova, zapravo tražimo postoji li Hamiltonov ciklus u danom grafu, odnosno može li se putujući bridovima obići sve vrhove grafa i doći do početnog vrha.

Rješenje možemo dobiti ispisivanjem svih mogućih putova i njihovih duljina. Odredite na taj način rješenje početnog primjera.

Riješite zadatak koristeći *Algoritam najbližeg susjeda (za pronalaženje Hamiltonova ciklusa)*:

1. Izaberite bilo koji vrh za početni (u našem slučaju krećemo iz polazišta).
2. Pronađite najkraći brid koji izlazi iz tog vrha i nije već ranije odabran. Dodajte taj brid i pripadajući vrh ciklusu.
3. Ponavljajte korak 2 sve dok svi vrhovi ne budu odabrani.
4. Dodajte brid koji spaja posljednji odabrani vrh s početnim.

Usporedite broj rješenja i opisane načine rješavanja s rješavanjem pomoću proračunskih tablica. Koje su prednosti, a koje mane svih spomenutih postupaka rješavanja?

Pronađite ili pokušajte osmisliti još neki algoritam koji rješava *Problem trgovačkog putnika* te ga primijenite na zadanom primjeru. Usporedite rješenje s prethodnim rješenjima.

Možemo li više?

Problem trgovačkog putnika može biti jako složen. Stoga je ponekad korisno procijeniti rješenje ili odrediti gornju i donju granicu rješenja. Algoritam najbližeg susjeda u većini slučajeva nije najbolje rješenje problema, ali može dobro poslužiti za računanje gornje granice.

Kolika je gornja granica za rješenje početnog primjera?

Donja granica je broj takav da duljine svih Hamiltonovih ciklusa danog problema nisu manje od tog broja. Za donju se granicu koristi minimalno razapinjuće stablo.

Algoritam za određivanje donje granice (ponekad može dati i rješenje):

1. Odaberite bilo koji vrh V.
2. Odaberite dva najkraća brida iz V i odredite njihovu ukupnu duljinu.
3. Iz grafa uklonite vrh V i pripadajuće bridove.
4. Nađite minimalno razapinjuće stablo za preostali graf. Koristite *Primov algoritam*.
5. Odredite ukupnu duljinu toga minimalnog razapinjućeg stabla.
6. Zbroj dobivenih duljina iz 2. i 5. koraka donja je granica rješenja *Problema trgovačkog putnika* za dani graf.

Uočite da donja granica ovisi o uklonjenom vrhu. Nađite donju granicu za rješenje početnog primjera. Što zaključujete?

Zadatak 1.

Ani dolazi prijatelj iz Njemačke kojem želi pokazati Zagreb tako da ga odvede na sljedeće lokacije: Uspinjača (U), Kamenita vrata (KV), Katedrala (K), Trg bana J. Jelačića (T), Zrinjevac (Z), Hrvatsko narodno kazalište (HNK), Muzej iluzija (M). U sljedećoj su tablici dana vremena u minutama koja su potrebna da se dođe pješice od jedne do druge odabrane lokacije. Ana bi željela krenuti s jedne od lokacija, posjetiti sve ostale samo jednom, te se vratiti na početnu lokaciju, u što kraćem vremenu.

	U	KV	K	T	Z	HNK	M
U	0	4	10	7	9	10	8
KV	4	0	6	5	9	13	12
K	10	6	0	4	7	14	15
T	7	5	4	0	6	12	11
Z	9	9	7	6	0	9	15
HNK	8	13	14	12	9	0	10
M	8	12	15	11	15	10	0

a. Prikažite podatke iz tablice grafom.

b. Koristeći algoritam najbližeg susjeda odredite rutu za razgled grada koja počinje u T, a zatim i rutu koja počinje u KV.

c. Odredite donju granicu rješenja odbacivanjem vrha M.

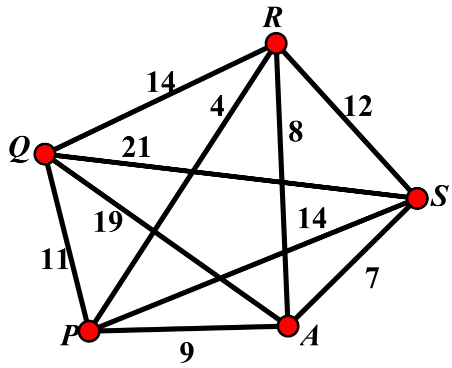
d. Što možete zaključiti, na temelju podataka iz b. i c., o vremenu potrebnom za najpovoljniju rutu?

- Saznajte više o takozvanim NP teškim problemima u koje spada i *Problem trgovačkog putnika*. Potražite algoritme koji se koriste za rješavanje tog problema.

Primijenite naučeno.

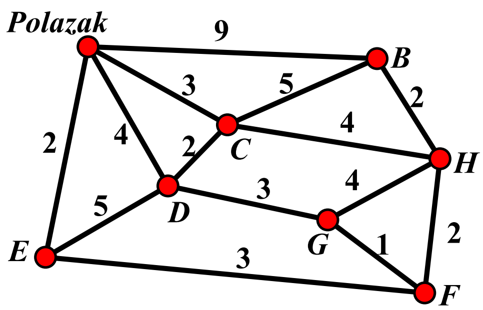
Zadatak 2.

Riješite klasičan *Problem trgovačkog putnika* za nacrtani graf, ako je trgovac u mjestu A.



Zadatak 3.

Maja je našla posao da bi sama zarađivala džeparac. Svaki će dan dostavljati reklamne materijale u poštanske sandučiće. S obzirom na to da će putovati biciklom, traži najkraću rutu. Na grafu su lokacije poštanskih sandučića i Majina kuća te udaljenosti između navedenih lokacija u kilometrima. Odredite najkraći put kojim će Maja obići sve sandučiće i vratiti se kući.



Zadatak 4.

Ivan je trgovački putnik i planira putovanje europskim gradovima. Krenut će iz Zagreba i posjetiti Beč, Lisabon, Bruxelles, Frankfurt i Amsterdam te se vratiti u Zagreb. Tablica prikazuje cijene avionskih karata u eurima za direktne letove između gradova. Ukoliko nema direktnog leta, napisana je 0.

	Bruxelles	Lisabon	Beč	Amsterdam	Frankfurt	Zagreb
Bruxelles	0	80	0	0	0	80
Lisabon	80	0	0	40	50	0
Beč	0	0	0	80	60	30
Amsterdam	0	40	80	0	50	0
Frankfurt	0	50	60	50	0	80
Zagreb	80	0	30	0	80	0

a. Prikažite podatke iz tablice grafom.

b. Odredite rutu kojom će Ivan obići sve gradove samo jednom i vratiti se u Zagreb uz minimalni trošak. Koliko iznosi minimalni trošak?

Kako smo radili i što smo naučili?

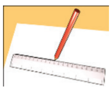
9.6. Problem bojenja

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti na poseban način bojiti karte i grafove. Primijenit ćete bojenje u rješavanju problema rasporeda.

U čemu je problem?

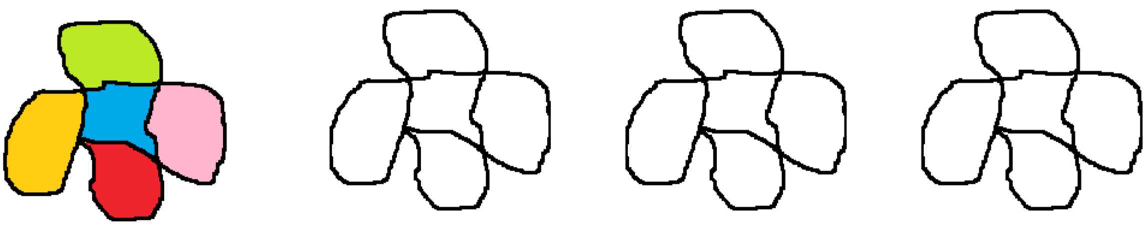
Karta ili neki skup područja dobro je obojen ako bilo koja dva područja koja imaju zajedničku granicu (brid) nisu obojena istom bojom. Pri tome dva područja koja imaju zajedničku samo jednu točku (vrh) mogu biti obojena istom bojom. Koliko nam je boja dovoljno za bojenje proizvoljne karte?



Kako to izgleda?

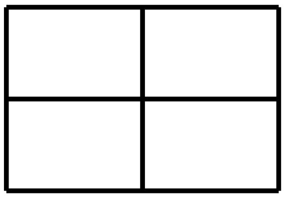
Zadatak 1.

a. Može li se sljedeća karta (od pet područja) obojiti samo dvjema bojama? Trima? Četirima? Pokušajte.

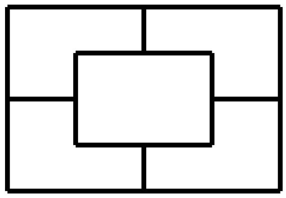


b. Obojite sljedeće karte tako da budu dobro obojene. Koji je najmanji broj boja dovoljan da nacrtana karta bude dobro obojena? Označite taj broj s k i zapišite ga ispod svake karte.

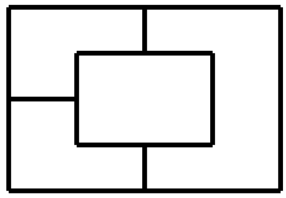
Karta 1.



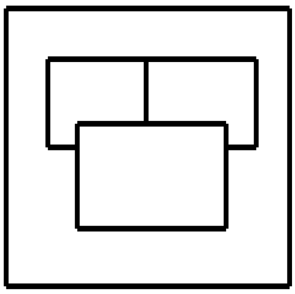
Karta 2.



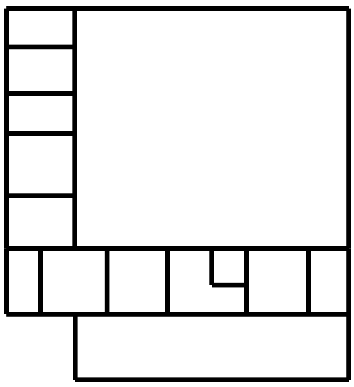
Karta 3.



Karta 4.



Karta 5.



Karta 6.

c. Nacrtajte kartu (Karta 6.) tako da početna točka crtanja bude i završna, te da čitavo vrijeme ne dižete olovku s papira. Liniju možete presijecati i više puta. Koliko je boja dovoljno za bojenje ovakve karte? Zašto?

d. Obojite kartu Južne Amerike koristeći najmanji broj boja za koji će ona biti dobro obojena.

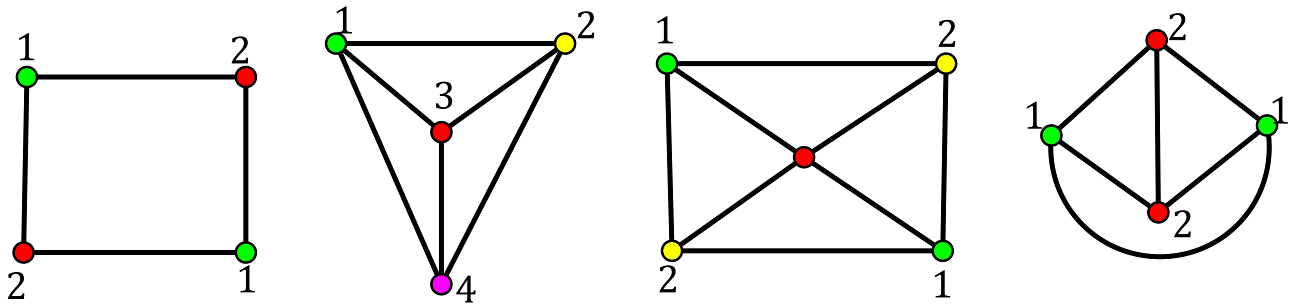
Možete li pretpostaviti?

Možete li pretpostaviti koji je najmanji broj boja potreban za bojenje bilo koje geografske karte u ravnini?

Napravite model.

Zadatak 2.

Promotrite sljedeće grafove:



Usporedite ove grafove s kartama 1, 2, 3 i 4 u zadatku 1. Koji grafovi i karte imaju nešto zajedničko? Što im je zajedničko?

Nacrtajte graf koji će prema uočenom svojstvu biti povezan s kartom 5.

Nacrtajte planarni graf kojim ćete prikazati bojenje karte Južne Amerike iz zadatka 1. d.

Kako bi to riješila teorija?

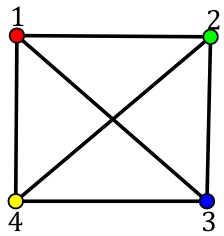
Rješavanje problema bojenja karte svodimo na problem bojenja grafa. Zamišljamo kartu kao planarni graf kojemu vrhove bojimo tako da svaka dva susjedna vrha obojimo različitim bojama. (Napomena: Planarni graf je graf kojemu se bridovi ne sijeku.)

Bojanje grafa G preslikavanje je koje svakom vrhu grafa G pridružuje jednu boju (ili prirodni broj – radi jednostavnosti) tako da susjedni vrhovi budu obojeni različitim bojama. Ako je graf G obojen koristeći k različitih boja, tada se bojenje zove *k-bojanje* grafa G.

Ako graf G ima n vrhova, tada sigurno postoji n bojanje grafa G, ali postavlja se pitanje najmanjega takvog broja.

Kromatski broj najmanji je broj k za koji postoji k-bojanje grafa G. U tom slučaju graf G je k-obojiv, a nije $(k-1)$ obojiv. Kromatski broj označavamo sa $\chi(G)=k$.

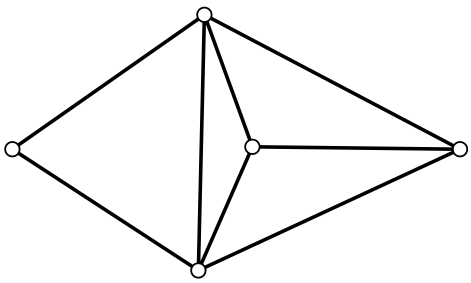
Uočite da je za potpuni graf (svi su njegovi vrhovi međusobno direktno povezani) od n vrhova $\chi(G)=n$. Primjerice za prikazani graf: $\chi(G)=4$



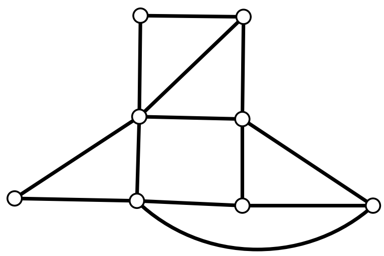
Zadatak 3.

Odredite kromatski broj $\chi(G)$ sljedećih grafova:

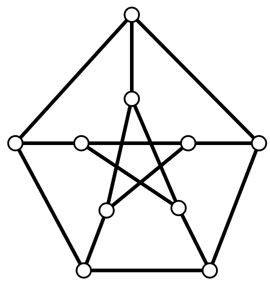
1.



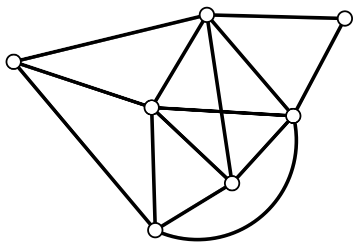
2.



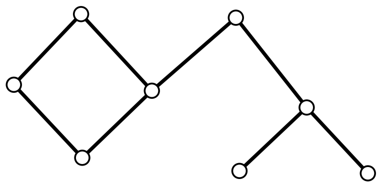
3.

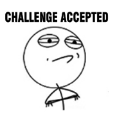


4.



5.





Možemo li više?

a. Dokažite da je prvi graf G (iz zadatka 3) k-obojiv, a da nije $(k-1)$ obojiv, ako je $\chi(G)=k$.

b. Predložite neki algoritam koji bi pomogao u pronalaženju optimalna rješenja, odnosno najmanjeg kromatskog broja.

c. Istražite povijest Teorema o četiri boje.

Primijenite naučeno.

Raspored

U kazalištu se pripremaju za novu kazališnu sezonu u kojoj će na repertoaru biti šest predstava. Posljednji je mjesec trebalo intezivirati probe sa svim glumcima zajedno. Kako neki glumci sudjeluju u više predstava, trebalo je optimalno napraviti raspored održavanja cjelodnevnih proba tako da svi glumci mogu biti na probi za predstave u kojima glume. Koji je minimalni broj radnih dana potreban da se probe održe, a da glumci nemaju preklapanja proba? Pretpostavite da je unutar kazališta više prostorija i da proba za jednu predstavu traje cijeli dan.

Pomozite glumcima i predložite im jedan takav raspored održavanja proba.

U sljedećoj su tablici podatci o predstavama i glumcima koji sudjeluju u više predstava.

Predstava	Glumci koji sudjeluju u više od jedne predstave
P_1	Ana, Eva, Marko
P_2	Eva
P_3	Ana, Marko, Iva
P_4	Marko, Toni, Iva
P_5	Eva, Toni
P_6	Eva

Tulum

Tina je odlučila organizirati tulum iznenađenja svojoj baki i djedu za pedesetu godišnjicu braka. Odlučila je pozvati njima najbliže rođake i prijatelje, ukupno trideset osoba. Dok je razgovarala s nekima od njih, pojavio se problem. Deset osoba izrazilo je međusobno neslaganje s nekima od pozvanih i htjeli bi izbjeći druženje s njima za istim stolom. Kako u dvorani nema mjesta za više od četiri stola, svaki za osam osoba, Tina nije znala može li udovoljiti njihovim željama i smjestiti ih za različite stolove. Hoće li biti dovoljno stolova da se izbjegnu nesuglasice i da oni koji se međusobno ne slažu ne sjede za istim stolom? Može li Tina riješiti problem i kako? Neslaganja su prikazana u tablici.

Rođak ili prijatelj	Izbjegava osobe
A	B, D, H
B	C, F, I
C	B, J
D	B, F, H
E	A, D
F	B, G, H, I
G	E
H	J
I	B,G
J	D, E, H, I

Kako smo radili i što smo naučili?

9.7. Eulerova formula

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete vježbi crtati grafove i otkriti vezu između broja njihovih vrhova, bridova i područja.

U čemu je problem?

Marko proučava položaje većih gradova kontinentalne Hrvatske na karti (sjeverno od Karlovca). Želi pomoću linija spojiti parove tih gradova, ali tako da se linije ne presijecaju te ne prolaze preko granica područja. Zatim želi uspostaviti vezu između broja gradova, linija i područja na koje su te linije podijelile ravninu. Kako može povući takve linije?

Kako to izgleda?

Spojite linijama navedene gradove sukladno prethodno navedenom. Zapišite koliki je broj gradova, linija i područja.

Možete li pretpostaviti?

Uočite postoji li veza između zapisanih brojeva i objasnite kakva je.

Potražite pomoć tehnologije.

U programu dinamične geometrije nacrtajte nekoliko grafova. Pri tome pripazite na uvjete:

1. bridovi se ne sijeku (graf je planarni)
2. iz svakog vrha može se doći u svaki vrh, i to ne samo direktno (graf je povezani)

3. vrhovi se povezuju direktno s najviše jednim bridom i ni jedan vrh nije povezan sam sa sobom (graf je jednostavni).

Popunite tablicu za svaki od grafova koje ste nacrtali i pokušajte povezati brojeve *V*, *B* i *P*.

Graf	Broj vrhova *V*	Broj bridova *B*	Broj područja *P*	Veza?
GRAF 1				
GRAF 2				
GRAF 3				
GRAF 4				

Zapišite formulu koju ste dobili.

Nacrtajte sada nekoliko planarnih grafova koji su potpuni, što znači da su svaka dva vrha direktno spojena bridom. Nacrtajte planarni graf s dva, tri, četiri i pet vrhova.

Što zaključujete? Postoje li potpuni planarni grafovi sa svakim navedenim brojem vrhova?

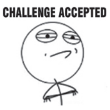
Kako bi to riješila teorija?

Promotrite jedan od grafova koje ste nacrtali. Obrišite jedan brid. Kako su se promijenili broj područja, broj bridova i broj vrhova? Mijenja li se broj $V - B + P$?

Nastavite postupak sve dok ne ostane samo jedno područje.

Čemu je jednak broj $V - B + P$?

Dokažite formulu.



Možemo li više?

Jeste li se već negdje susreli sa sličnom formulom? Ukoliko jeste, što ona povezuje?

Ukoliko niste, istražite pomoću interneta o kojoj je formuli riječ te koja je veza između tih formula. Također, istražite tko je bio Leonhard Euler, matematičar po kojem je ova formula dobila naziv.

Kako smo radili i što smo naučili?

Jeste li na početku aktivnosti mogli pretpostaviti o kojoj je formuli riječ? Na koje ste sve načine dokazivali formulu?

Literatura

http://www.mvep.hr/images/05-o-hrvatskoj/5-5-gradovi-grafika.jpg (preuzeto: 20.02.2016.)

10. Optimizacija

10.1. Uvod u linearno programiranje

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti pomoću tehnologije odrediti minimalnu ili maksimalnu vrijednost koja zadovoljava zadane uvjete.

U čemu je problem?

Mate planira veliku rođendansku zabavu iznenađenja za sestru Linu. Odlučio je naručiti hranu iz restorana *Mala riba*. Od svih mogućih paketa koje za takve prigode restoran nudi, Mate se odlučio za sljedeća dva:

1. *PartyMix* sadrži dvije plate mesa s roštilja, pet porcija salate i jednu pizzu
2. *BigMix* sadrži jednu platu mesa s roštilja, osam porcija salate i šest pizza.

Mate je procijenio da će mu trebati najmanje 12 plata mesa s roštilja, 74 porcije salate i 24 pizze. Odredite najmanji broj paketa koje Mate treba uzeti kako bi zadovoljio procijenjene uvjete.

Kako to izgleda?

Prijatelj Pero predlaže da uzmu 3 *PartyMix* paketa i 5 *BigMix* paketa. Popunite tablicu:

	Paketi	Plate	Salate	Pizze
PartyMix	3	3 · ____	3 · ____	____ · ____
BigMix	5	5 · ____	____ · ____	____ · ____
ukupno	________	________	________	________

Hoće li ova narudžba zadovoljiti procijenjene uvjete?

Možete li pretpostaviti?

Kako biste vi izvršili narudžbu? Kojih paketa treba uzeti više? Zašto?

Napravite model.

Označite broj *PartyMix* paketa s x, a broj *BigMix* paketa s y. S obzirom na to da se radi o broju paketa, kakvi ti brojevi moraju biti? Zapišite podatke i uvjete zadatka pomoću matematičkih oznaka.

Potražite pomoć tehnologije.

Nacrtajte u programu dinamične geometrije područje koje zadovoljava postavljene uvjete. Uzmite proizvoljnu točku unutar dobivena područja i izmjerite njene koordinate. Što zapravo njene koordinate predstavljaju? Odredite najpovoljniji položaj te točke.

Kako bi to riješila teorija?

Neka je x broj paketa *PartyMix* te y broj paketa *BigMix*. S a označite ukupan broj paketa. Napravite klizač za a. Izrazite y pomoću x i a te nacrtajte pravac kojem pripada ta jednadžba. Pomicanjem klizača odredite najbolji položaj pravca s obzirom na označeno područje, a zatim i najmanji broj paketa. Uočite gdje u označenu području ima smisla tražiti minimalnu vrijednost.

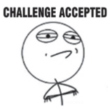
Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Učenici jedne škole odlučili su skupiti novac za napuštene životinje prodajom majica i privjesaka s likom neke životinje. Majice će ih stajati 20 kn po komadu, a privjesci 5 kn po komadu. Na majicama planiraju zaraditi 20 kuna, a na privjescima 8 kuna po komadu. Odlučili su uložiti minimalno 450 kuna, a s obzirom na iskustvo od prošle godine, moraju naručiti barem 20 privjesaka. Kako se nisu na vrijeme predbilježili za kupnju, dućan u kojem su naručili ne može im dostaviti više od 60 komada željene robe. Koliko bi komada majica, a koliko komada privjesaka učenici trebali naručiti kako bi njihova zarada bila što veća?

Zadatak 2.

Tvornica proizvodi dvije vrste čokoladica: *ČokoLoko* i *Jagodanko*. Čokoladice se pakiraju u kutije, a na kutiji čokoladica *ČokoLoko* tvornica zaradi 40 kn, dok na kutiji drugih zaradi 55 kn. Izrada obiju vrsta čokoladica poprilično je komplicirana, pa da bi se napravila kutija *ČokoLoko* čokoladica potrebno je dva sata rada stroja i pet sati rada radnika, a za izradu kutije *Jagodanko* čokoladica potrebno je šest sati rada stroja i četiri sata rada radnika. Za proizvodnju navedenih vrsta čokoladica tvornica može dnevno potrošiti 150 sati rada strojeva i 160 sati rada radnika. Koliko bi kutija pojedine vrste čokoladica trebalo dnevno proizvoditi kako bi zarada bila najveća moguća poštujući dane uvjete?



Možemo li više?

Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije $f(x, y) = 6x + 3y - 3$ na skupu određenom nejednadžbama $x - 2y + 9 > 0$ i $2x + y + 3 > 0$.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura:

Antončić, N.; Špalj, E.; Volenec, V. 2008. *Matematika 3, udžbenik za 3. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije*. Školska knjiga. Zagreb.

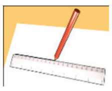
10.2. Maksimalna površina

Što ćemo raditi?

U ovoj aktivnosti naučit ćete kako odrediti duljine stranica zadanog područja da bi njegova površina bila maksimalna.

U čemu je problem?

Zamislite zemljište koji se nalazi uz jedan zid kuće. Želite ga ograditi s preostalih triju strana i za to imate na raspolaganju 170 m žice. Pokušajte ga ograditi tako da ograđena površina bude u obliku pravokutnika, i to najveća moguća. Odredite dimenzije ograde uz koju je ograđena površina najveća.



Kako to izgleda?

Nacrtajte skicu zadanog zadatka i označite traženo područje.

Možete li pretpostaviti?

Možete li pretpostaviti kolike moraju biti duljine stranica traženog pravokutnika da bi površina ograđenog zemljišta bila najveća?

Napravite model.

Na dobiveni komad stiropora trakom i pribadačama pokušajte formirati traženu ogradu. Na raspolaganju imate 17 cm trake i 4 pribadače. Milimetarskim papirom izmjerite duljine stranica i odredite površinu. Svoje rezultate zapisujte u sljedeću tablicu:

Širina	Duljina	Površina

Kolika je najveća površina koju ste dobili? Što mislite, je li to i najveća moguća površina?

Potražite pomoć tehnologije.

U programu dinamične geometrije napravite sljedeće:

- Klizač a čija je maksimalna vrijednost 17 cm. On označava širinu zemljišta oblika pravokutnika.

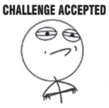
  Radi lakše konstrukcije, uzet ćemo u obzir da na raspolaganju imate 17 cm žice što zapravo predstavlja opseg ograde, odnosno $2a+b=17$ cm. Tada vrijednost drugog parametra računamo kao $b=17-2a$.

  Napomena: Pripazite na ograničenja. Budući da su a i b parametri koji označavaju duljine stranica, oni moraju biti isključivo pozitivni brojevi. Kako je $b=17-2a$, mora vrijediti da je $17-2a>0$, odnosno $a<\frac{17}{2}$.
- Mijenjajte vrijednost parametra a. Zapišite u tablicu nekoliko dobivenih vrijednosti za parametre a i b.
- Računajte površinu pravokutnika sa stranicama a i b. Za koje je vrijednosti parametra a površina najveća?

Kako bi to riješila teorija?

S obzirom na to da b možemo zapisati kao $17-2a$, zapišite kako bismo izračunali površinu pravokutnika. Što time dobivate?

Za koji a površina pravokutnika bit će najveća? Koliko iznosi najveća površina?



Možemo li više?

Marko je žicom koja mu je na raspolaganju ogradio najveću moguću površinu od 162 m^2 istog oblika kao u gornjem zadatku. Koliko je žice imao Marko?

Primijenite naučeno.

Zamislite veliko zemljište oblika pravokutnika te da na raspolaganju imate 1200 m žice kojom ga želite ograditi i to na način da ga podijelite na dva pravokutnika jednakih površina. Na koji način to možete učiniti ako želite da površina ograđenog zemljišta bude najveća moguća?

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

http://www.purplemath.com/modules/quadprob3.htm (Pristupljeno: 22. 02. 2016.)

10.3. Minimalna cijena

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti pomoću tehnologije odrediti položaj željezničke postaje tako da cijena prijevoza uz zadane uvjete bude minimalna.

U čemu je problem?

Tvornica se nalazi na udaljenosti 7 km od željezničke pruge, a na toj je pruzi željeznička stanica na udaljenosti 20 km od tvornice. Cijena prijevoza robe prugom iznosi 2 kune po kilometru, a cijena prijevoza cestom 5 kuna po kilometru. Na kojem mjestu na pruzi treba izgraditi novu postaju i od te postaje cestu do tvornice, tako da prijevoz robe od stanice preko nove postaje prugom i dalje cestom do tvornice bude najekonomičniji?

Kako to izgleda?

Nacrtajte skicu koja prikazuje tvornicu, prugu i željezničku stanicu iz navedenog problema. Označite mjesto na pruzi koje je najbliže tvornici.

Možete li pretpostaviti?

Procijenite gdje bi trebalo izgraditi novu postaju. Hoće li ona biti bliže stanici ili mjestu na pruzi koje je najbliže tvornici? Zašto?

Napravite model.

Napravite model tvornice i željezničke pruge.

a. Postavite novu postaju na udaljenosti od 1 km od stanice. Mjerite udaljenost nove postaje do tvornice i izračunajte cijenu prijevoza robe.

b. Popunite tablicu

Udaljenost nove postaje od stanice (u km)	1	4	7	10	13	16	18
Udaljenost nove postaje od tvornice (u km)							
Cijena prijevoza robe							

Što možete pretpostaviti, kako se mijenja cijena u ovisnosti o udaljenosti nove postaje od stanice?

Potražite pomoć tehnologije.

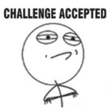
Nacrtajte u programu dinamične geometrije tvornicu, prugu i željezničku stanicu. Postavite na proizvoljno mjesto na pruzi novu postaju. Mjerite udaljenosti nove postaje od stanice i tvornice. Izračunajte cijenu prijevoza.

a. Mijenjajte položaj postaje. Tabelirajte udaljenost od stanice i cijenu prijevoza. Procijenite najpovoljniji položaj.

b. Nacrtajte u koordinatnom sustavu točku (udaljenost, cijena). Mijenjajte položaj nove postaje i pratite kako se mijenja cijena. Odredite najpovoljniji položaj.

Kako bi to riješila teorija?

Označite udaljenost postaje od stanice s d. Izvedite formulu kojom se računa cijena prijevoza c u ovisnosti o udaljenosti d. Nacrtajte graf funkcije c. Odredite s grafa najpovoljniji položaj i minimalnu cijenu.



Možemo li više?

- Jeste li čuli za derivacije? Odredite minimalnu cijenu i najpovoljniji položaj nove postaje koristeći derivacije.
- Pokušajte zadatak riješiti općenito: Tvornica se nalazi na udaljenosti a km od željezničke pruge, a na toj pruzi je željeznička stanica na udaljenosti b km od tvornice. Cijena prijevoza robe prugom iznosi α kn po jedinici udaljenosti, a cijena prijevoza cestom β kn ($\alpha < \beta$). Istražite kako pojedini parametar utječe na oblik grafa i položaj postaje.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura:

Antoliš, S.; Copić, A. 2007. *Matematika 4, udžbenik za 4. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije*. Školska knjiga. Zagreb.

10.4. Maksimalna površina trokuta uz zadani opseg

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti odrediti maksimalnu površinu koristeći geometriju, algebru i analizu.

U čemu je problem?

Marko ima na raspolaganju 100 m ograde. Mora ograditi zemljište u obliku trokuta, a važno mu je da jedan kut tog trokuta bude pravi. Želi ograditi najveću moguću površinu. Kako da rasporedi ogradu?

Kako to izgleda?

Na milimetarskom papiru pomoću končića i pribadača omeđite nekoliko različitih oblika zemljišta. Izmjerite neke veličine pa izračunajte površinu za svaki od oblika. Pokušajte omeđiti što veću površinu. Zapišite izmjerene podatke i pripadne površine.

Možete li pretpostaviti?

Što mislite koji će oblik zemljišta imati najveću površinu?

Napravite model.

Model ćete napraviti u programu dinamične geometrije.

1. Nacrtajte dužinu $\overline{PQ}$ duljine 10 cm. Konstruirajte točku R na dužini $\overline{PQ}$, konstruirajte dužine $\overline{PR}$ i $\overline{RQ}$. Na dužini $\overline{RQ}$ konstruirajte točku S i konstruirajte dužine $\overline{RS}$ i $\overline{SQ}$. Mjerite duljine dužina $\overline{PR}$, $\overline{RS}$ i $\overline{SQ}$ i označite te duljine s c, a i b.
2. Treba konstruirati pravokutni trokut čiji je opseg 10 cm.

a. Konstruirajte trokut čije su stranice c, a i b (počnite sa stranicom $\overline{AB}$ duljine c, konstruirajte kružnicu sa središtem u točki A polumjera b, kružnicu sa središtem u točki B polumjera a, sjecište kružnica označite s D). Mjerite opseg trokuta ABD i kut ADB. Je li opseg trokuta 10 cm? Je li trokut pravokutni? Mijenjajte položaj točke S. Možete li postići da trokut bude pravokutni? Koliko ima položaja u kojem je trokut pravokutni? Promijenite položaj točke R. Što se promijenilo? Možete li za bilo koji položaj točke R mijenjajući položaj točke S postići da trokut bude pravokutni? Gdje se nalaze sve točke D takve da je opseg trokuta ABD 10 cm? Označite točke S i D i konstruirajte lokus. Prepoznajete li krivulju koju ste dobili?

b. Sakrijte kružnice. Želimo odrediti položaj točke E tako da trokut ABE bude pravokutni. Na kojoj se krivulji točka E mora nalaziti? Konstruirajte kružnicu čiji je promjer $\overline{AB}$. Konstruirajte točku E na kružnici. Mjerite opseg trokuta ABE i kut AEB. Je li opseg trokuta 10 cm? Je li trokut pravokutni? Mijenjajte položaj točke D. Možete li postići da opseg trokuta bude 10 cm?

c. Gdje se mora nalaziti vrh C ako želimo da trokut ABC bude pravokutni i da opseg bude 10 cm? Duplicirajte stranicu. Sakrijte točke S, D i E, dužine $\overline{AD}, \overline{AE}, \overline{BD}, \overline{BE}$, unutrašnjost trokuta ABD i ABE i sva mjerenja. Konstruirajte sjecišta lokusa i kružnice i označite jedno od njih s C. Mijenjajte položaj točke R. Zadovoljava li trokut ABC zadane uvjete?

Odredite pravokutni trokut čiji je opseg 10, a površina maksimalna. Zadatak riješite na više načina. Podijelite se u tri grupe.

Radni centar 1: Površina i hipotenuza

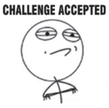
Potražite pomoć tehnologije.

Duplicirajte stranicu. Zanima nas kako površina trokuta ABC ovisi o duljini hipotenuze $\overline{AB}$. Mjerite površinu trokuta P i duljinu hipotenuze c. Mijenjajte položaj točke R i pratite kako se mijenja P u ovisnosti o c. Možete li pogoditi o kojoj se funkciji radi? Nacrtajte točku s koordinatama (c, P). Mijenjajte položaj točke R i pratite kako se mijenja položaj točke (c, P). Možete li sada reći o kojoj se funkciji radi? Označite točku R i točku (c, P) i konstruirajte lokus. Odredite funkciju $P(c)$. Odredite maksimalnu površinu i opišite trokut koji ima maksimalnu površinu.

Kako bi to riješila teorija?

Pravilo pridruživanja funkcije P možemo dobiti i bez tehnologije. Krenite od uvjeta

$a+b+c=10 \Rightarrow a+b=10-c$. Kvadrirajte posljednju jednakost. Izrazite površinu pomoću c.



Možemo li više?

Treba još odrediti domenu funkcije P. Zapišite uvjet pod kojima će postojati vrh C, odnosno pod kojima će se sjeći kružnica i elipsa. Izrazite sve veličine pomoću c. Dokažite da je domena funkcije P segment $\left[10\left(\sqrt{2}-1\right), 5\right]$.

Radni centar 2: Površina i kateta

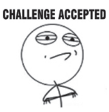
Potražite pomoć tehnologije.

Duplicirajte stranicu. Zanima nas kako površina trokuta ABC ovisi o duljini katete $\overline{BC}$. Mjerite površinu trokuta P i duljinu katete a. Mijenjajte položaj točke R i pratite kako se mijenja P u ovisnosti o a. Možete li pogoditi o kojoj se funkciji radi? Nacrtajte točku s koordinatama (a, P). Mijenjajte položaj točke R i pratite kako se mijenja položaj točke (a, P). Označite točku R i točku (a, P) i konstruirajte lokus. Ponovite postupak za trokut čiji je vrh C u drugom sjecištu kružnice i elipse. Odredite maksimalnu površinu i opišite trokut koji ima maksimalnu površinu.

Kako bi to riješila teorija?

Pravilo pridruživanja funkcije P možemo dobiti i bez tehnologije. Krenite od uvjeta

$a+b+c=10 \Rightarrow c=10-a-b$. Kvadrirajte posljednju jednakost. Izrazite b pomoću a. Izrazite površinu pomoću a.



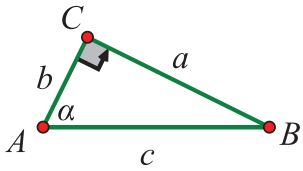
Možemo li više?

Znate li kako se određuju ekstremi pomoću derivacija? Odredite ekstrem funkcije P.

Radni centar 3: Površina i kut

Potražite pomoć tehnologije.

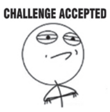
Duplicirajte stranicu. Zanima nas kako površina trokuta ABC ovisi o veličini kuta α. Mjerite površinu trokuta P i veličini kuta α. Mijenjajte položaj točke R i pratite kako se mijenja P u ovisnosti o α. Možete li pogoditi o kojoj se funkciji radi? Nacrtajte točku s koordinatama (α, P). Mijenjajte položaj točke R i pratite kako se mijenja položaj točke (α, P). Označite točku R i točku (α, P) i konstruirajte lokus. Ponovite postupak za trokut čiji je vrh C u drugom sjecištu kružnice i elipse. Odredite maksimalnu površinu i opišite trokut koji ima maksimalnu površinu.



Kako bi to riješila teorija?

Pravilo pridruživanja funkcije P možemo dobiti i bez tehnologije.

Sve stranice izrazite pomoću c i kuta α. Koristeći uvjet $a+b+c=10$ izrazite c pomoću α. Izrazite P pomoću α.



Možemo li više?

Znate li kako se određuju ekstremi pomoću derivacija? Odredite ekstrem funkcije P.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

Antoliš, S.; Copić, A. 2007. *Matematika 4, udžbenik za 4. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije.* Školska knjiga. Zagreb.

Sadržaj