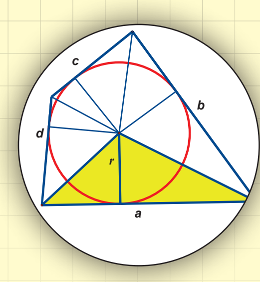
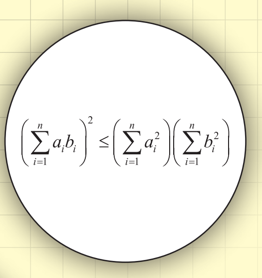
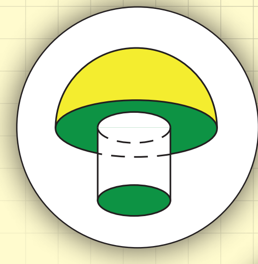
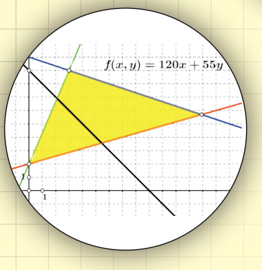
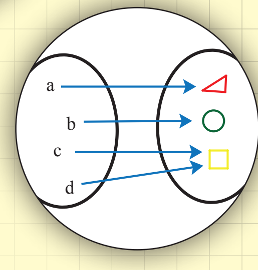



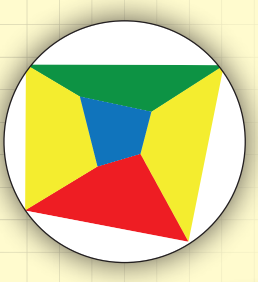
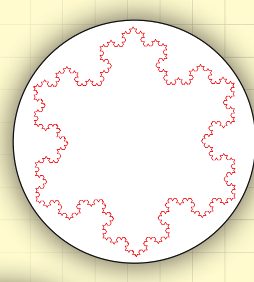
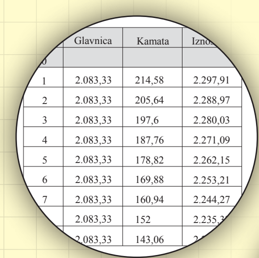
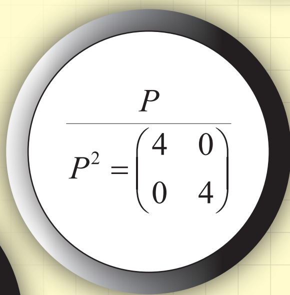



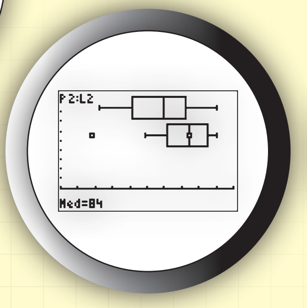
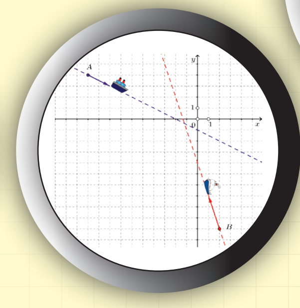


Matrice i vektori

Modeliranje

Statistika i vjerojatnost

3. vježbenica

Sadržaj ove publikacije/emitiranog materijala isključiva je odgovornost XV. gimnazije

Europska unija
Ulaganje u budućnost

STRUKTURNI I INVESTICIJSKI FONDOVI

ESF RAZVOJ LJUDSKIH POTENCIJALA

Projekt je sufinancirala Europska unija iz Europskog socijalnog fonda

5. Matrice i vektori

5.1. Linearna kombinacija vektora

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti istražiti rastavljanje vektora na linearnu kombinaciju dvaju vektora.

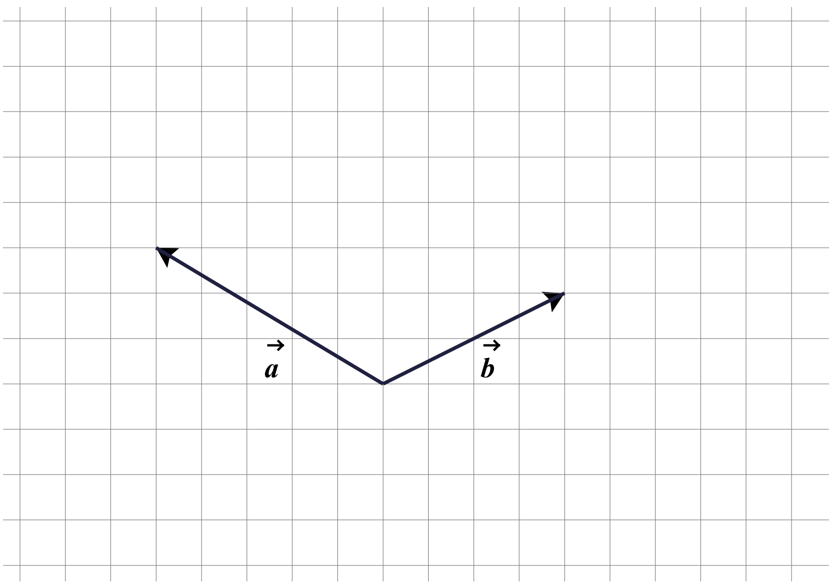
U čemu je problem?

Kako prikazati vektor kao linearnu kombinaciju dvaju proizvoljnih vektora? Možemo li to povezati s nečim poznatim? U kojoj je situaciji najjednostavnije zapisati proizvoljni vektor kao linearnu kombinaciju? Gdje se primjenjuje rastav vektora?

Kako to izgleda?

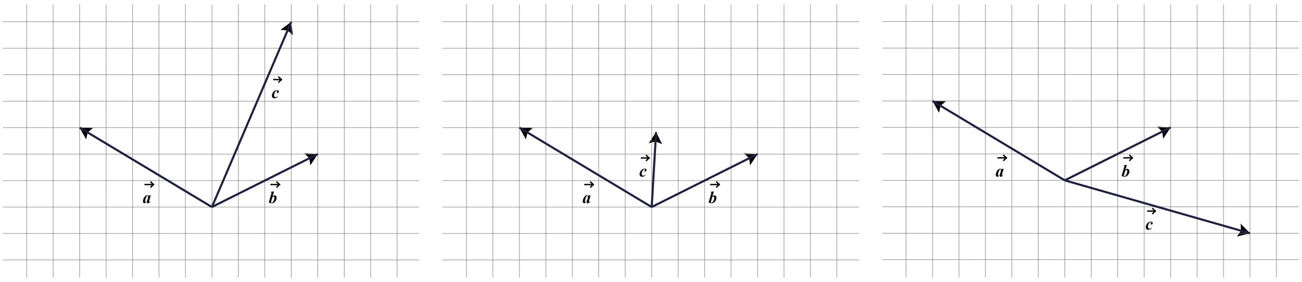
Za zadane vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nacrtajte vektor $\vec{c}$ tako da je:

a. $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$; b. $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$; c. $\vec{c}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.



Možete li pretpostaviti?

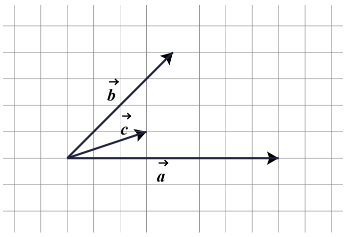
Kako biste zapisali vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$?



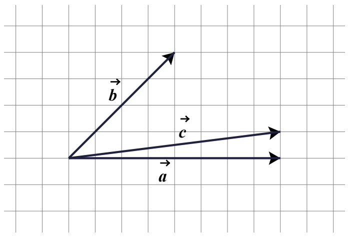
Napravite model.

1. Zapišite vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

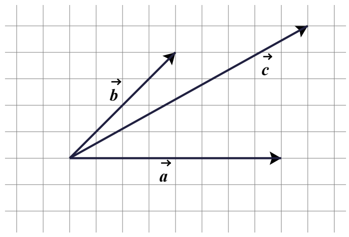
a.



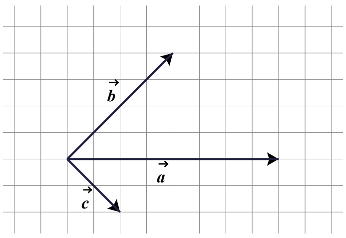
b.



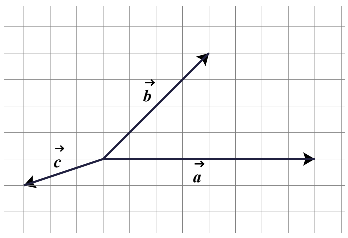
c.



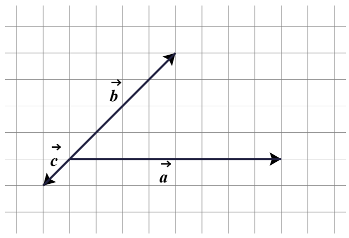
d.



e.

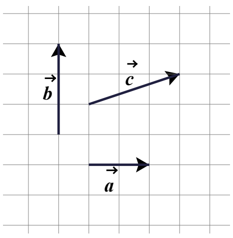


f.

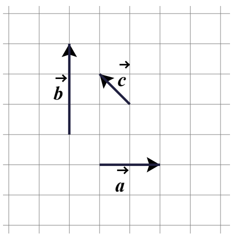


2. Zapišite vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

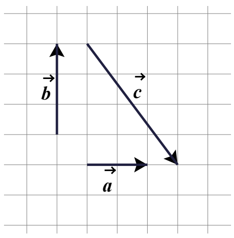
a.



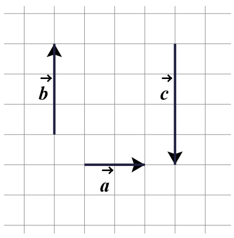
b.



c.



d.



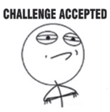
Koji vam je zadatak bio lakši? Zašto? Mogu li se vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ odabrati tako da bude još lakše? Napravite svoj zadatak.

Potražite pomoć tehnologije.

Otvorite datoteku *Linearna kombinacija vektora.gsp* i grafički riješite zadatke.

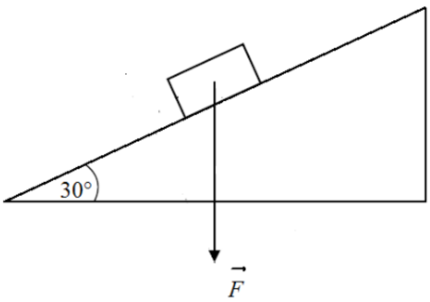
Kako bi to riješila teorija?

Vektore nacrtane u koordinatnim sustavima zapišite pomoću koordinata i zadatke riješite algebarski.



Možemo li više?

Tijelo mase 5 kg nalazi se na kosini pod kutom od 30°. Koliko iznosi sila trenja ako tijelo miruje?



Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

Antončić, N.; Špalj, E.; Volenec, V. 2008. *Matematika 3, udžbenik za 3. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije*. Školska knjiga. Zagreb.

5.2. Vektori – domino

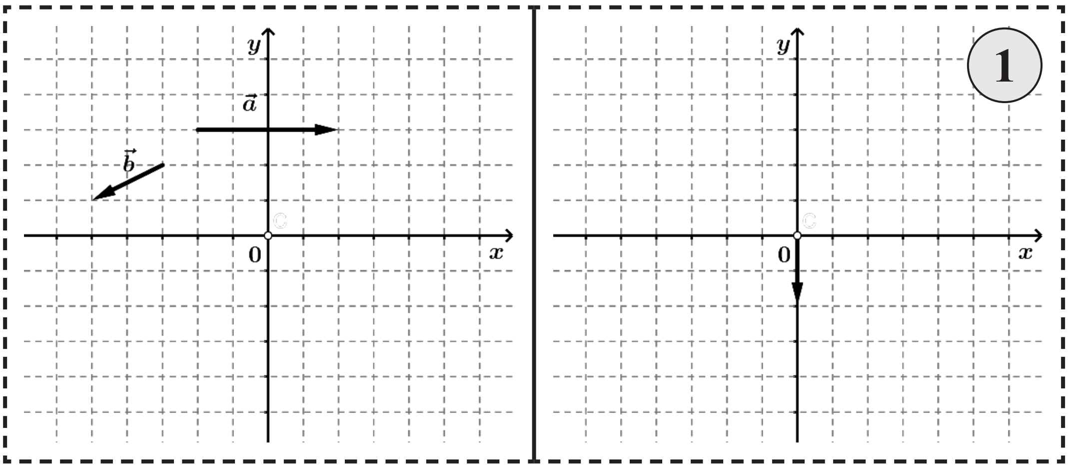
Što ćemo raditi?

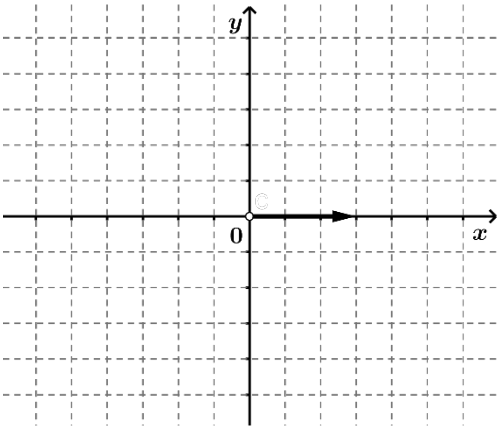
U ovoj ćete aktivnosti ponoviti pojmove vezane uz vektore igrajući domino.

Kako to izgleda?

Podijelite se u četveročlane skupine. Svaka skupina dobiva dvadeset i osam domino pločica. Postavite ih licem prema dolje i izmiješajte ih. Svaki od igrača izvlači četiri pločice. Prvi igrač stavlja jednu pločicu na stol. Sljedeći je na potezu igrač koji je desno od prvog. Ako igrač koji je na potezu ima odgovarajuću pločicu, stavlja ju na stol uz pločicu koja je već na stolu. Ako igrač nema odgovarajuću pločicu, uzima jednu pločicu od preostalih. Ako nema slobodnih pločica, igrač propušta i na potezu je sljedeći igrač. Svi igrači provjeravaju je li odložena ispravna pločica. Pobjednik je igrač koji prvi ostane bez pločica.

Kako smo radili i što smo naučili?





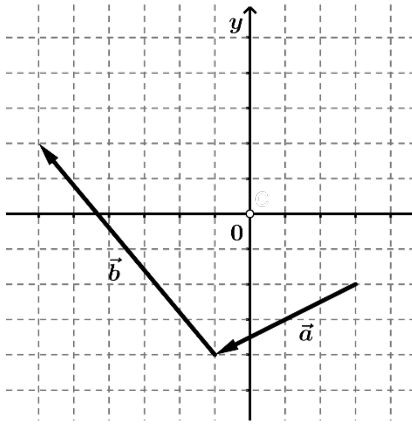
2

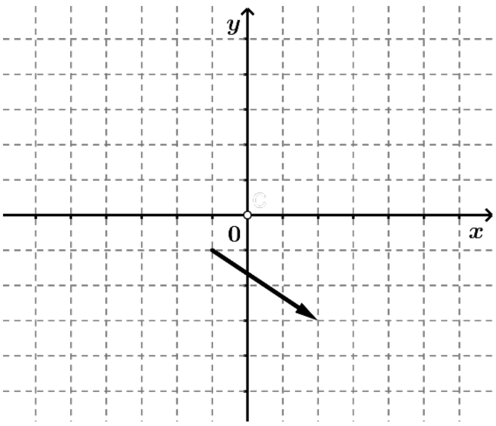
duljina mu je

$\sqrt{2}$

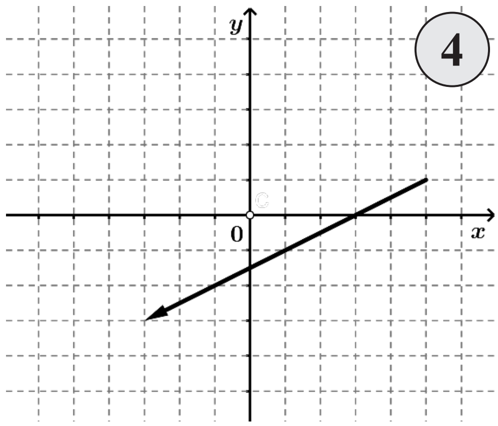
$\overrightarrow{AB} = 6\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$

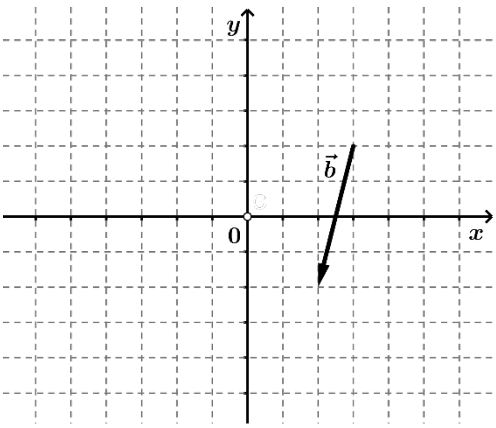
3





4





5

$\vec{a} + \vec{b} = -9\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$

$\vec{a}+\vec{b}=3\,\vec{i}+5\,\vec{j}$

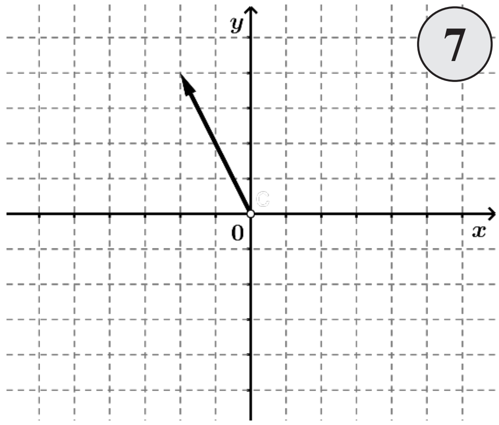
6

okomit na

$-3\,\vec{i}-9\,\vec{j}$

$-7\,\vec{i}+2\,\vec{j}$

7



$-2\,\vec{j}$

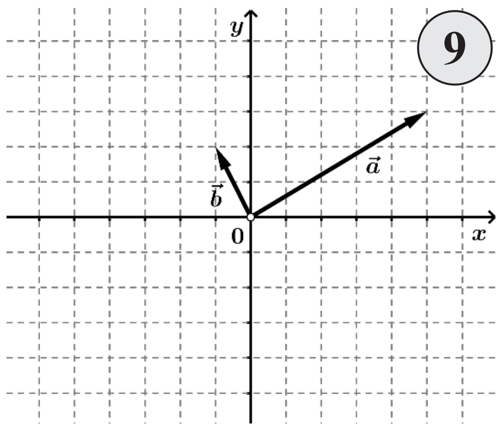
8

$3\,\vec{i}$

kolinearan s

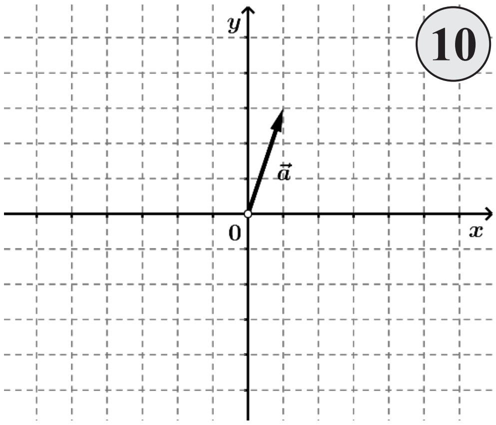
$-\,\vec{i}+2\,\vec{j}$

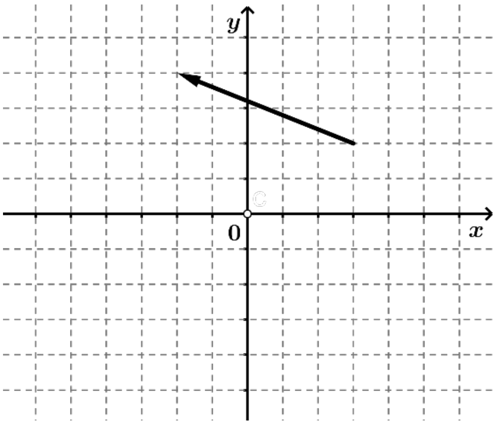
9



$9\vec{i} - 3\vec{j}$

10



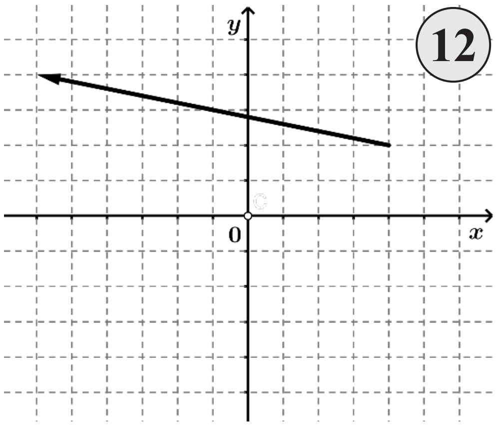


11

$-2\vec{b} = 2\vec{i} + 8\vec{j}$

$-2\vec{a} = 6\vec{i} - 4\vec{j}$

12



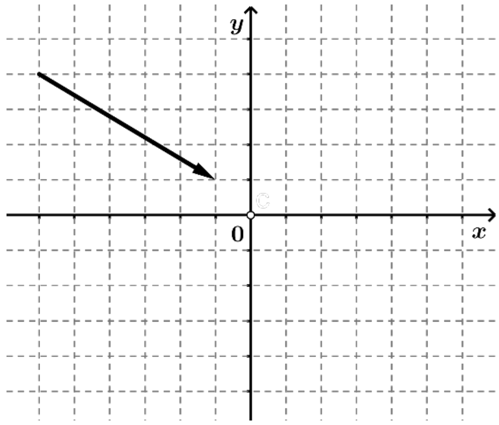
okomit na

$2\vec{i} + 7\vec{j}$

13

duljina mu je

5



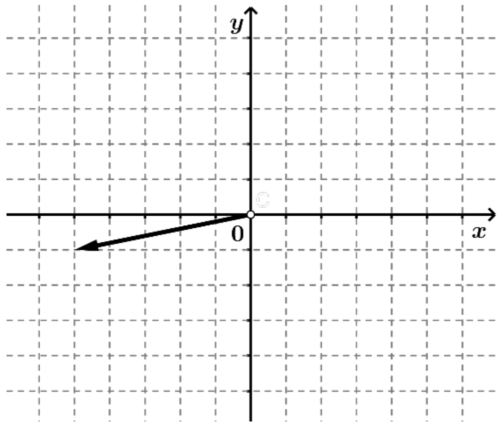
14

$\vec{a}+\vec{b}=-3\vec{i}-2\vec{j}$

$12\vec{i}-5\vec{j}$

15

$-4\vec{i}+2\vec{j}$



16

$A(4,-1)$
$B(2,5)$

suprotni vektor je

$-12\vec{i}+5\vec{j}$

17

$-8\vec{i}-4\vec{j}$

duljina mu je

$\sqrt{26}$

18

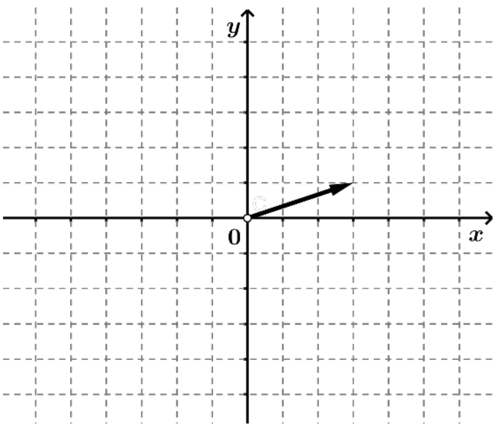
$\vec{a} + \vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$

$\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 8\vec{j}$

$A(1,2)$

19

$2\vec{a} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$

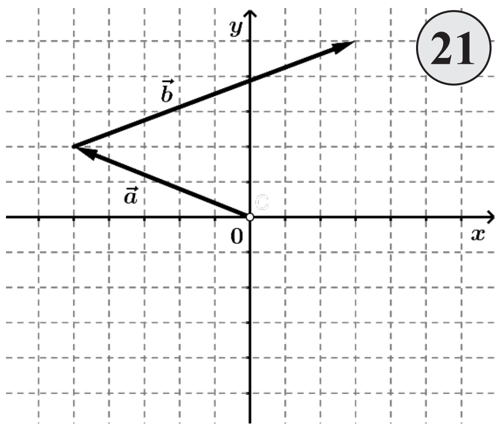


20

$A(-6,3)$

$\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + 6\vec{j}$

21



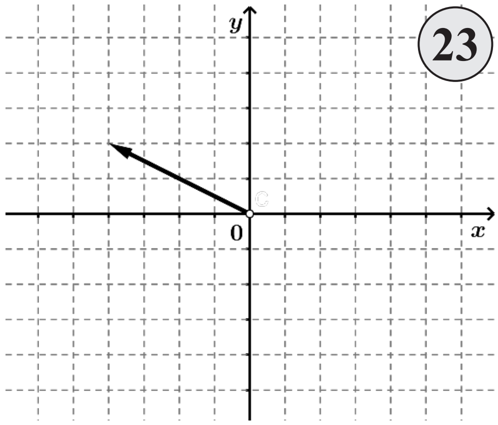
$-3\vec{i}+4\vec{j}$

22

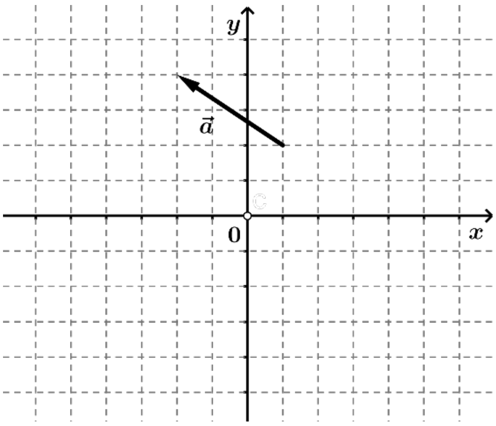
kolinearan s

$1.5\vec{i}-\vec{j}$

$\vec{a}+\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}$



23



24

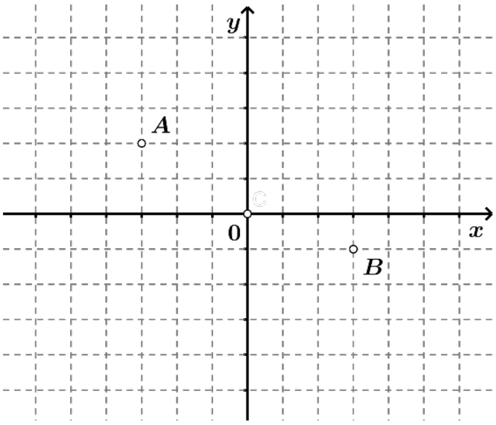
$3\vec{i}+\vec{j}$

$\vec{i}-\vec{j}$

25

okomit na

$-2\vec{i}-10\vec{j}$



26

$B(-2,10)$

$5\vec{i}-3\vec{j}$

27

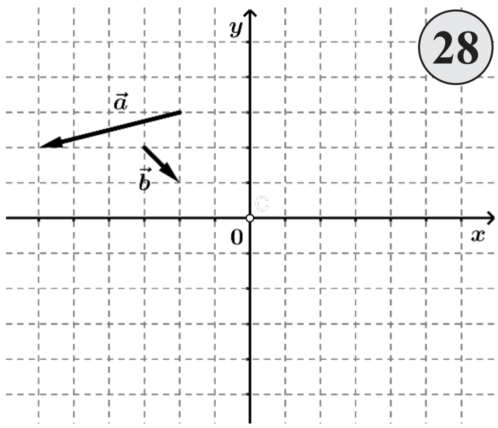
$\overrightarrow{AB}=10\vec{i}-2\vec{j}$

$B(4,1)$

duljina mu je

$\sqrt{29}$

28



5.3. Potencije matrice

Što ćemo raditi?

Za dane matrice odredit ćete njihovu drugu, treću, četvrtu… potenciju, te na temelju toga za proizvoljan prirodan broj n odrediti pravilo za n-tu potenciju. Uočit ćete pravilnost u strukturi danih matrica, odnosno opći zapis njihovih elemenata. Za takav opći zapis matrice odredit ćete njenu n-tu potenciju.

U čemu je problem?

Zadane su tri matrice: $P=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ i $S=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$. Odredite matrice P^n, R^n i S^n.

Kako to izgleda?

Izračunajte P^n, R^n i S^n za $n = 2$ i $n = 3$ i rješenja upišite u tablicu:

P	***R***	***S***
$P^2=\begin{pmatrix}\_ & \_\\ \_ & \_\end{pmatrix}$	$R^2=2\cdot\begin{pmatrix}\_ & \_\\ \_ & \_\end{pmatrix}$	$S^2=2\cdot\begin{pmatrix}\_ & \_\\ \_ & \_\end{pmatrix}$
$P^3=\begin{pmatrix}\_ & \_\\ \_ & \_\end{pmatrix}$	$R^3=4\cdot\begin{pmatrix}\_ & \_\\ \_ & \_\end{pmatrix}$	$S^3=4\cdot\begin{pmatrix}\_ & \_\\ \_ & \_\end{pmatrix}$

Možete li pretpostaviti?

Pretpostavite čemu je jednako P^4, R^4 i S^4.

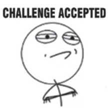
Napravite model.

Za matricu P izračunajte P^n, za $n = 4, 5, 10, 20, 50$.

Riječima opišite pravilnost koju ste uočili i zapišite opće pravilo za P^n.

Potražite pomoć tehnologije.

Koristite kalkulator koji nudi mogućnost izvođenja računske operacije množenja matrica. Izračunajte R^n i S^n za više različitih vrijednosti od n i opišite pravilnost koju ste uočili. Zapišite opće pravilo za R^n i S^n.



Možemo li više?

Promatrajte matrice oblika $T = \begin{pmatrix} k+1 & k-1 \\ k-1 & k+1 \end{pmatrix}$.

Odredite k za matrice P, R i S.

Opišite pravilnost koju uočavate. Generalizirajte pravilo za n-tu potenciju matrice T. Rezultat izrazite pomoću k i n.

Pomoću kalkulatora potvrdite svoju pretpostavku o n-toj potenciji matrice T za odabir različitih vrijednosti parametara k i n. Zapišite rezultate istraživanja u bilježnicu.

Kako bi to riješila teorija?

Jeste li čuli za princip matematičke indukcije? Dokažite tvrdnju o n-toj potenciji matrice T matematičkom indukcijom.

Kako smo radili i što smo naučili?

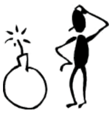
Literatura

Internal Assessment portfolio tasks published by the IB

5.4. Sustavi linearnih jednadžbi

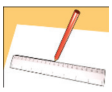
Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti rješavati sustave jednadžbe koristeći znanje o matricama.



U čemu je problem?

Marko je kupio šest lizalica i osam čokoladica koje je platio 36 kn, a Marija je pet istih takvih lizalica i sedam čokoladica platila 31 kunu. Kolika je cijena jedne lizalice, a kolika je cijena jedne čokoladice?



Kako to izgleda?

Zapišite tekst zadatka koristeći sustav jednadžbi. Riješite sustav jednom od dosad naučenih metoda.

Možete li pretpostaviti?

Koje ste metode rješavanja sustava jednadžbi do sada upoznali? Možete li pretpostaviti kako se sustavi jednadžbi mogu povezati s matricama?

Napravite model.

Osim na standardan način, sustave jednadžbi možemo zapisati pomoću matrica i to matričnom jednadžbom

$$AX = B,$$

gdje je A matrica sustava, X jednostupčana matrica koja sadrži nepoznanice, a B jednostupčana matrica koja sadrži slobodne članove. Na primjer, za sustav

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$$

imamo $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ te $B=\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix}$.

Zapišite sustav iz početnog primjera u matričnom obliku.

Potražite pomoć tehnologije.

Iz zapisa $AX=B$ izrazite matricu X. U grafički kalkulator unesite matrice A i B koje odgovaraju uvodnom primjeru koristeći izbornik MATRIX ($\boxed{\text{2ND}}$ x^{-1}) i izračunajte X.

Kako bi to riješila teorija?

Opet promotrite matrice A i B koje odgovaraju početnom primjeru. Iz zapisa $AX=B$, dobivate da je $X=A^{-1}B$. Matricu A^{-1} nazivamo inverzna matrica matrice A. U tom slučaju mora vrijediti:

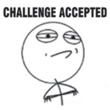
$$AA^{-1}=A^{-1}A=I\,.$$

a. Dokažite da je matrica $\begin{bmatrix}3.5 & -4\\ -2.5 & 3\end{bmatrix}$ inverz matrice $A=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 5 & 7\end{bmatrix}$.

b. Iz matrice A^{-1} izlučite $\frac{1}{2}$ te je usporedite s matricom A. Izračunajte determinantu matrice A. Što uočavate?

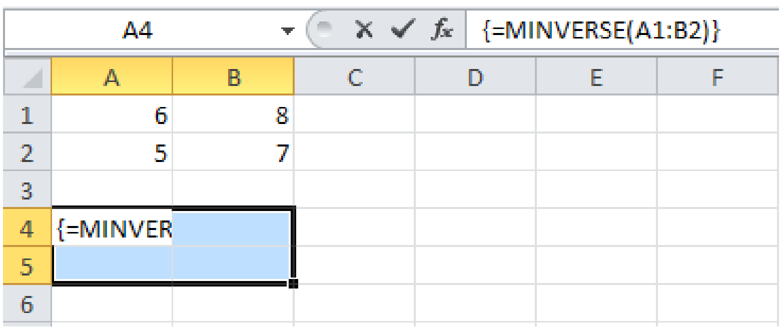
c. Dokažite analognu tvrdnju za matricu 2×2 zapisanu u općenitom obliku:

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}.$$



Možemo li više?

- Iskoristite proračunske tablice. U proračunsku tablicu zapišite matricu A. Iskoristite funkciju MINVERSE kako biste izračunali inverz matrice A kao što prikazuje slika:



Označite polja kao na slici (2 × 2) i upišite =MINVERSE i odaberite elemente početne matrice. Za njeno korištenje nije dovoljno pritisnuti ENTER, već se istovremeno moraju pritisnuti CTRL, SHIFT i ENTER. Tada će proračunska tablica automatski dodati vitičaste zagrade na početak i kraj formule, što znači da je to funkcija polja. Ako se te zagrade napišu ručno, formula neće funkcionirati kako treba.

Zatim, unesite matricu B i iskoristite funkciju MMULT za množenje matrica A^{-1} i B. Opet je funkcija MMULT funkcija polja pa je potrebno postupiti kao i s prethodnom funkcijom (istovremeno pritisnuti CTRL, SHIFT i ENTER). Pri množenju matrica i odabiru broja polja za rezultat treba voditi brigu o pravilu množenja matrica (npr. množenjem matrica reda 2 × 1 i 1 × 3, dobivamo matricu reda 2 × 3).

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Tvornica *Fino* proizvodi tri vrste pralina. Za njihovu proizvodnju koristi mliječnu, bijelu i tamnu čokoladu. Tablica prikazuje količinu pojedine vrste čokolade, izraženu u stotinama grama, potrebnu za izradu 1 kilograma određenih pralina.

	Okruglići	*Trokutići*	*Kvadrići*
Mliječna	5	2	6
Bijela	3	4	1
Tamna	2	4	3

Tvornica uvozi čokoladu za izradu iz Švicarske. Ako trošak izrade kilograma pralina *Okruglići* iznosi 12.50 €, pralina *Trokutići* 12.40 €, te pralina *Kvadrići* 11.70 €, odredite koliko tvornica plaća po kilogramu određenu vrstu čokolade.

Zatim, nađite koliko će novca potrošiti za kilogram nove vrste pralina koje sadrže 400 grama mliječne čokolade, 200 grama bijele čokolade i 400 grama tamne čokolade.

Zadatak riješite koristeći matrice i tehnologiju.

Zadatak 2.

Tvrtka *Radno* zaposlila je 150 novih radnika: čistače, računalne tehničare i programere. Tvrtka ima tri pogona: *Istok*, *Zapad* i *Jug*. U pogonu *Istok* radit će 20 % novih čistača, 40 % računalnih tehničara i 30 % programera, što je ukupno 46 radnika. U pogonu *Zapad* radit će 40 % novih čistača, 20 % računalnih tehničara i 50 % programera, što je ukupno 54 programera. Ostali novi radnici ići će u pogon *Jug*. Odredite koliko je radnika iz pojedinih zanimanja tvrtka zaposlila.

Zadatak 3.

Marica i Slavko su pokrenuli svoj posao 2007. godine. Godine 2010. ostvarili su profit od 160 000 €, 2011. godine 198 000 €, dok su 2012. zaradili 240 000 €. Na temelju tih podataka zaključili su da se njihova godišnja zarada, izražena u eurima, može izračunati po formuli

$$f(t) = at + b + \frac{c}{t+4},$$

gdje je t broj godina nakon 2010. godine (npr. za 2010. je $t = 0$).

a. Odredite vrijednosti parametara a, b i c tako da odgovaraju danim podatcima.

b. Ako su 2009. godine zaradili 130 000 eura, odgovarala li ta vrijednost modelu iz a.?

c. Ako njihova zarada nastavi rasti prema promatranom modelu, koliko će zaraditi 2020. godine?

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura:

Bruce, Haese, Haese, Owen. 2004. *Mathematics for the international student*, *Mathematics SL*. Haese&HarrisPublications.

5.5. Preslikavanja ravnine i matrice

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti povezati preslikavanja ravnine i matrice.

U čemu je problem?

Koja preslikavanja ravnine poznajete? Preslikavanja ravnine promatrat ćete u koordinatnom sustavu i pronaći kako ih jednostavno zapisati pomoću matrica.

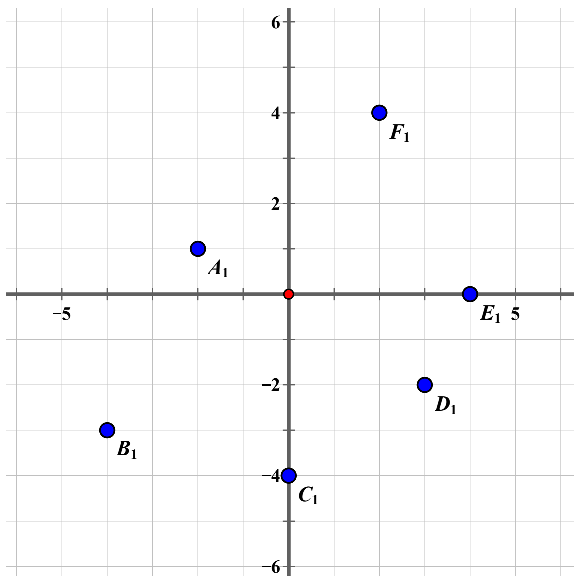
Kako to izgleda?

Podijelite se u tri ekspertne skupine. Svaka skupina neka riješi zadatke sa svog listića. Zatim idemo u goste. U gostima riješite listić sa zajedničkim zadatcima.

Prva skupina:

U koordinatnom sustavu nacrtane su točke $A_1,..., F_1$. Preslikajte ih osno simetrično s obzirom na os apscisa. Dobivene točke označite s $A_2,..., F_2$. Dopunite tablicu:

A	$x =$ $y =$	$x' =$ $y' =$	$x' = \square x + \square y$ $y' = \square x + \square y$
B	$x =$ $y =$	$x' =$ $y' =$	$x' = \square x + \square y$ $y' = \square x + \square y$
C	$x =$ $y =$	$x' =$ $y' =$	$x' = \square x + \square y$ $y' = \square x + \square y$
D	$x =$ $y =$	$x' =$ $y' =$	$x' = \square x + \square y$ $y' = \square x + \square y$
E	$x =$ $y =$	$x' =$ $y' =$	$x' = \square x + \square y$ $y' = \square x + \square y$
F	$x =$ $y =$	$x' =$ $y' =$	$x' = \square x + \square y$ $y' = \square x + \square y$



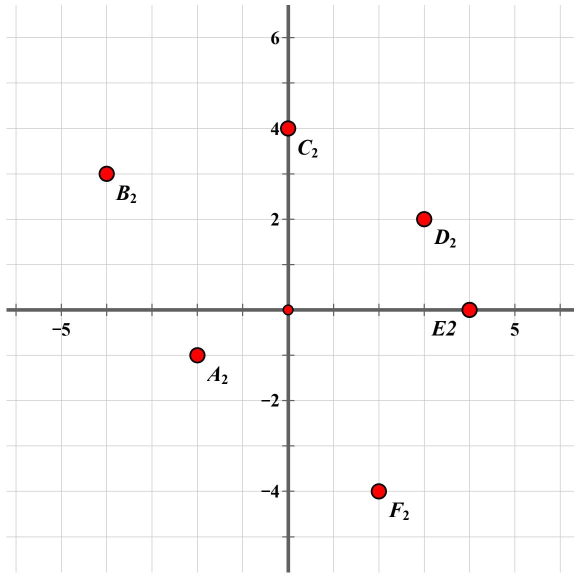
Koristeći podatke iz tablice, odredite matricu A takvu da je $T' = AT$, odnosno:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix}.$$

Druga skupina:

U koordinatnom sustavu nacrtane su točke $A_2, \ldots, F_2$. Preslikajte ih osno simetrično s obzirom na os ordinata. Dobivene točke označite s $A_3, \ldots, F_3$. Dopunite tablicu:

A	$x =$ $y =$	$x' =$ $y' =$	$x' = \square x + \square y$ $y' = \square x + \square y$
B	$x =$ $y =$	$x' =$ $y' =$	$x' = \square x + \square y$ $y' = \square x + \square y$
C	$x =$ $y =$	$x' =$ $y' =$	$x' = \square x + \square y$ $y' = \square x + \square y$
D	$x =$ $y =$	$x' =$ $y' =$	$x' = \square x + \square y$ $y' = \square x + \square y$
E	$x =$ $y =$	$x' =$ $y' =$	$x' = \square x + \square y$ $y' = \square x + \square y$
F	$x =$ $y =$	$x' =$ $y' =$	$x' = \square x + \square y$ $y' = \square x + \square y$



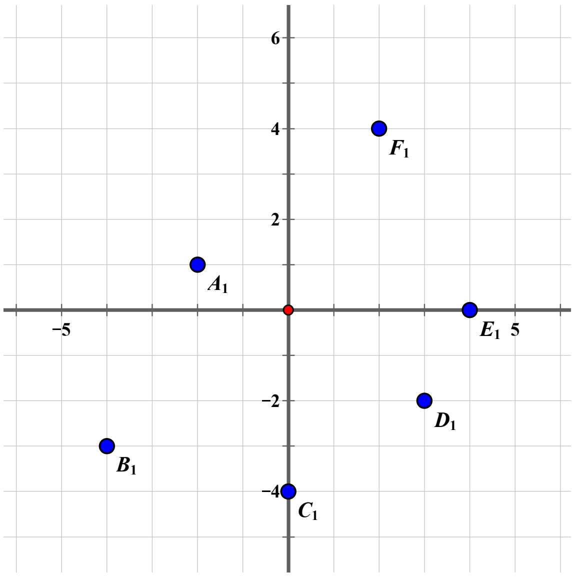
Koristeći podatke iz tablice, odredite matricu B takvu da je $T' = BT$, odnosno:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix}.$$

Treća skupina:

U koordinatnom sustavu nacrtane su točke $A_1,\dots,F_1$. Preslikajte ih centralno simetrično s obzirom na ishodište. Dobivene točke označite s $A_4,\dots,F_4$. Dopunite tablicu:

A	$x=$ $y=$	$x'=$ $y'=$	$x'=\square x+\square y$ $y'=\square x+\square y$
B	$x=$ $y=$	$x'=$ $y'=$	$x'=\square x+\square y$ $y'=\square x+\square y$
C	$x=$ $y=$	$x'=$ $y'=$	$x'=\square x+\square y$ $y'=\square x+\square y$
D	$x=$ $y=$	$x'=$ $y'=$	$x'=\square x+\square y$ $y'=\square x+\square y$
E	$x=$ $y=$	$x'=$ $y'=$	$x'=\square x+\square y$ $y'=\square x+\square y$
F	$x=$ $y=$	$x'=$ $y'=$	$x'=\square x+\square y$ $y'=\square x+\square y$



Koristeći podatke iz tablice, odredite matricu C takvu da je $T' = CT$, odnosno:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix}.$$

Idemo u goste.

Na temelju rezultata koje ste dobili u ekspertnim grupama popunite tablicu:

početne točke	preslikavanje opisno	preslikavanje matrica	preslikane točke

Promotrite dva načina preslikavanja točaka $A_1,\dots,F_1$

a. Točke $A_1,\dots,F_1$ preslikate centralno simetrično s obzirom na ishodište. Koje ste točke dobili? Koja matrica opisuje ovo preslikavanje?

b. Točke $A_1,\ldots, F_1$ najprije preslikate osno simetrično s obzirom na os apscisa, a zatim dobivene točke preslikate osno simetrično s obzirom na os ordinata. Koje ste točke dobili? Kojim se matricama opisuju ova preslikavanja? Izračunajte umnožak matrica BA i usporedite rezultat s matricom C.

Zaključujemo: kompozicija osne simetrije s obzirom na os apscisa i osne simetrije s obzirom na os ordinata centralna je simetrija s obzirom na ishodište.

Pitanje: Što biste dobili ako najprije preslikavate osno simetrično s obzirom na os ordinata, a zatim s obzirom na os apscisa? Kako biste ovu kompoziciju zapisali pomoću umnoška matrica? Izračunajte taj umnožak i usporedite ga s matricom C.

Možete li pretpostaviti?

Može li se svako preslikavanje ravnine prikazati matricom? Predstavlja li svaka matrica 2×2 neko preslikavanje ravnine?

Napravite model.

Za matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ promatrat ćete preslikavanje ravnine koje točku (x, y) preslikava u točku (x', y') tako da vrijedi $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Do sada ste zaključili da matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ predstavlja osnu simetriju s obzirom na os apscisa, matrica $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ predstavlja osnu simetriju s obzirom na os ordinata, matrica $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ predstavlja centralnu simetriju s obzirom na ishodište.

Potražite pomoć tehnologije.

U programu dinamične geometrije prikazat ćete i opisati preslikavanja ravnine određena različitim matricama. Najprije ćete definirati preslikavanje pomoću matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
Definirajte četiri parametra a, b, c, d. Definirajte koordinatni sustav i nacrtajte točku T (točka T mora biti pomična). Mjerite apscisu i ordinatu točke T. Izračunajte koordinate točke T' tako da bude

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Crtajte točku T' s koordinatama (x', y'). Označite točke T i T' te definirajte novu transformaciju (*transformacije*, *definirajte transformaciju*, nazovite ju preslikavanje ravnine).

Radni centar 1

Duplicirajte prvu stranicu. Sakrijte izmjerene i izračunate koordinate i točke T i T'. Nacrtajte trokut ABC.

a. Upišite matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Označite trokut ABC, transformacije, preslikavanje ravnine. Promotrite dobiveni trokut i opišite ga u odnosu na trokut ABC.

b. Upišite matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Promotrite dobiveni trokut i opišite ga u odnosu na trokut ABC.

c. Upišite matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$. Promotrite dobiveni trokut i opišite ga u odnosu na trokut ABC.

d. Označite parametre a i d. Mijenjajte im vrijednost pomoću tipki +/- na tipkovnici. Promatrajte dobiveni trokut i opišite ga u odnosu na vrijednost parametara a i d **i početni trokut** ABC. Znate li kako se zove ovo preslikavanje?

Zaključak: Matricom $\begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix}$ zadana je homotetija s centrom u ishodištu i koeficijentom _____.

Radni centar 2

Duplicirajte prvu stranicu. Sakrijte izmjerene i izračunate koordinate.

a. Upišite matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Promotrite točke T i T'. Opišite kako su se promijenile apscisa i ordinata točke T. Nacrtajte kružnicu sa središtem u ishodištu polumjera 3. Označite kružnicu, transformacije, preslikavanje ravnine. Promotrite i opišite sliku kružnice. Ponovite za matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b. Upišite matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Promotrite točke T i T'. Opišite kako su se promijenile apscisa i ordinata točke T. Promotrite i opišite sliku kružnice. Ponovite za matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$.

c. Upišite matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$. Promotrite točke T i T'. Opišite kako su se promijenile apscisa i ordinata točke T. Promotrite i opišite sliku kružnice.

Zaključak: Matricom $\begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix}$ zadano je preslikavanje koje ________________________.

Radni centar 3

Duplicirajte prvu stranicu. Sakrijte izmjerene i izračunate koordinate.

a. Upišite matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Promotrite točke T i T'. Opišite kako su se promijenile apscisa i ordinata točke *T*. Nacrtajte kvadrat čiji su vrhovi točke $(0,0),(3,0),(3,3),(0,3)$. Označite kvadrat, transformacije, preslikavanje ravnine. Promotrite i opišite sliku kvadrata. Ponovite za matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Koristeći tipke +/- mijenjajte vrijednost parametra b i opišite kako se mijenja slika kvadrata.

b. Upišite matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}$. Promotrite točke T i T'. Opišite kako su se promijenile apscisa i ordinata točke *T*. Promotrite i opišite sliku kvadrata. Ponovite za matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$. Koristeći tipke +/- mijenjajte vrijednost parametra c i opišite kako se mijenja slika kvadrata.

c. Upišite matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.6 & 1 \end{bmatrix}$. Promotrite i opišite sliku kvadrata.

Zaključak: Matricom $\begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix}$ zadano je preslikavanje koje ________________________.

Radni centar 4

Duplicirajte prvu stranicu. Sakrijte izmjerene i izračunate koordinate.

a. Upišite matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Promotrite točke T i T'. Opišite položaj točke T' u odnosu na točku *T*. Nacrtajte kružnicu polumjera 5 sa središtem u ishodištu. Nacrtajte dužinu $\overline{AB}$ čije krajnje točke pripadaju kružnici. Označite dužinu, transformacije, preslikavanje ravnine. Promotrite i opišite sliku dužine. Ponovite za matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

b. Upišite matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Promotrite točke T i T'. Opišite položaj točke T' u odnosu na točku *T*. Promotrite i opišite sliku dužine. Ponovite za matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.

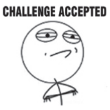
c. Upišite matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. Promotrite i opišite sliku dužine.

Zaključak: Matricom $\begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix}$ zadano je preslikavanje koje je ________________________.

Kako bi to riješila teorija?

a. Dokažite da je rotacija s centrom u ishodištu za kut α definirana matricom $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

b. Koje ćete preslikavanje dobiti ako točke ravnine najprije rotirate oko točke O za kut α, a zatim dobivenu točku rotirate oko točke O za kut β? Dokažite svoju pretpostavku koristeći matrice.



Možemo li više?

a. Istražite koje je preslikavanje zadano matricom $A_k = \begin{bmatrix} \frac{1-k^2}{1+k^2} & \frac{2k}{1+k^2} \\ \frac{2k}{1+k^2} & -\frac{1-k^2}{1+k^2} \end{bmatrix}$ za $k = 1, k = 2, k = 3, k = 0.5$.

b. Odredite matrice A_2 i $A_{0.5}$ te izračunajte umnožak $B = A_2 \cdot A_{0.5}$. Koje preslikavanje predstavlja matrica B?

c. Provjerite zaključak za još neke matrice. Generalizirajte. Provjerite svoje zaključke u programu dinamične geometrije.

d. Neka su zadana dva pravca a i b i točka T u ravnini. Točku T najprije preslikamo osno simetrično s obzirom na pravac a i zatim dobivenu sliku s obzirom na b te dobivenu točku označimo s T'. Zatim preslikamo T najprije s obzirom na b pa dobivenu sliku s obzirom na a i dobivenu sliku označimo s T''. Istražite u programu dinamične geometrije pod kojim se uvjetom točke T' i T'' podudaraju za svaki izbor točke T. Dokažite svoju pretpostavku koristeći matrice.

Kako smo radili i što smo naučili?

6. Modeliranje

6.1. Broj pušača u Londonu

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti odrediti funkciju koja opisuje postotni pad broja pušača u Londonu nakon uvođenja zabrane pušenja. Nakon toga izračunat ćete koliko će približno biti pušača 2018. godine.

U čemu je problem?

U Londonu je 2007. godine uvedena zabrana pušenja. Tadašnji udio pušača u stanovništvu bio je 27%. Nakon uvođenja zabrane udio pušača smanjio se na 18.7% 2013. godine. Ako pretpostavimo da se godišnji postotak smanjenja broja pušača ne mijenja, koliki će biti udio pušača 2018. godine? London ima 8.539 milijuna stanovnika. Uz pretpostavku da je broj stanovnika nepromijenjen, koliko će biti pušača 2018. godine?

Kako to izgleda?

Odredite koliko posto godišnje opada broj pušača.

Možete li pretpostaviti?

Pokušajte procijeniti koliko će posto stanovnika Londona biti pušači 2018. godine. Hoće li postotni udio biti puno manji nego 2013. godine?

Napravite model.

Koristeći podatak o godišnjem smanjenju postotnog udjela broja pušača, popunite navedenu tablicu, s time da x označava broj godina proteklih od 2013. godine, a $f(x)$ postotni udio pušača.

x		-1	0	1	2	3
$f(x)$	27		18.7			

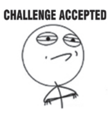
Obrazložite činjenicu da x može imati negativnu vrijednost. Možete li koristeći tablicu izračunati postotni udio pušača 2018. godine? Je li realno očekivati da se postotni udio pušača smanjuje istom brzinom i nakon 10, 15 i više godina? Obrazložite.

Potražite pomoć tehnologije.

U programu dinamične geometrije nacrtajte točke koje ste dobili u prethodnoj tablici. Graf koje funkcije je određen tim točkama? Možete li pomoću tog grafa približno odrediti postotni udio pušača 2018. godine? Možete li točno odrediti postotni udio pušača 2018. godine?

Kako bi to riješila teorija?

Koristeći prethodne podatke, odredite funkciju f koja računa postotni udio pušača u ovisnosti o broju godina (x) proteklih od 2013. godine. Odredite koliko će pušača biti u 2018. godini?



Možemo li više?

Zadatak 1.

Kako bi izgledala funkcija za $x \geq 0$ ako postotni udio pušača nije nastavio opadati, nego je ostao isti nakon 2013. godine? Kako se zove takva funkcija? Prikažite grafički tu funkciju.

Zadatak 2.

Odredite zapis funkcije ako udio pušača nakon 2013. godine započne rasti za 0.5% godišnje. Prikažite tu funkciju grafički.

Zadatak 3.

Primjenom programa dinamične geometrije istražite kako promjena parametara linearne funkcije utječe na promjenu grafa.

Kako smo radili i što smo naučili?

6.2. Cijena i dobit

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti odrediti cijenu proizvoda kojom se postiže maksimalna dobit koristeći podatke o cijeni i količini proizvoda prodanih u jednoj godini.

U čemu je problem?

Iznos dobiti računa se tako da se ukupnim prihodima oduzmu troškovi proizvodnje. Trošak je proizvodnje 1 kuna po proizvodu. U sljedećoj je tablici prikazan odnos prodajne cijene i količine prodanih proizvoda u jednom danu. Izračunajte dobit uz navedene cijene proizvoda.

Prodajna cijena HRK (s)	Količina prodanih proizvoda u jednom danu (q)
4	80
6	60
8	40

Kako to izgleda?

Kolika je dobit uz prodajnu cijenu od 4 kune? Ako prodajnu cijenu smanjimo na 2 kune, koliko će se proizvoda prodati? Kolika će u tom slučaju biti dobit?

Možete li pretpostaviti?

Možete li pretpostaviti uz koju se cijenu postiže maksimalna dobit?

Napravite model.

Dopunite tablicu:

Prodajna cijena HRK (s)	Količina prodanih proizvoda u jednom danu (q)	Dobit (d)
4	80	
5		
6	60	
7		
8	40	

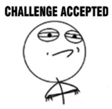
Potražite pomoć tehnologije.

U programu dinamične geometrije nacrtajte u koordinatnom sustavu točke (s, d). Možete li pretpostaviti o kojoj se funkciji radi? Napravite tri klizača (nacrtajte točku a na x osi, mjerite joj apscisu i nazovite izmjerenu apscisu a; nacrtajte točke b, c na y osi, mjerite im ordinate i nazovite ih b, c). Nacrtajte graf funkcije i namjestite klizače tako da nacrtane točke pripadaju grafu. Možete li sa slike iščitati cijenu kojom se postiže maksimalna dobit?

Kako bi to riješila teorija?

Ako se cijena proizvoda smanji za jedan za koliko će se promijeniti broj prodanih proizvoda? Odredite funkciju koja opisuje ovisnost količine prodanih proizvoda o prodajnoj cijeni.

Koristeći funkciju koja opisuje ovisnost količine prodanih proizvoda o prodajnoj cijeni, odredite funkciju dobiti u ovisnosti o prodajnoj cijeni. Kakva je to funkcija? Odredite argument za koji se postiže maksimalna vrijednost funkcije.



Možemo li više?

1. Koliko iznosi maksimalna vrijednost funkcije?
2. U kojim slučajevima nema dobiti?
3. Možemo li odrediti cijenu proizvoda uz koju se postiže minimalna dobit?
4. Primjenom programa dinamične geometrije istražite u kojem intervalu mora biti prodajna cijena tako da ukupna dobit raste.

Kako smo radili i što smo naučili?

6.3. Kvadratna funkcija u geometrijskim zadatcima

Što ćemo raditi?

Za dani geometrijski problem naći ćete funkcijsku ovisnost dviju veličina, odrediti pravilo prema kojemu promjena jedne veličine utječe na promjenu druge.

U čemu je problem?

Konstruirajte pravokutnik *ABCD* čije su stranice duljine 6 cm i 2 cm. Odaberite točku *Q* na dijagonali $\overline{AC}$ i konstruirajte točku *R* na stranici $\overline{AB}$, tako da je dužina $\overline{QR}$ paralelna s $\overline{AD}$.

Mjerite duljinu dužine $\overline{QR}$ i površinu trokuta ΔQRB.

Želimo ustanoviti vezu između duljine dužine $\overline{QR}$ i površine trokuta ΔQRB.

Potražite pomoć tehnologije.

Mjerite duljinu dužine $\overline{QR}$ i površinu trokuta ΔQRB.

Izmjerene vrijednosti tabelirajte. Tabelirajte dvadesetak vrijednosti. Ucrtajte tabelirane vrijednosti u koordinatni sustav.

a. Obilježite izmjerenu duljinu dužine $\overline{QR}$, te nakon toga izmjerenu vrijednost površine ΔQRB (redoslijed obilježavanja je važan zbog definiranja nezavisne varijable i zavisne varijable u traženju funkcijske ovisnosti površine trokuta o duljini dužine).

b. Na padajućem izborniku *Broj* odaberite opciju *Tabeliranje*.

c. Formiranoj tablici dodajte retke koristeći opciju *Dodavanje podataka u tablicu/Dodavanje 20 zapisa čije se vrijednosti mijenjaju*, te mijenjajući položaj točke *Q* na dijagonali $\overline{AC}$.

d. Podatke iz formirane tablice crtajte u koordinatnom sustavu kao točke (*x* koordinata točke – duljina dužine $\overline{QR}$, *y* koordinata točke – površina ΔQRB) opcijom *Graf/Grafički prikaz podataka iz tablice*.

Promotrite razmještaj nacrtanih točaka. Pretpostavite oblik funkcijske ovisnosti.

Definirajte klizače *a, b* i *c.*

a. Na x osi u koordinatnom sustavu odaberite proizvoljnu točku A.

b. Izmjerite apscisu točke A i nazovite ju a.

c. Pomicanjem točke A mijenja se izmjerena vrijednost parametra a. To je klizač.

d. Klizači b i c definiraju se analogno.

Nacrtajte graf funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Mijenjajte vrijednosti parametara dok se graf ne poklopi s nacrtanim točkama.

Očitajte vrijednosti parametara *a, b* i *c.*

Parametre pretpostavljene funkcijske ovisnosti (kvadratna funkcija) možete tražiti i algebarski, pomoću koordinata točaka koje ćete očitati iz tablice. Koliko točaka valja odabrati? Odredite parametre funkcije na ovaj način.

Kako bi to riješila teorija?

Promotrite konstruirani pravokutnik. Označite duljinu dužine $\overline{QR}$ sa x. Izrazite površinu trokuta ΔQRB kao funkciju od x. Odredite položaj točke Q za koji je površina trokuta maksimalna. Kolika je maksimalna vrijednost površine?

Primijenite naučeno.

1. U pravokutni trokut upišite pravokutnik tako da mu je jedan vrh u vrhu pravog kuta trokuta. Mjerite površinu pravokutnika. Odaberite neku veličinu o kojoj ta površina ovisi pa i nju mjerite. Tabelirajte pa vrijednosti nacrtajte. Pretpostavite oblik funkcijske ovisnosti pa odredite parametre funkcije. Odredite maksimalnu vrijednost površine pravokutnika.

2. Na dužini $\overline{AB}$ duljine a odaberite točku M te s raznih strana dužine $\overline{AB}$ konstruirajte kvadrate $AMCD$ i $MBEF$. Odaberite neku veličinu o kojoj ovisi površina šesterokuta $AFEBCD$, mjerite, tabelirajte, nacrtajte i odredite funkcijsku ovisnost. Odredite položaj točke M za koji je površina šesterokuta najmanja.

Kako smo radili i što smo naučili?

6.4. Recikliranje

Što ćemo raditi?

Pokušat ćete predvidjeti postotak recikliranoga komunalnog otpada.

U čemu je problem?

Dana je tablica s postotcima recikliranoga komunalnog otpada u Hrvatskoj za neke mjesece. Možete li na osnovu tablice predvidjeti postotak recikliranoga otpada u veljači 2016. godine?

Mjesec	Postotak
listopad 2008.	2%
veljača 2009.	2.5%
lipanj 2009.	3%
prosinac 2009.	3.5%
travanj 2010.	4%
kolovoz 2010.	6.5%
veljača 2011.	9%
lipanj 2011.	10.5%
listopad 2011.	13.5%

Kako to izgleda?

Prikažite podatke grafički (skica olovkom na papiru).

Možete li pretpostaviti?

Pokušajte procijeniti postotak recikliranoga otpada za veljaču 2012., 2014. i 2016. godine. Uočavate li kakvu pravilnost?

Napravite model.

Koja funkcija bi približno opisivala kretanje postotka recikliranoga otpada?

Potražite pomoć tehnologije.

- Ucrtajte u koordinatni sustav podatke iz tablice. Namjestite jedinične dužine na koordinatnim osima. Što predstavlja podatak na apscisi, a što na ordinati? Definirajte parametre a i b. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = a \cdot b^x$.

  Mijenjajte vrijednosti a i b parametara dok se graf ne poklopi s nacrtanim točkama.

  Nakon što ste otkrili parametre eksponencijalne funkcije, izračunajte postotak recikliranoga otpada za veljaču 2012.

- Riješite zadatak pomoću grafičkog kalkulatora.

  Unesite podatke iz tablice u liste L1 i L2 ($\boxed{\text{STAT}}$, Edit).

  Prikažite ih grafički ($\boxed{\text{2ND}}$ $\boxed{\text{Y =}}$, odnosno [STAT PLOT], Plot1, namjestite na ON, Xlist: L1, Ylist: L2; namjestite prozor $\boxed{\text{ZOOM}}$, ZoomStat; $\boxed{\text{GRAPH}}$).

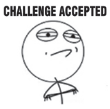
  Odredite eksponencijalnu funkciju koja aproksimira podatke ($\boxed{\text{STAT}}$,CALC, ExpReg, Xlist: L1, Ylist: L2, Store RegEQ: Y1, Calculate). Funkciju Y1 zapisat ćete ovako $\boxed{\text{VARS}}$, Y- VARS, Function, Y1.

Usporedite funkcije dobivene u programu dinamične geometrije i na grafičkom kalkulatoru.

Kako bi to riješila teorija?

Pronađite na internetu podatak koliki je prosjek Europske unije u postotku recikliranoga otpada. Promatrajući ovaj model, odredite je li Hrvatska dosegla trenutni prosjek Europske unije? Ako da, odredite kada.

Zadatak riješite grafički i računski.



Možemo li više?

Kada bi prema ovom modelu Hrvatska dosegla 100% recikliranoga materijala? Je li realno tako nešto očekivati? Koliki bi po ovom modelu bio postotak recikliranoga materijala u veljači 2016.? Što na osnovu toga možete zaključiti o ovom modelu?

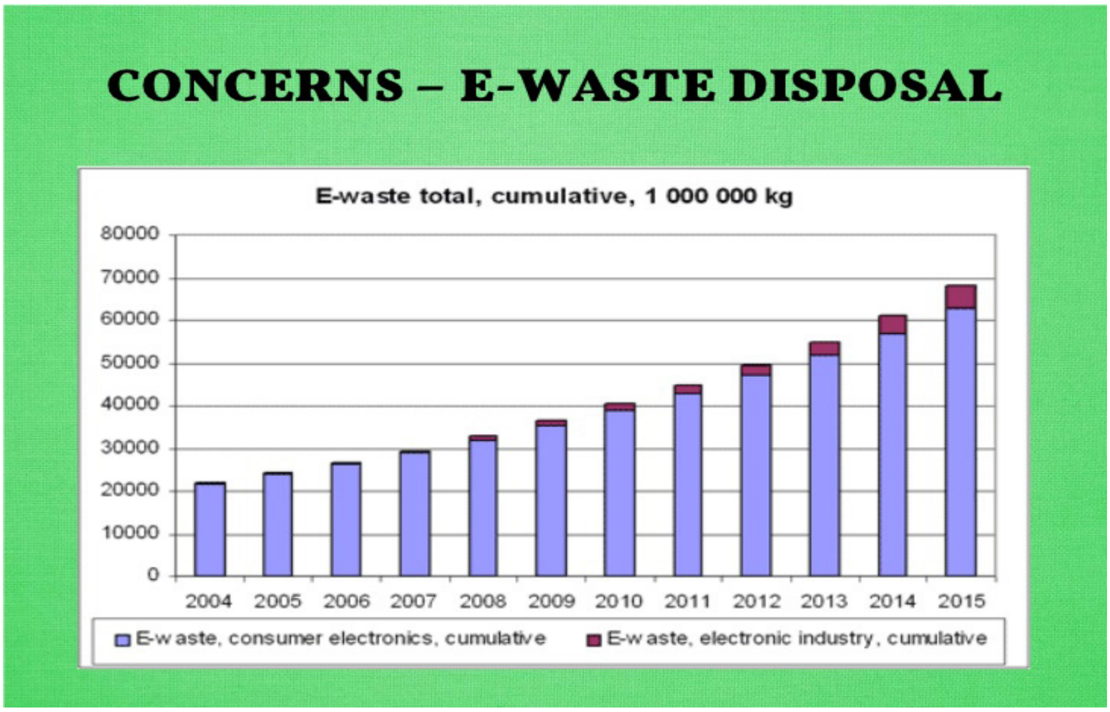
Potražite na internetu definiciju logističke funkcije. Odredite logističku funkciju koja aproksimira zadane podatke. Koristeći logističku funkciju, odredite postotak recikliranoga materijala za veljaču 2012., 2014. i 2016. godine.

Primijenite naučeno.

Sljedeći dijagram prikazuje količine elektroničkog otpada u Europi.

Odredite eksponencijalnu funkciju koja opisuje kretanje količina elektroničkog otpada u elektroničkoj industriji. Koliko će biti tog otpada 2020. godine?

Za koliko godina će se količina elektroničkog otpada udvostručiti u odnosu na 2015. godinu?



(preuzeto s http://image.slidesharecdn.com/hosteuropegmbh-120823094008-phpapp01/95/host-europe-gmbh-14-728.jpg?cb=1345715416 , pristupljeno 13.2.2016.)

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

http://www.eea.europa.eu/themes/economy/resource-efficiency/2015-catalogue/countries/recyclingmunicipalwastebymethod.png (pristupljeno 13.2.2016.)

https://themaltingpot.files.wordpress.com/2015/05/eea-soer-2015-recycling.jpg (pristupljeno 13.2.2016.)

http://image.slidesharecdn.com/hosteuropegmbh-120823094008-phpapp01/95/host-europe-gmbh-14-728.jpg?cb=1345715416 (pristupljeno 13.2.2016.)

6.5. Mjesečev sjetveni kalendar

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti pomoću tehnologije i trigonometrije modelirati procese koji se ponavljaju.

U čemu je problem?

Ana želi tijekom svibnja 2016. godine u svom vrtu u okolici Zagreba zasaditi ciklu. Poznato joj je da Mjesec ima snažan utjecaj na biljke. Prema Mjesečevu sjetvenom kalendaru ciklu je najbolje sijati u tjednu nakon punog Mjeseca. Kada Ana treba planirati sjetvu?

Kako to izgleda?

Mjesec u svojoj orbiti oko Zemlje prolazi četiri faze Mjesečeve mijene, koje ovise o tome koji dio osvijetljene površine vidimo sa Zemlje. Vrijeme potrebno Mjesecu da prođe sve četiri faze u prosjeku traje 29.53059 dana. Ako znamo podatke o vidljivosti Mjeseca u nekom razdoblju, možemo odrediti i Mjesečeve mijene, pa onda i Anin sjetveni kalendar.

U tablici su prikazani podatci o vidljivom dijelu Mjeseca u Zagrebu u prva tri mjeseca 2016.

datum	1.1.	6.1.	11.1.	16.1.	21.1.	26.1.	31.1.	5.2.	10.2.	15.2.	20.2.	25.2.	1.3.	6.3.
vidljivi dio	0.57	0.14	0.03	0.50	0.92	0.94	0.56	0.12	0.05	0.50	0.95	0.93	0.50	0.09

Napravite model.

Podatke iz tablice prikažite u koordinatnom sustavu. Na osi x neka budu redni brojevi dana u godini, a na osi y vidljivi dio mjeseca. Pokušajte interpretirati dobiveni graf.

Možete li pretpostaviti?

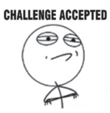
Procijenite iz zadanih podataka kada je u svibnju pun Mjesec.

Potražite pomoć tehnologije.

1. U programu dinamične geometrije upišite gornje podatke u tablicu.
2. Ucrtajte točke u koordinatni sustav.
3. Pomoću parametara A, B, C i D odredite funkciju $f(x) = A\sin(Bx + C) + D$ koja opisuje ovisnost vidljivog dijela Mjeseca o vremenu (danu u godini).
4. Pomoću dobivenoga grafa funkcije f odredite kada u svibnju Ana treba sijati ciklu.

Kako bi to riješila teorija?

1. Odredite računski funkciju $f(x) = A\sin(Bx + C) + D$ koja opisuje ovisnost vidljivog dijela Mjeseca o vremenu. Pri tome koristite trajanje lunarnog mjeseca od 29.53 dana.
2. Odredite računski kada Ana treba sijati ciklu u svibnju.



Možemo li više?

Kada Ana treba u travnju sijati špinat ako je po Mjesečevu sjetvenom kalendaru to najpovoljnije u tjednu nakon mladog Mjeseca?

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

U tablici je prikazana dnevna temperatura u Zagrebu tijekom 1995. godine.

dan	1.1.	31.1.	3.3.	3.4.	4.5.	4.6.	5.7.	5.8.	5.9.	6.10.	6.11.	7.12.
°C	0	2.2	6.8	11.6	16.1	19.4	21.5	20.7	17.1	11.7	6.1	1.8

1. Odredite funkciju $f(x)=A\sin(Bx+C)+D$ koja opisuje ovisnost temperature o vremenu (danu u godini).
2. Izračunajte razliku u temperaturi između 20. veljače i 28. travnja.
3. U kojem je periodu temperatura ispod 12 °C?

Zadatak 2.

Populacija životinja oscilira od 1300 jedinki 1. siječnja do 2200 jedinki 1. srpnja, pa ponovo 1300 1. siječnja itd.

1. Odredite jednadžbu sinusoide koja opisuje kretanje populacije životinja u ovisnosti o vremenu (u mjesecima).
2. Koristeći graf funkcije procijenite kada populacija dosiže 1500 jedinki.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura:

Antončić, N.; Špalj, E.; Volenec, V. 2008. *Matematika 3, udžbenik za 3. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije*. Školska knjiga. Zagreb.

http://aa.usno.navy.mil/data/docs/RS_OneDay.html (pristupljeno 18. veljače 2016.)

6.6. Ferrisov kotač

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti uz pomoć tehnologije i bez nje odrediti vremenski period u kojem se putnik u Ferrisovu kotaču podigne na više od 100 metara od tla.

U čemu je problem?

Ana i njen razred u posjetu su Londonu. Oduševio ih je London Eye, jedan od najvećih kotača-promatračnica na svijetu izgrađen 1999. godine. Promjer je toga Ferrisova kotača 120 metara, a ukupna je visina 135 metara. London Eye ima 32 kabine, a svaka može primiti 25 osoba. Kotaču je potrebno 30 minuta za puni okret. Pogled s London Eyea poseban je doživljaj pa se Anin razred odlučio provozati. No, Ana se pomalo boji visine pa je zanima koliko dugo će biti na visini iznad 100 metara od tla. Podrazumijevamo da se kotač počinje rotirati u smjeru suprotnom smjeru kazaljke na satu i to kada je kapsula u najnižoj točki kotača.

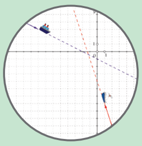
Kako to izgleda?

Anin prijatelj Marko pronašao je ove podatke o London Eyeu.

Vrijeme t u minutama	0	5	10	15	20	25	30
Udaljenost $h(t)$ od tla u metrima (visina)	15	45	105	135	105	45	15

Možete li pretpostaviti?

Procijenite koliko će dugo Ana biti iznad 100 metara visine.



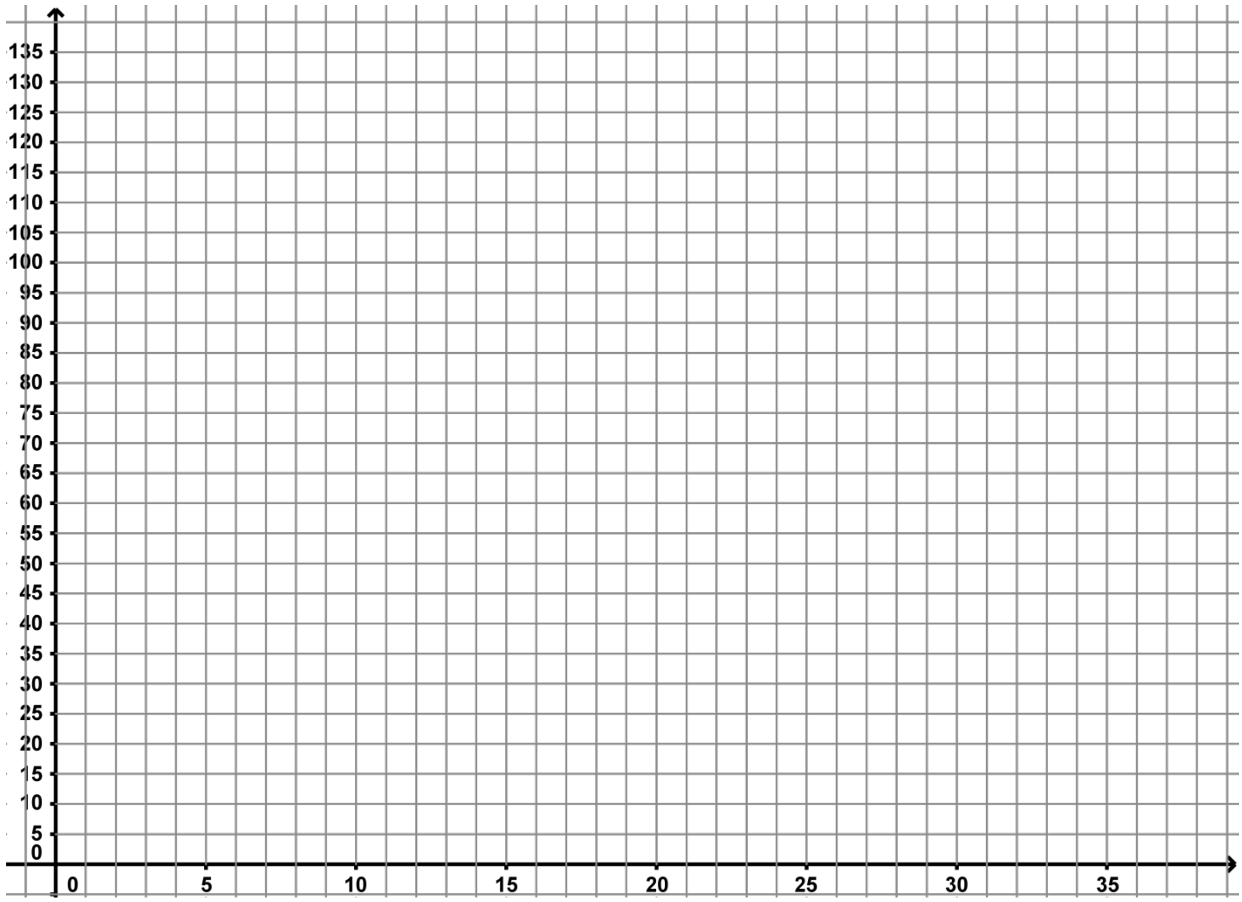
Napravite model.

Promotrite podatke u tablici i odgovorite na pitanja:

a. Jesu li vrijeme i udaljenost od tla proporcionalne veličine?

b. Je li ovisnost udaljenosti o vremenu linearna?

Koristeći dani koordinatni sustav skicirajte graf koji pokazuje kako se mijenja udaljenost putnika od tla ovisno o vremenu.



Kojim matematičkim modelom, odnosno funkcijom možemo opisati udaljenost putnika od tla?

Potražite pomoć tehnologije.

- U programu dinamične geometrije ucrtajte točke iz prethodne tablice u koordinatni sustav.
- Napravite tri parametra A, B i D. (Nacrtajte točke A i D na y osi, mjerite im ordinatu, ordinate nazovite A i D. Nacrtajte točku na x osi, mjerite joj apscisu, apscisu nazovite B.)

- Nacrtajte graf funkcije $h(t) = A\cos(Bt) + D$.

Očitajte vrijednosti A, B i D za koje će funkcija h opisivati danu situaciju.

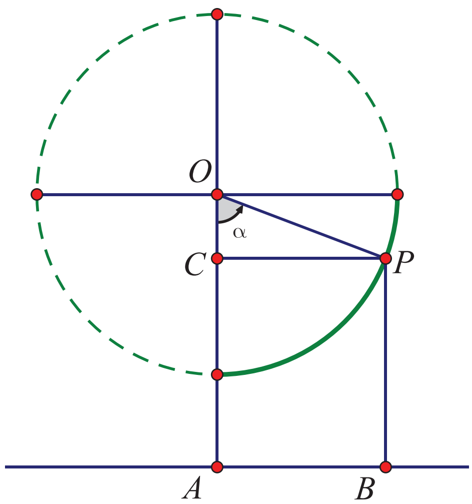
Označite dio grafa koji prikazuje visinu veću od 100 metara. Očitajte period koji je rješenje.

Kako bi to riješila teorija?

Podijelite se u četiri ekspertne skupine. Svaka skupina neka riješi zadatke sa svog listića. Zatim idemo u goste. U gostima riješite listić sa zajedničkim zadatcima.

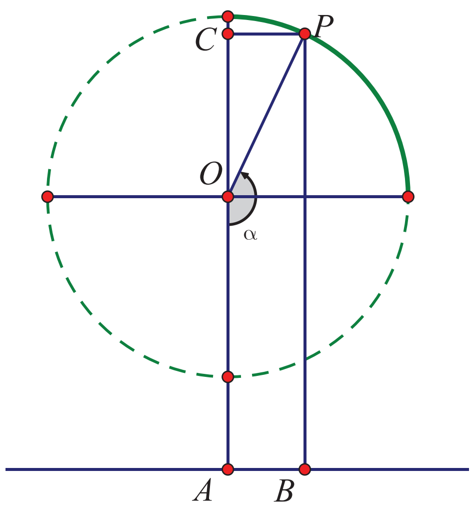
Prva skupina:

1. Neka je P položaj putnika u nekom vremenu t tijekom vožnje kao na slici. Vaša skupina promatra položaj u prvoj četvrtini kruga. Neka duljina dužine $\overline{OA}$ predstavlja udaljenost središta kotača od tla, a duljina dužine $\overline{PB}$ udaljenost putnika od tla. S α označimo kut $\angle AOP$. Što predstavlja duljina dužine $\overline{OP}$? Izrazite $|PB|$ pomoću $|OA|$, $|OP|$ i α.
2. U kojem se intervalu nalazi kut α za položaje koje promatrate? Odredite kut α za položaj putnika nakon 5 minuta vožnje. Zapišite kut α u radijanima.

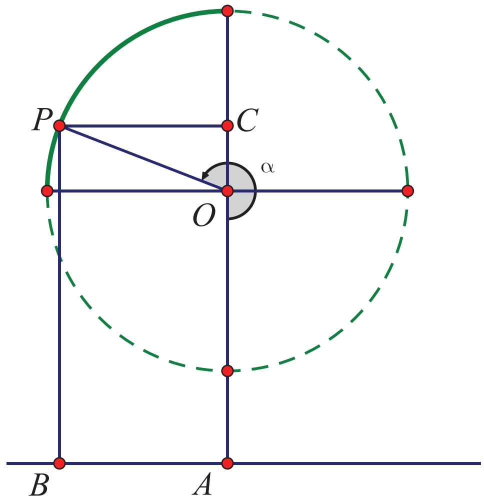


Druga skupina:

1. Neka je P položaj putnika u nekom vremenu t tijekom vožnje kao na slici. Vaša skupina promatra položaj u drugoj četvrtini kruga. Neka duljina dužine $\overline{OA}$ predstavlja udaljenost središta kotača od tla, a duljina dužine $\overline{PB}$ udaljenost putnika od tla. S α označimo kut $\angle AOP$. Što predstavlja duljina dužine $\overline{OP}$? Izrazite $|PB|$ pomoću $|OA|$, $|OP|$ i α.
2. U kojem se intervalu nalazi kut α za položaje koje promatrate? Odredite kut α za položaj putnika nakon 10 minuta vožnje. Zapišite kut α u radijanima.

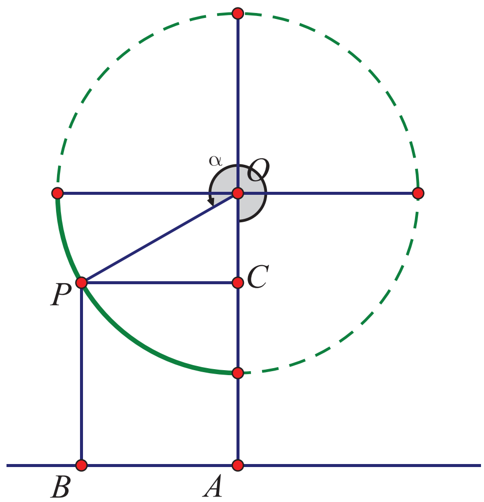


Treća skupina:



1. Neka je P položaj putnika u nekom vremenu t tijekom vožnje kao na slici. Vaša skupina promatra položaj u trećoj četvrtini kruga. Neka duljina dužine $\overline{OA}$ predstavlja udaljenost središta kotača od tla, a duljina dužine $\overline{PB}$ udaljenost putnika od tla. S α označimo kut $\angle AOP$. Što predstavlja duljina dužine $\overline{OP}$? Izrazite $|PB|$ pomoću $|OA|$, $|OP|$ i α.
2. U kojem se intervalu nalazi kut α za položaje koje promatrate? Odredite kut α za položaj putnika nakon 20 minuta vožnje. Zapišite kut α u radijanima.

Četvrta skupina:



1. Neka je P položaj putnika u nekom vremenu t tijekom vožnje kao na slici. Vaša skupina promatra položaj u četvrtoj četvrtini kruga. Neka duljina dužine $\overline{OA}$ predstavlja udaljenost središta kotača od tla, a duljina dužine $\overline{PB}$ udaljenost putnika od tla. S α označimo kut $\angle AOP$. Što predstavlja duljina dužine $\overline{OP}$? Izrazite $|PB|$ pomoću $|OA|$, $|OP|$ i α.
2. U kojem se intervalu nalazi kut α za položaje koje promatrate? Odredite kut α za položaj putnika nakon 25 minuta vožnje. Zapišite kut α u radijanima.

Idemo u goste.

1. Usporedite formule za visinu koje ste dobili u ekspertnim skupinama. Što primjećujete?
2. Preostaje još odrediti kako se mijenja kut α u ovisnosti o vremenu t. Koristeći se rezultatima iz ekspertnih skupina popunite tablicu:

t	5	10	15	20	25	30
α						

Što primjećujete, kakve su veličine kut i vrijeme? Nadopunite rečenicu:

Koliko se _______________ poveća vrijeme, toliko se __________________ kut.

Koliko se _______________ smanji vrijeme, toliko se __________________ kut.

Na osnovu tog zaključka popunite tablicu:

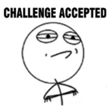
t	30	1	2	7	18	t
α						

Uvrstite dobiveni izraz za kut α u formulu za visinu. Dobili ste kako visina putnika ovisi o vremenu. Zapišite pravilo pridruživanja

$h(t) =$ ______________________________________.

Usporedite s rješenjem koje ste dobili primjenom tehnologije. Navedite prednosti i nedostatke obiju metoda.

4. Riješite nejednadžbu čije je rješenje odgovor na Anino pitanje.



Možemo li više?

- Možemo li iskoristiti neku drugu trigonometrijsku funkciju koja opisuje ovo gibanje?
- Promotrite visinu kapsule u odnosu na najnižu točku kotača London Eye. Ispunite tablicu!

Vrijeme t u minutama	0	5	10	15	20	25	30
Visina putnika u odnosu na najnižu točku u metrima	0						

Kojim matematičkim modelom, odnosno funkcijom, možemo opisati ovisnost te visine o vremenu?

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Dano je šest različitih Ferrisovih kotača. Pridružite im odgovarajuću funkciju i graf.

Opis	Funkcija	Graf
Promjer: 40 m Visina središta kotača: 30 m Broj okretaja u minuti: 2.5		
Promjer: 40 m Visina središta kotača: 40 m Broj okretaja u minuti: 2.5		

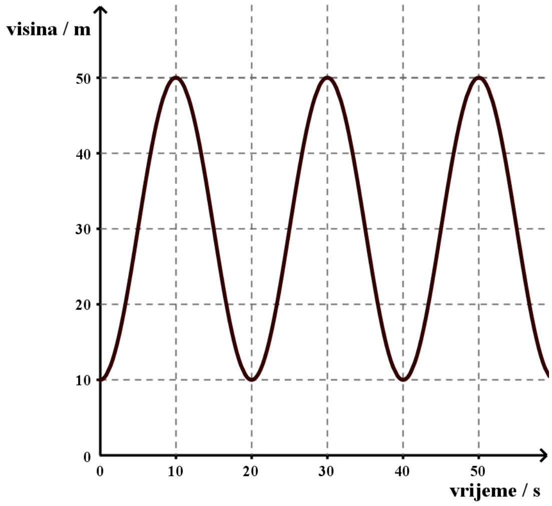
Promjer: 30 m Visina središta kotača: 40 m Broj okretaja u minuti: 2.5		
Promjer: 40 m Visina središta kotača: 30 m Broj okretaja u minuti: 3		
Promjer: 30 m Visina središta kotača: 40 m Broj okretaja u minuti: 3		
Promjer: 30 m Visina središta kotača: 30 m Broj okretaja u minuti: 3		

Funkcije (napomena: vrijeme je u sekundama):

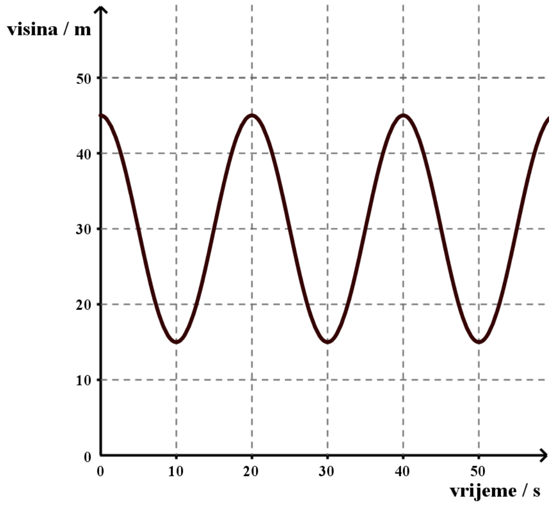
A	$h(t) = 40 + 15\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$
B	$h(t) = 40 - 15\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$
C	$h(t) = 30 + 15\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$
D	$h(t) = 30 + 20\cos\left(\frac{\pi}{10}t + \pi\right)$
E	$h(t) = 30 - 20\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$
F	$h(t) = 40 + 15\cos\left(\frac{\pi}{12}t + \pi\right)$
G	$h(t) = 30 - 20\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$
H	$h(t) = 40 - 20\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$
I	$h(t) = 40 + 15\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$

Grafovi:

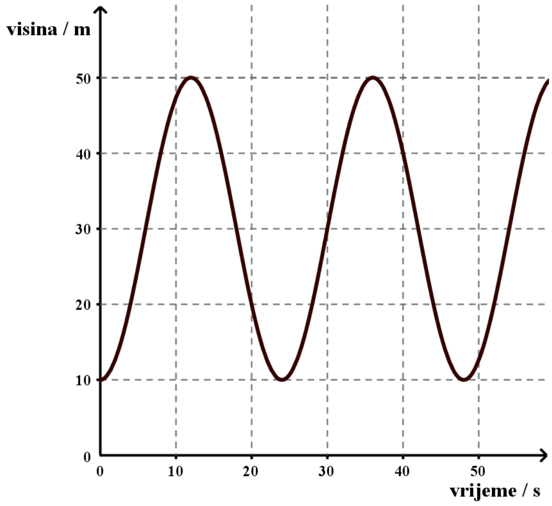
1.



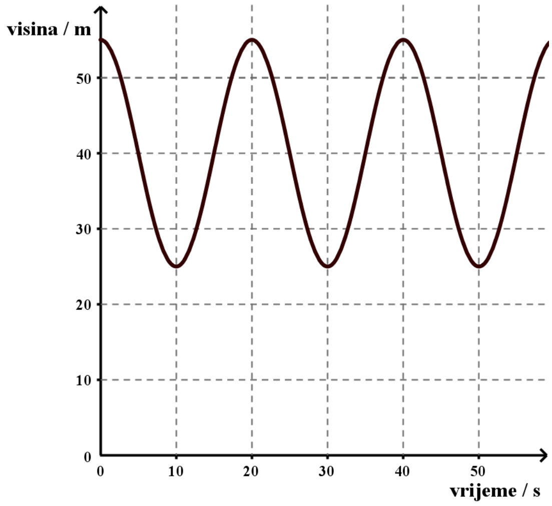
2.



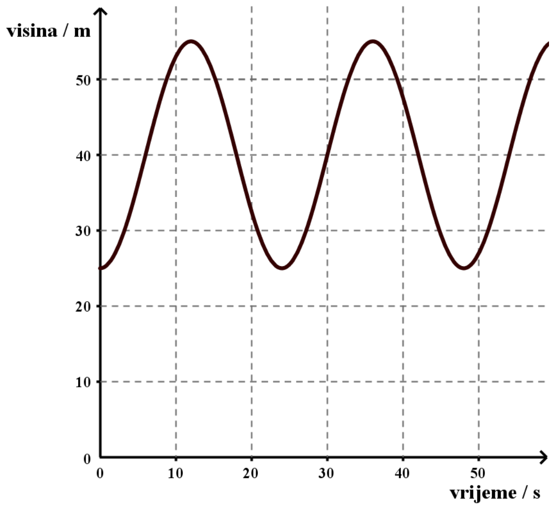
3.



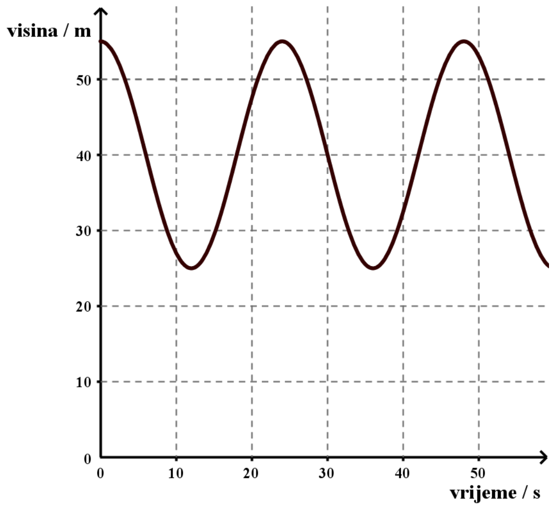
4.

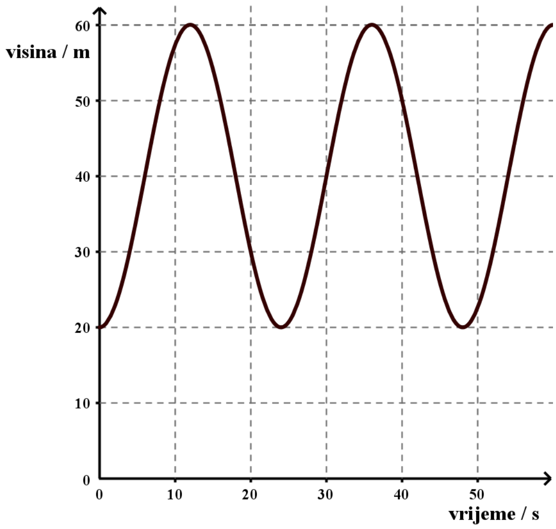


5.



6.



7. 	

Ima li više rješenja? Zašto?

Zadatak 2.

Izrazite funkciju udaljenosti putnika od tla koji se u trenutku $t = 0$ nalazi na dnu Ferrisova kotača promjera 20 m, a koji napravi puni krug za 15 sekundi i čija je najniža točka udaljena od Zemlje 2 metra.

Zadatak 3.

Opišite Ferrisov kotač kojem funkcija $h(t) = -30\cos\left(\frac{\pi}{20}t\right) + 36$ predočuje udaljenost putnika od tla izraženu u metrima i u ovisnosti o vremenu izraženom u sekundama.

Kako smo radili i što smo naučili?

6.7. Problem dviju jahti

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti pomoću tehnologije i pomoću teorije određivati minimalnu udaljenost između dvaju objekata koji se gibaju.

U čemu je problem?

Početna pozicija Andrijine jahte je točka (–10, 4), a brzina njezina kretanja određena je vektorom $2\vec{i}-\vec{j}$, dok je početna pozicija Barbarine jahte točka (3, –13), a brzina njezina kretanja određena je vektorom $-\vec{i}+3\vec{j}$. Hoće li doći do sudara?

Kako to izgleda?

U koordinatnom sustavu označite koordinatne osi koje odgovaraju zadanim podatcima. Neka jedinična dužina označava jedan kilometar. Pribadačama označite početne pozicije jahti i njihove položaje nakon 1, 2, 3, 4 i 5 sati. Jedinični vektor $\vec{i}$ predstavlja pomak od 1 km prema istoku, a jedinični vektor $\vec{j}$ predstavlja pomak od 1 km prema sjeveru.

Napravite model.

Popunite tablicu:

Pozicija nakon t sati	0	1	2	3	4	5
Jahta A						
Jahta B						
Udaljenost A i B						

Kako se mijenja udaljenost jahti ovisno o vremenu plovidbe?

Možete li pretpostaviti?

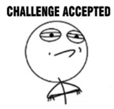
Procijenite hoće li se jahte sudariti. Ako da, kada će se to dogoditi, ako ne, kolika će biti minimalna udaljenost?

Potražite pomoć tehnologije.

1. U programu dinamične geometrije ucrtajte početne pozicije jahti i njihove položaje nakon 1, 2 i 3 sata. Nacrtajte položaj jahti nakon t sati. Animirajte položaj jahti.
2. Izmjerite udaljenost d između jahti u bilo kojem trenutku t.
3. Procijenite kada će udaljenost između jahti biti minimalna i koliko iznosi ta minimalna udaljenost.

Kako bi to riješila teorija?

1. Zapišite koordinate položaja jedne i druge jahte u ovisnosti o vremenu t.
2. Izračunajte u kojem će se trenutku će jahta A naći u točki $(-1.2, -0.4)$? Kada će se u toj točki naći jahta B? Što možete o sudaru zaključiti iz toga?
3. Zapišite formulu kojom se računa udaljenost d između jahti.
4. Računski odredite kolika je minimalna udaljenost i kada će se dogoditi.



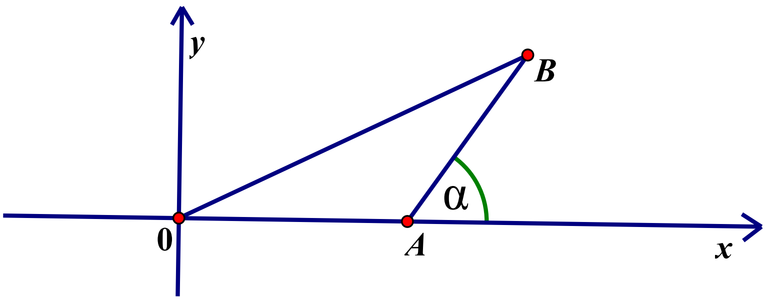
Možemo li više?

Istražite i druge situacije, odnosno mijenjajte početne pozicije jahti i njihove vektore brzine. Pod kojim će se početnim uvjetima jahte sudariti?

Primijenite naučeno.

Zadatak

Avion se nalazi u točki O (ishodištu koordinatnog sustava) i leti konstantnom brzinom od 800 km/h, najprije 30 minuta u smjeru istoka do točke A. Zatim skreće za kut α i leti 45 minuta do točke B. Smjer pravca AB određen je vektorom $24\vec{i}+7\vec{j}$.



1. Odredite $|OA|$ i koordinate točke A.
2. Odredite $|AB|$.
3. Odredite veličinu kuta α za koji avion mora skrenuti da bi došao u smjer pravca AB.
4. Neki drugi avion leti direktno od točke O prema točki B. Pokažite da je vektor $\overrightarrow{OB}=976\vec{i}+168\vec{j}$.
5. Odredite najkraću udaljenost toga drugog aviona od točke A.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura:

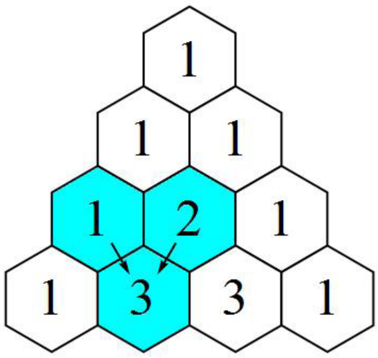
Antončić, N.; Špalj, E.; Volenec, V. 2008. *Matematika 3, udžbenik za 3. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije*. Školska knjiga. Zagreb.

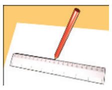
7. Statistika i vjerojatnost

7.1. Pascalov trokut modulo *n*

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti bojiti ćelije/brojeve u Pascalovu trokutu prema ostatcima koje daju pri dijeljenju s 2, 3 ili 5.





Kako to izgleda?

Pascalov trokut je trokut u kojem zapisujemo brojeve na sljedeći način: u prvom retku je broj 1. U drugom retku su dvije jedinice. U svakom sljedećem retku započinjemo i završavamo brojem 1, a na ostalim mjestima zapisujemo zbroj dvaju brojeva koji se nalaze iznad tog mjesta u prethodnom retku.

Možete li pretpostaviti?

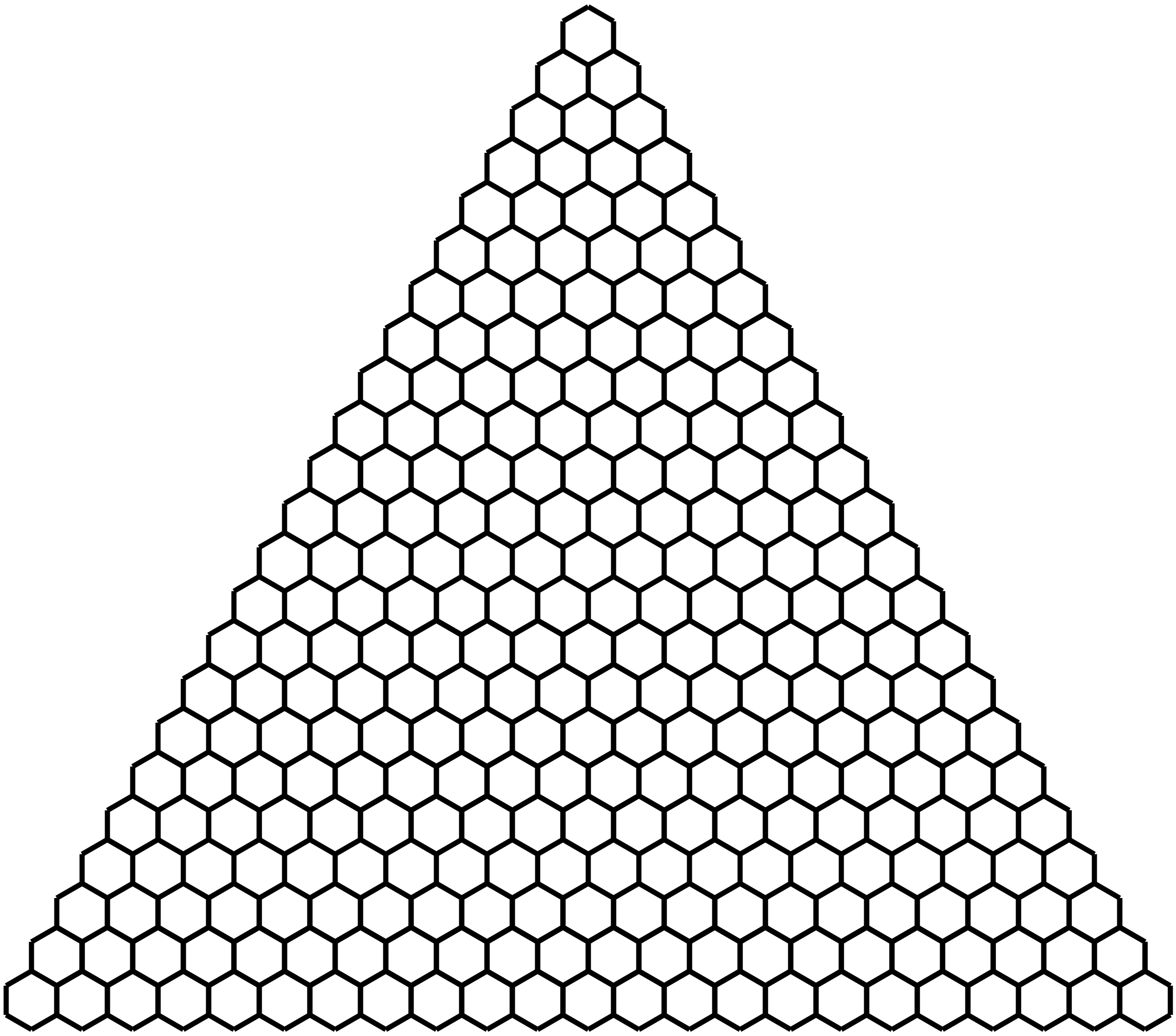
Ako svaku ćeliju obojimo nekom bojom koja odgovara ostatku pri dijeljenju broja koji u njoj piše, brojem koji odgovara vašoj skupini, možete li pretpostaviti kako će izgledati raspored boja na slici?

 **Potražite pomoć tehnologije.**

U programu za izradu proračunskih tablica napravite dvije kartice. Na prvoj napravite tablicu s 23 retka i 23 stupca. Prvi stupac popunite jedinicama, ostatak prvog retka ostavite praznim. U drugi redak, drugi stupac upišite formulu za zbroj ćelije direktno iznad, te ćelije gore lijevo. Sada tu formulu prekopirajte u ostatak tablice (redak po redak), tako da je u svakom sljedećem retku prekopirate u jednu ćeliju više nego u prethodnom.

Na drugoj kartici također napravite tablicu s 23 retka i 23 stupca. U gornji lijevi kut upišite formulu za ostatak pri dijeljenju ćelije s istim koordinatama u prvoj kartici, brojem koji odgovara vašoj skupini. Tu formulu također kopirajte u ostatak tablice, na isti način kao na prvoj kartici.

Odaberite onoliko boja koliko ste različitih ostataka dobili. Njima obojite Pascalov trokut tako da boje odgovaraju ostatcima.



7.2. Istaknute linije Pascalova trokuta

Što ćemo raditi?

U Pascalovu trokutu postoje istaknute linije: retci i „dijagonale“ (svejedno je u koju stranu su nagnute, zbog simetrije). Promatrat ćete pravilnosti koje proizlaze iz različitih grupiranja brojeva u Pascalovu trokutu u retke i „dijagonale“.

U čemu je problem?

Odaberite neki redak u Pascalovu trokutu. Što možete reći za brojeve u njemu? Pokušajte ih zbrojiti ili shvatiti kao znamenke u nekom višeznamenkastom broju (s prijenosom). Za neke retke postoji svojstvo koje veže njihov drugi član s ostalim „unutarnjim“ članovima.

Primjećujete li neke pravilnosti na prvih nekoliko „dijagonala“?

Kako to izgleda?

Za pomoć pri rješavanju gornjih pitanja poslužite se prvom karticom iz proračunske tablice koju ste stvorili u aktivnosti Pascalov trokut modulo *n*.

Možete li pretpostaviti?

Odaberite tri uzastopna retka i zbrojite brojeve u svakom od njih. Uočavate li pravilnost? Možete li pogoditi formulu za zbroj n-tog retka?

Ako promatrate prvih pet redaka kao brojeve čije znamenke su zapisane u ćelijama (1, 11, 121...), što možete reći o tom nizu? Jeste li u redovnoj nastavi čuli za takav niz brojeva? Ako biste htjeli da se taj obrazac nastavi i nakon **šestog** retka, kako bi trebalo čitati višeznamenkaste brojeve?

Ako redak počinje prostim brojem (nakon jedinice), što vrijedi za ostale „unutarnje“ brojeve u tom retku?

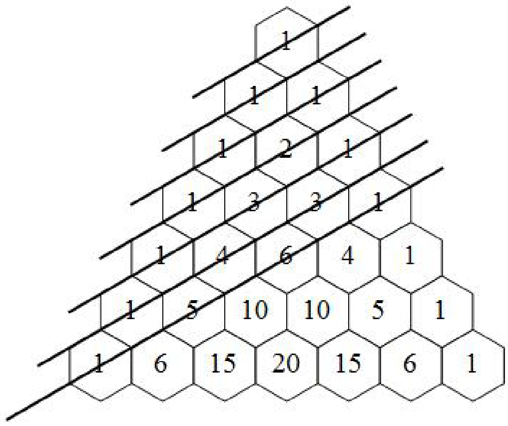
Brojevi na prvoj „dijagonali“ očito su samo jedinice. Što uočavate kod brojeva na drugoj „dijagonali“? Možete li naći pravilo po kojem su dobiveni brojevi na trećoj „dijagonali“?

Potražite pomoć tehnologije.

U prošloj aktivnosti došli ste do nekih slutnji. Razmislite kako biste ih provjerili u programu za izradu proračunskih tablica. Primjerice, možete u prvoj kartici dodati jedan stupac u kojem ćete računati zbrojeve redaka, te još jedan za niz za koji ste pretpostavili da je rješenje. Možete formirati višeznamenkaste brojeve (za prvih pet redaka) tako da ih pretvorite u tekst, konkatenirate te rezultat natrag pretvorite u broj.

Kako bi to riješila teorija?

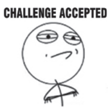
Prisjetite se binomne formule za izraz $(a+b)^n$. Koliki moraju biti monomi (a i b) da bi se na desnoj strani dobio zbroj samih binomnih koeficijenata? Za te monome izračunajte lijevu stranu i provjerite slaže li se s vašom slutnjom o zbroju redaka.



Zapišite višeznamenkasti broj 14641 pomoću njegovih znamenaka i dekadskih jedinica. Koliki sada moraju biti monomi da se takav izraz dobije na desnoj strani? Opet, za te monome izračunajte lijevu stranu i provjerite slaže li se s vašom slutnjom.

Kako glasi formula za $\binom{n}{k}$ pomoću faktorijela? Ako je n prost, čime bi se jedino mogao skratiti u tom razlomku?

Brojevi u istom retku imaju isti n. Gdje leže brojevi koji imaju isti k? Iskoristite formulu s faktorijelima da biste dokazali svoju slutnju o dijagonalama.



Možemo li više?

Promotrite ovakve „normale“ (okomice na „dijagonale“) u Pascalovu trokutu. Ako zbrojite brojeve na svakoj od njih, prepoznajete li niz zbrojeva koje dobijete? Možete li to dokazati?

Kako smo radili i što smo naučili?

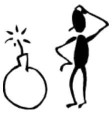
Literatura

http://www.mathsisfun.com/pascals-triangle.html (20.3.2016.)

7.3. Analiza i prikaz podataka na TI84

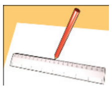
Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti istraživati i prikazivati podatke na grafičkom kalkulatoru TI84.



U čemu je problem?

Učenici 3.a i 3.b razreda pisali su test. Kako usporediti rezultate? Koji je razred bio uspješniji?



Kako to izgleda?

Uspoređivanje podataka bez grafičkog prikaza

Upišite rezultate testa u liste L1 i L2.

- STAT 1:Edit

3.a	86	76	95	86	78	86	100	51	51	70	45	76	51	54	95
3.b	86	77	96	90	63	68	86	100	100	95	72	95	99	63	72

45	65	62	59	78	76	46	32	70	68						
99	28	82	81	59	77	90	84	72	90	90	72	86	68	63	100

Možete li pretpostaviti?

Prije nego sve rezultate grafički prikažete, opišite svaki skup podataka.

Da biste bolje procijenili srednju vrijednost i raspršenje za svaki skup podataka, podatke u listama poredajte u padajući niz:

- STAT 3:SortD(.
- 2nd STAT i odaberite listu L1.
- Ponovite sve za listu L2.

Napravite model.

Za crtanje histograma morate odabrati veličinu prozora. Koliki je raspon podataka?

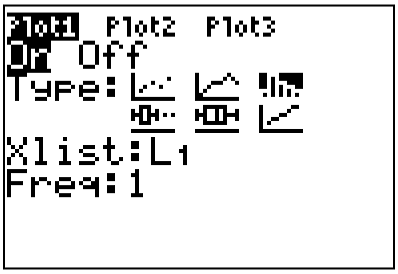
Koju ćete širinu razreda odabrati? Na primjer, ako je širina razreda 10, koliko je učenika kojeg razreda postiglo rezultat između 70 i 79?

Potražite pomoć tehnologije.

Uspoređivanje podataka pomoću histograma

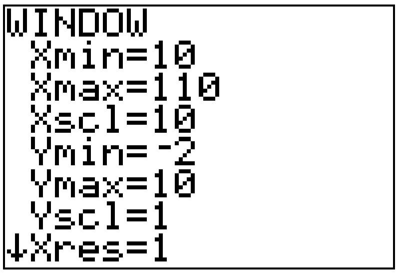
Nacrtat ćemo histogram za svaki skup podataka.

Pritisnite Y = i obrišite sve funkcije. Pritisnite 2nd Y =, odnosno [STAT PLOT] i odaberite Plot1.



Uključite Plot On i odaberite prikaz histograma. Za Xlist unesite ALPHA L1 ili ga potražite u popisu lista.

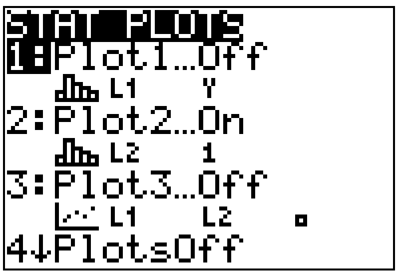
Pritisnite WINDOW i promijenite dimenzije prozora koje ste odabrali u 2. pitanju ili ga postavite kao što je prikazano. Xscl određuje širinu razreda.



Pritisnite GRAPH za prikaz histograma.

Pritisnite TRACE za očitavanje stupaca.

Pritisnite WINDOW i promijenite vrijednost Xscl za prilagođavanje širine stupaca histograma. Isprobavajte s različitim vrijednostima Xscl.

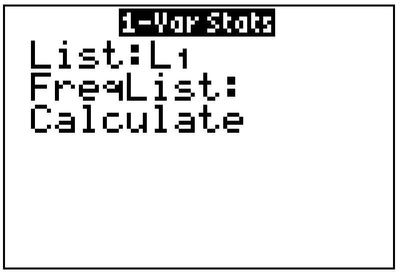


Ponovite ove korake za histogram u Plot2 liste L2.

1. Zašto je važno da su skale iste kada se uspoređuju podatci?
2. Usporedite dva histograma. Objasnite oblik i raspršenje.
3. Procijenite aritmetičku sredinu i medijan za svaki razred. Što mislite, u kojem će se razredu naći aritmetička sredina? Hoće li medijan biti veći ili manji od aritmetičke sredine? Zašto?

Sada usporedite svoju procjenu srednje vrijednosti i medijana sa stvarnim vrijednostima.

Pritisnite STAT, strelicom se pomaknite udesno na CALC i pritisnite ENTER za odabir računanja s jednom varijablom.



Pritisnite 2nd [LIST] i odaberite listu L1. Pomaknite se strelicom dolje na Calculate i pritisnite ENTER.

Zapišite srednju vrijednost i medijan.

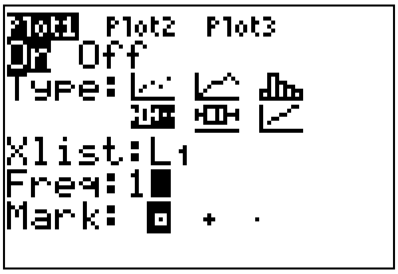
Ponovite postupak za listu L2.

4. Usporedite stvarne vrijednosti s procjenom za oba razreda. Je li vaša procjena bila dobra?
5. Kako izgledaju histogrami ako im promijenimo širinu stupaca? Istražite mijenjajući vrijednost Xscl u WINDOW. Što se događa?

Uspoređivanje podataka pomoću brkate kutije

Ponekad je brkata kutija prikladnija za uspoređivanje dvaju skupova podataka. Nacrtajmo brkatu kutiju za svaki skup podataka.

Pritisnite 2nd Y = za promjenu [STAT PLOT] za Plot1 i Plot2 u prikaz brkate kutije.



Za namještanje prozora odaberite Zoom Stat.

Pritisnite TRACE i strelicom se pomičite po grafu za očitavanje minimuma, donjeg kvartila, medijana, gornjeg kvartila i maksimuma za obje brkate kutije.

Kako bi to riješila teorija?

1. Koliki je interkvartilni raspon za pojedini razred?
2. Što predstavlja „točkica” na brkatoj kutiji za rezultate 3.b razreda?
3. Kako to da za podatke iz 3.b razreda postoje ekstremne vrijednosti (outliers), a za 3.a razred ne postoje?

4. Što primjećujete za najboljih 25% rezultata od oba razreda? Usporedite ove dvije brkate kutije, uključujući oblik i raspršenje.

5. Što zaključujete o rezultatima testa za 3.a i 3.b razred? Objasnite.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

Vollmar & others. 2008. *Mathematics for the International Student, MYP 5 Plus*. Haese & Harris Publications.

https://education.ti.com/en/84activitycentral/us/Statistics (pristupljeno 14. ožujka 2016.)

7.4. Vjerojatnost – domino lanac

Što ćemo raditi?

Računat ćete vjerojatnosti.

Kako to izgleda?

Dobili ste domino pločice. Pronađite pločicu na kojoj piše Početak. Na toj je pločici opisana posuda s kuglicama.

Napravite model.

Iz opisane posude izvlačimo jednu kuglicu, a zatim još jednu bez vraćanja. Nacrtajte vjerojatnosno stablo.

Koristeći stablo odredite vjerojatnost događaja sa prve pločice. Potražite pločicu na kojoj je napisana ta vjerojatnost pa ju postavite uz prvu pločicu. Nastavite tako sve dok ne složite sve pločice u niz.

$\frac{1}{15}$	**1** Izvlačimo dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da niti jedna nije bijela?
$\frac{8}{15}$	**2** Izvlačimo dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da su izvučene bijela i plava?

Početak U posudi se nalaze tri bijele, dvije crne i pet plavih kuglica.	3 Izvlačimo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da je bijela?
$\frac{1}{3}$	4 Izvlačimo dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da je izvučena barem jedna bijela ili barem jedna plava?
$\frac{4}{5}$	5 Izvlačimo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da nije plava?
$\frac{3}{10}$	6 Izvlačimo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da je bijela ili plava?

$\frac{1}{2}$	**7** Izvlačimo dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da su obije bijele?
$\frac{1}{5}$	**8** **Kraj**
$\frac{44}{45}$	**9** Izvlačimo dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da je više bijelih nego plavih?
$\frac{7}{15}$	**10** Izvlačimo dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da je barem jedna bijela?

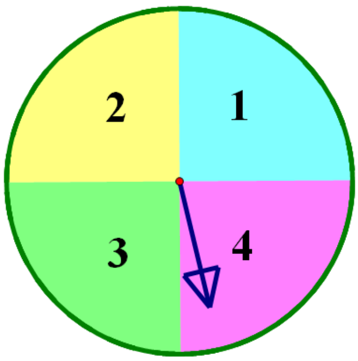
7.5. Pravedna igra

Što ćemo raditi?

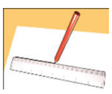
U ovoj ćete aktivnosti istražiti na modelu, pomoću tehnologije i teorijski, jesu li zadane igre pravedne. Odredit ćete frekvencije, relativne frekvencije i vjerojatnost pobjede u zadanoj igri.

U čemu je problem?

Vlatko je predložio Maji sljedeću igru: „Svatko od nas jednom zavrti spiner s četirima poljima.



Ja pobjeđujem ako je zbroj 5, a ti ako je zbroj 7.” Maja se nije složila i predlaže ovakva pravila: „Ja pobjeđujem ako je zbroj 5, a ti ako je zbroj 6.” Vlatko se složio.



Kako to izgleda?

Zapišite u kojem slučaju pobjeđuje Vlatko, a u kojem Maja u prvoj, a u kojem slučaju u drugoj igri.

Možete li pretpostaviti?

Što mislite jesu li podjednake šanse za pobjedu u prvoj igri? A u drugoj?

Napravite model.

Podijelite se u parove. Odigrajte igru dvadeset puta i rezultate upišite u tablicu:

Zbroj	5	6	7
frekvencija (koliko puta se pojavio)			
relativna frekvencija (frekvencija/ukupni broj)			

Usporedite rezultate s ostalim grupama. Napravite zajedničku tablicu za sve podatke u razredu. Koji se zbroj najčešće pojavio? Kolika je relativna frekvencija za taj zbroj?

Potražite pomoć tehnologije.

Ponovite igru uz pomoć tehnologije velik broj puta. Odredite frekvenciju i relativnu frekvenciju za zbroj 5, 6 i 7. Je li Maja bila u pravu kad se nije složila s Vlatkovim prijedlogom? A Vlatko? Obrazložite.

Kako bi to riješila teorija?

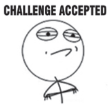
Do sada ste izvodili pokus i određivali frekvencije i relativne frekvencije. Sada ćete izračunati vjerojatnost da se pojavi neki zbroj. U tablicu upišite zbrojeve.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="4">Broj na drugom spineru</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Broj na prvom spineru</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Zbroj 5 se u tablici pojavio ________ puta, a ukupni broj je ____________. Vjerojatnost da zbroj bude 5 je ________________.

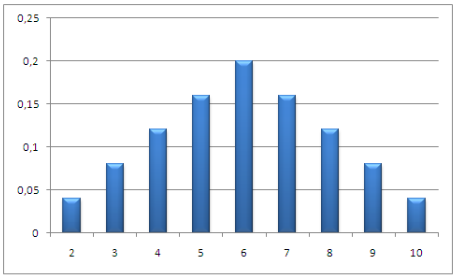
Izračunajte vjerojatnost da zbroj bude 6 i da bude 7. Usporedite vjerojatnosti s relativnim frekvencijama. Što zaključujete?

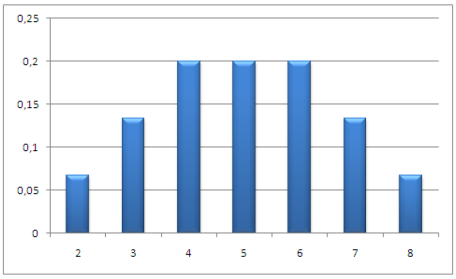
Je li Vlatkova igra pravedna? A Majina?

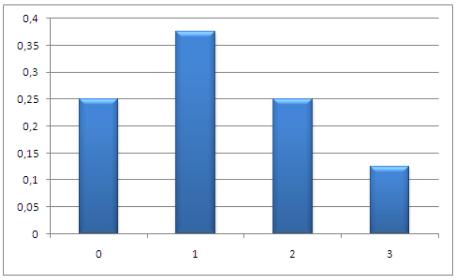


Možemo li više?

1. Promotrite grafove koji prikazuju relativne frekvencije u pokusu s dvama spinerima koji se ponavljao velik broj puta. Opišite spinere.

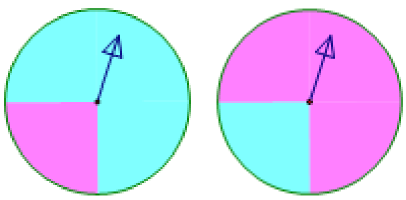
a. 

b. 

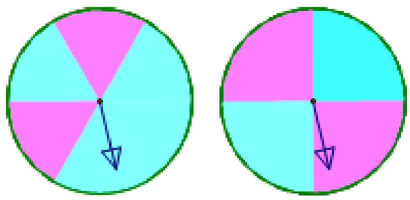
c. 

2. Promotrite sljedeće igre. Vrtimo ova dva spinera, a igrač pobjeđuje ako zavrti istu boju na oba. Ispitajte jesu li igre pravedne.

a.



b.

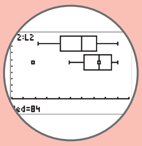


3. Smislite igru sa spinerom, kockicama, kartama ili novčićem koja će biti pravedna.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura:

http://nrich.maths.org/6123 (pristupljeno 14. veljače 2016.)



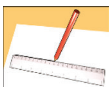
7.6. Problem rođendana

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete vježbi pomoću simulacije na grafičkom kalkulatoru određivati vjerojatnost događaja, odnosno rješavati problemski zadatak poznatiji kao „problem rođendana“.

U čemu je problem?

Matko se volio nadmudrivati sa svojim prijateljima iz razreda. Jednog je dana tema bila klađenje. Matko se htio kladiti da će bacanjem igraće kocke pasti broj koji nije djeljiv s 3. Većina učenika nije prihvatila okladu iz razumljiva razloga. Zatim je rekao da će se kladiti da u razredu koji broji 28 učenika postoji dvoje učenika koji imaju rođendan istog dana. Sada su gotovo svi prihvatili izazov klađenja. Zašto? Ako biste se i vi kladili, kome biste se priklonili? Tko ima veće šanse dobiti okladu?



Kako to izgleda?

Prikupite podatke o rođendanima učenika iz svog razreda. Je li vam to dovoljno da donesete odluku?

Možete li pretpostaviti?

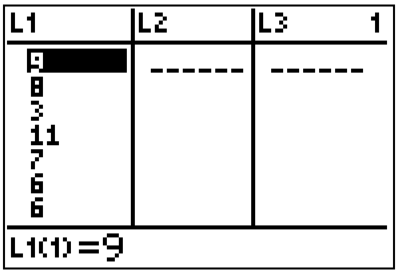
Procijenite tko ima veće šanse da dobije okladu i koliko iznosi vjerojatnost da dvije osobe iz danog razreda imaju rođendan istog dana? Procijenite traženu vjerojatnost ako je u razredu 23 učenika, 28 ili 45 učenika.

Potražite pomoć tehnologije.

Ako ste u razredu od 28 učenika pronašli dvoje učenika koji imaju rođendan istog dana, znači li to da će se to uvijek dogoditi? Kolika je vjerojatnost da dvije osobe u nekoj skupini imaju isti dan rođendan? Tu će vam pomoći tehnologija. Koristit ćete grafički kalkulator kako biste jednostavnije prikupili podatke.

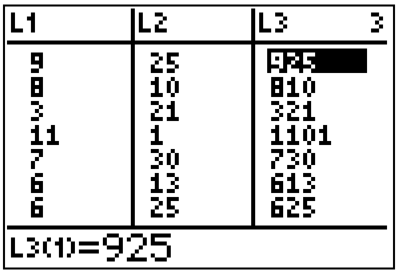
Cilj je generirati listu slučajno odabranih pozitivnih cijelih brojeva u kalkulatoru.

- odaberite STAT meni i opciju1: Edit
- postavite kursor na naslov liste L1
- odaberite MATH meni
- koristite strelicu da dođete na meni: PRB
- odaberite opciju5: randlnt(;
- nakon randlnt(unesite brojeve: 1, 12, 28
- zatvorite zagradu i pritisnite ENTER.



Ovaj postupak generira listu od 28 slučajno odabranih cijelih brojeva i koristi jedino brojeve između 1 i 12 (mjesec rođenja). Napravite isto i za dan rođenja.

- postavite kursor na naslov liste L2
- odaberite MATH meni
- odaberite meni: PRB
- odaberite opciju5: randlnt (1, 31, 28)



U listu L3 ćemo upisati datum oblika MMDD:

- u L3 upišite 100*L1 + L2

Sljedeći je korak otkriti ima li u listi podudaranja.

- koristite STAT meni i SortA(
- upišite: L3,L1,L2 i pritisnite ENTER
- odaberite STAT, zatim Edit.

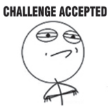
Pogledajte u sortiranoj tablici L3 ima li podudaranja.

Nakon što ste ponovili simulaciju nekoliko puta, prikupite podatke unutar svoje grupe i zabilježite broj uspjeha (podudaranja) te ukupan broj pokušaja, odnosno simulacija. Kolika je uspješnost? Kolika je uspješnost ako prikupite rezultate ostalih učenika iz razreda? Promijenite broj učenika u 23. Kolika je tada uspješnost?

Kako bi to riješila teorija?

Odredite računski vjerojatnost da dvije osobe imaju rođendan istog dana ako je u skupini:

- 20 osoba
- 23 osobe
- 28 osoba
- 30 osoba
- 60 osoba.



Možemo li više?

Odredite vjerojatnost da dvije osobe u skupini od n osoba imaju rođendan isti dan. Koji je najmanji broj osoba potreban kako bi vjerojatnost da dvije među njima imaju rođendan isti dan bila veća od:

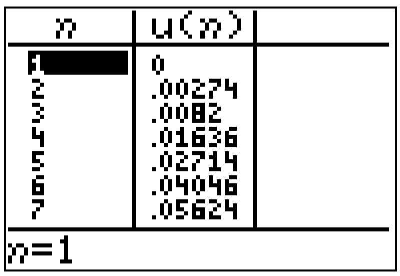
- 0.5
- 0.8
- 0.9?

Dobivene podatke iz prethodnog istraživanja upišite u tablicu, prikažite podatke grafički te pokušajte naći vezu između vjerojatnosti i broja osoba.

Provjerite svoje zaključke uz pomoć tehnologije.

Generiranje tablice i grafa funkcije koja opisuje ovisnost vjerojatnosti o veličini promatrane grupe

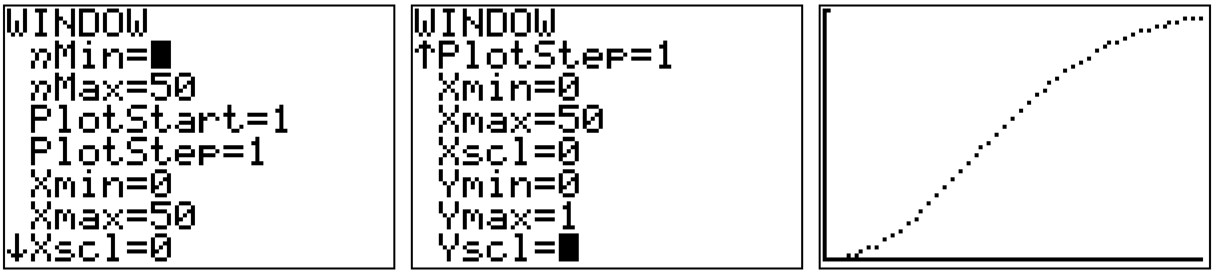
- odaberite MODE, zatim Seq (Func par pol seq)
- odaberite Y = i postavite nMin = 1
- upišite formulu $u(n)=1-(1-u(n-1))\cdot(366-n)/365$
  u se dobiva pomoću 2nd 7, a n pomoću X,T,Θ,n
- postavite u(nMin) = {0}
- pogledajte vjerojatnosti u tablici 2ND GRAPH.



n	u(n)
1	0
2	.00274
3	.0082
4	.01636
5	.02714
6	.04046
7	.05624

n=1

Prilagodite WINDOW te nacrtajte graf funkcije GRAPH.



Obrazložite formulu koja se koristi za generiranje tablice.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

http://illuminations.nctm.org/Lesson.aspx?id=1198 (pristupljeno 14. 2. 2016.)

Sadržaj