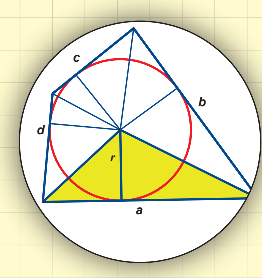
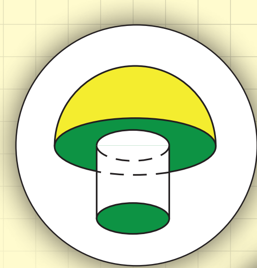
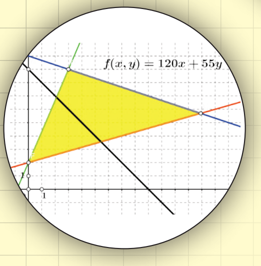
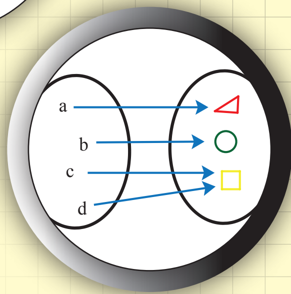
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

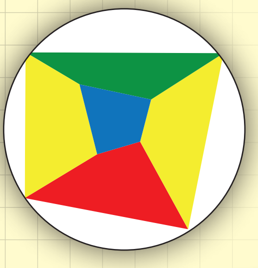


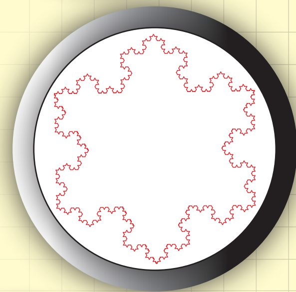


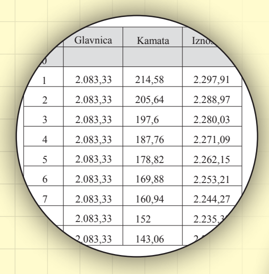




Funkcije 1
Funkcije 2

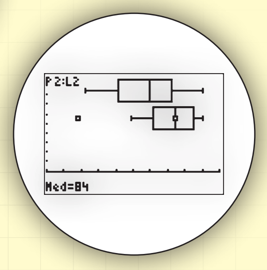


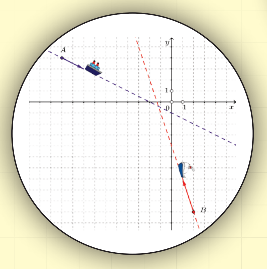




$$P$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$





2. vježbenica

Sadržaj ove publikacije/emitiranog materijala isključiva je odgovornost XV. gimnazije

Europska unija
Ulaganje u budućnost

STRUKTURNI I INVESTICIJSKI FONDOVI

ESF RAZVOJ LJUDSKIH POTENCIJALA

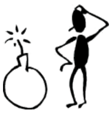
Projekt je sufinancirala Europska unija iz Europskog socijalnog fonda

3. Funkcije 1.

3.1. O funkcijama

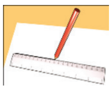
Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti usvojiti pojam funkcije i neka njezina obilježja.



U čemu je problem?

Funkcija je zadana pravilom pridruživanja. No, je li svakim pravilom pridruživanja zadana funkcija? Kako iz različitih zapisa prepoznati funkciju?



Kako to izgleda?

Ispišite sve pojmove kojih se sjetite, a koji su povezani s pojmom funkcije. Povežite ih sve u mrežu. Definirajte funkciju i nabrojite njena svojstva.

Možete li pretpostaviti?

Kako pomoću grafičkog prikaza možemo odrediti je li to funkcija ili nije?

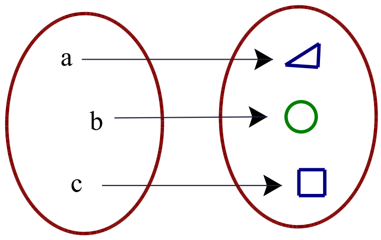
Primijenite naučeno.

1. Kojim je od navedenih skupova uređenih parova zadana funkcija? Obrazložite.

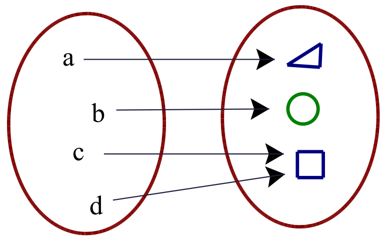
   a. $(1,1),(2,3),(4,6),(5,5)$
   b. $(1,1),(2,1),(4,1),(5,-1)$
   c. $(-1,1),(-1,3),(-1,5),(1,5)$
   d. $(-3,0),(-2,0),(-2,1),(2,1)$.

2. Na sljedećim skicama strelice označuju pridruživanje elemenata iz jednog skupa u drugi skup. Koje od pridruživanja predstavlja funkciju? Obrazložite.

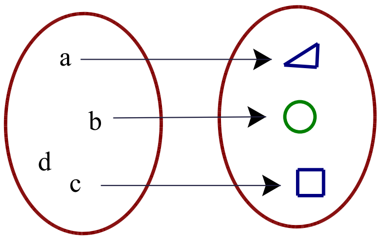
a.



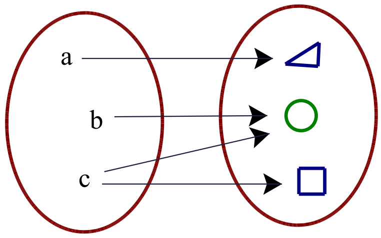
b.



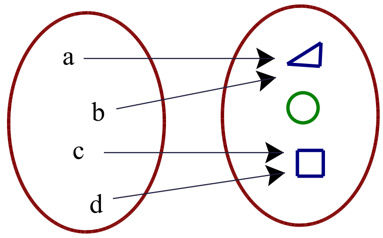
c.



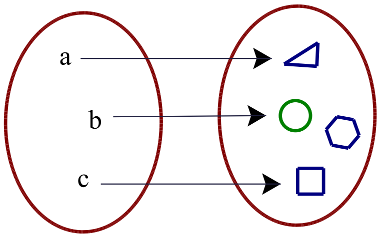
d.



e.



f.

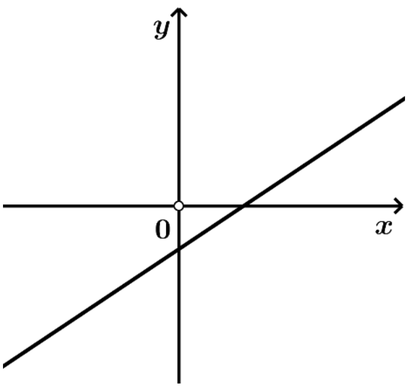


3. Ako na skicama iz prethodnog zadatka okrenemo smjer strelice, koje od pridruživanja predstavlja funkciju?

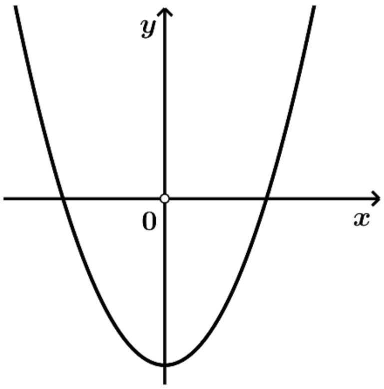
4. Za funkcijska pridruživanja iz 2. zadatka odredite domenu, kodomenu i sliku funkcije.

5. Predstavljaju li sljedeće krivulje grafove funkcija?

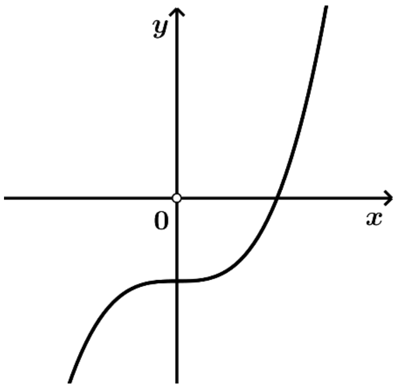
a.



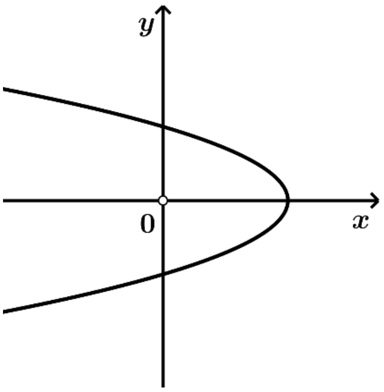
b.



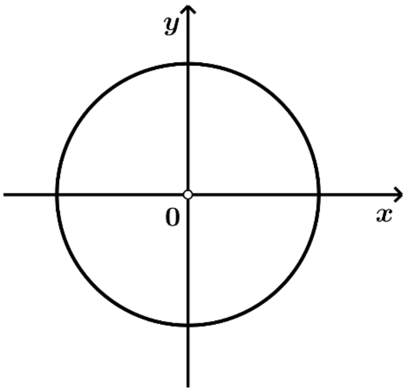
c.



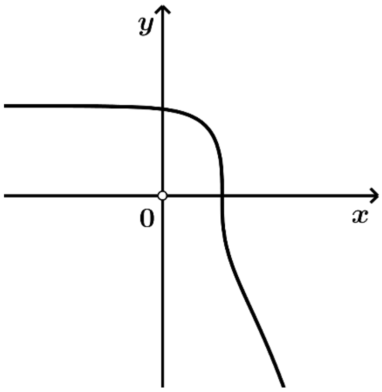
d.



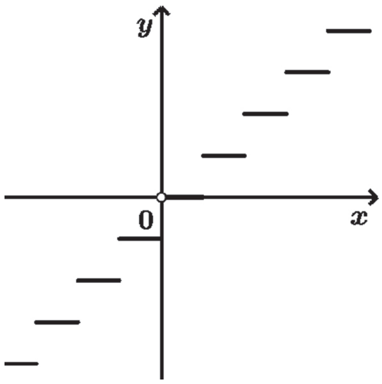
e.



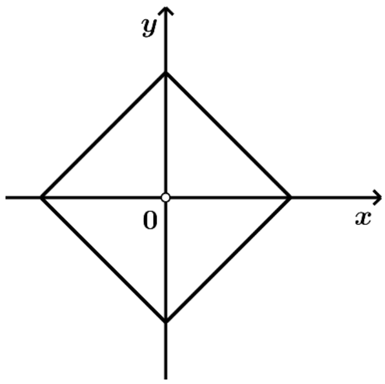
f.



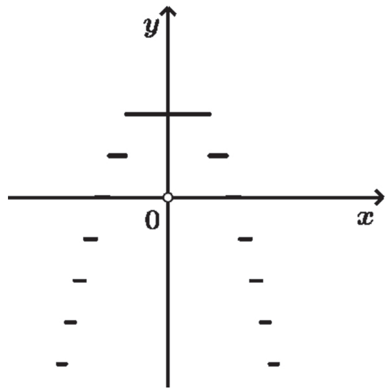
g.



h.

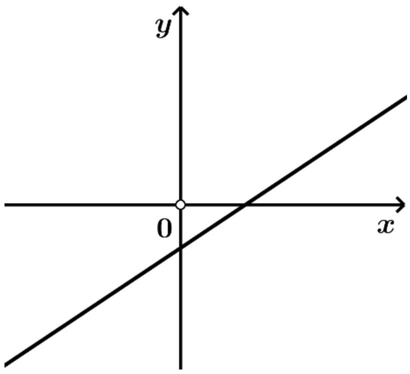


i.

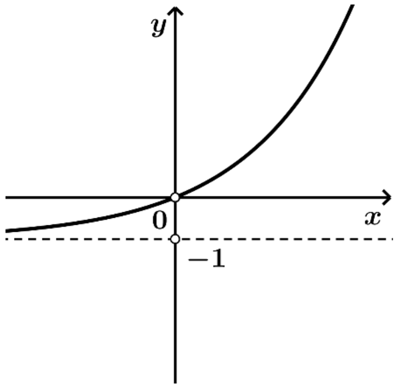


6. Odredite domene i slike funkcijama čiji su grafovi prikazani na slikama.

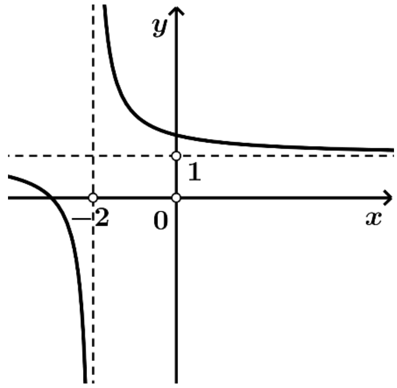
a.



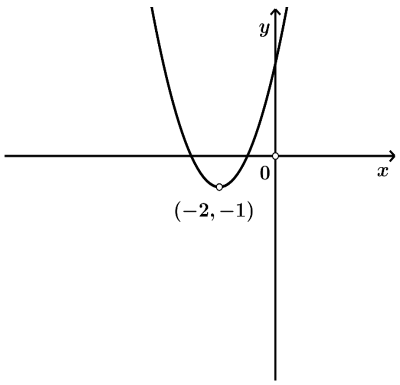
b.



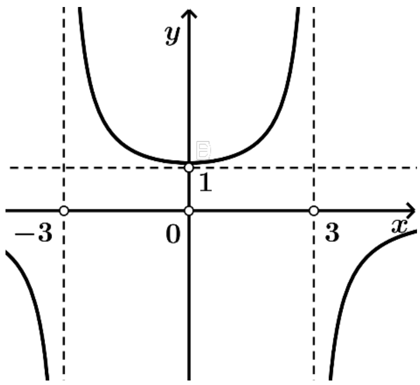
c.



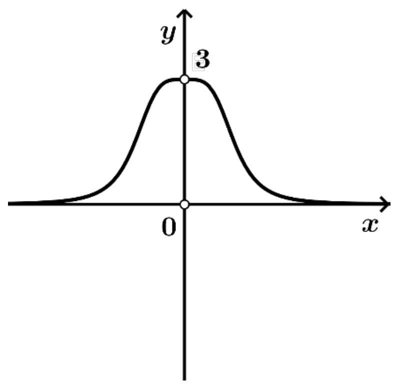
d.



e.



f.

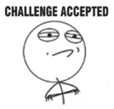


7. Odredite vrijednost funkcije $f(x)=x-3x^2$ za:

a. $x=1$ b. $x=-2$ c. $x=1.5$ d. $x=\frac{1}{5}$ e. $x=\sqrt{2}$.

8. Za funkciju $f(x)=\frac{x+1}{2-x}$ odredite vrijednost argumenta x za koji je:

a. $f(x)=0$ b. $f(x)=-3$ c. $f(x)=\frac{3}{2}$ d. $f(x)=-1$.

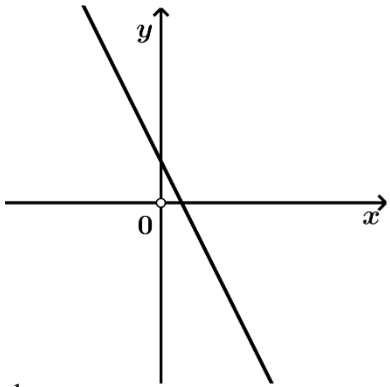


Možemo li više?

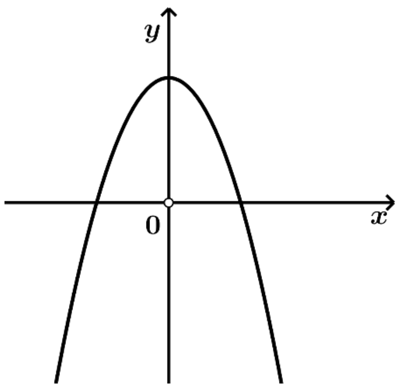
Kada je funkcija injektivna? Kako ćemo na grafu funkcije provjeriti injektivnost?

9. Za funkcije čiji su grafovi prikazani na slikama provjerite jesu li injektivne.

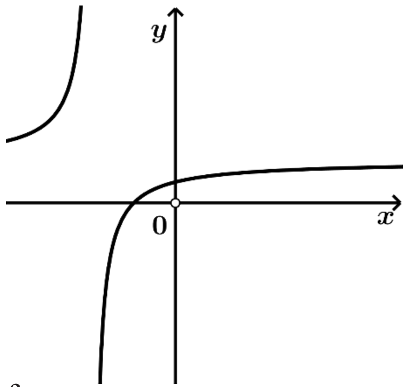
a.



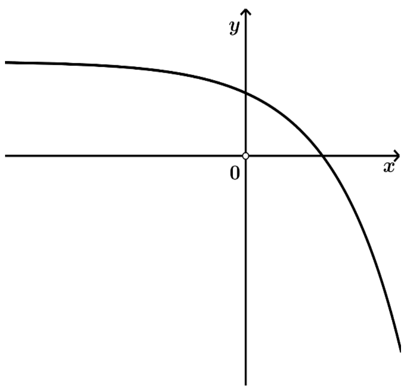
b.



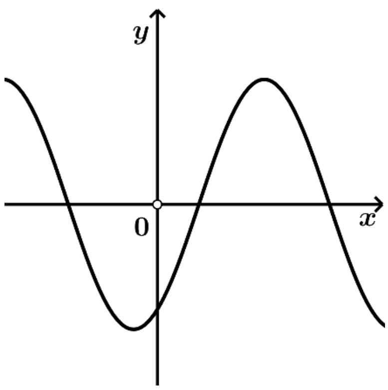
c.



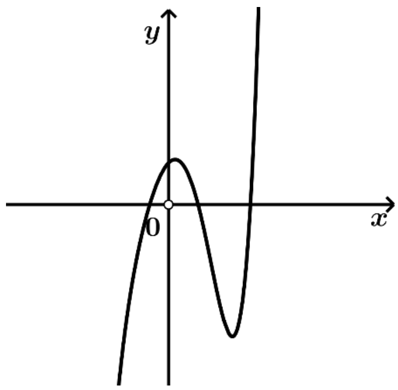
d.



e.



f.



Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

McSeveny, A. 2008. *International Mathematics for the Middle Years 5*. Pearson.

3.2. Polinomi

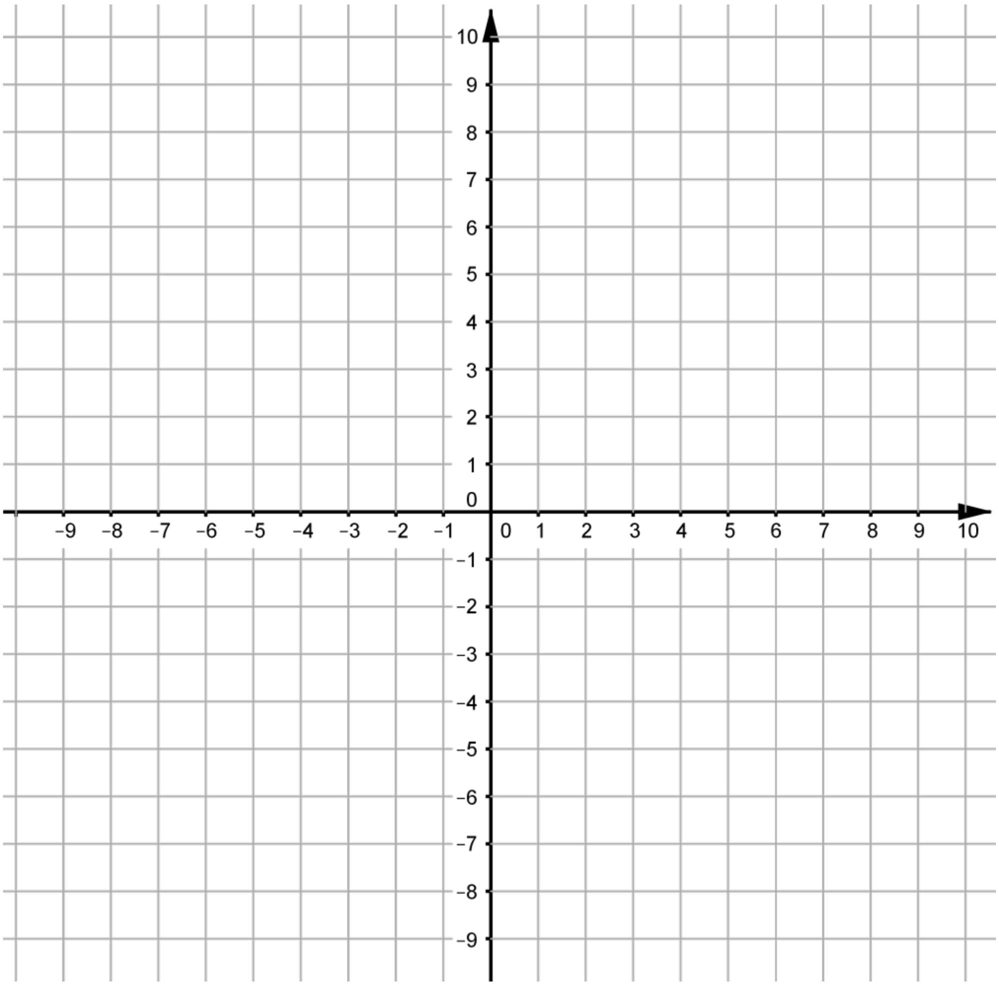
Što ćemo raditi?

Proučavajući vodeće koeficijente polinoma, nultočke i njihove strukosti, crtat ćete grafove zadanih funkcija te opisivati njihov tijek.

U čemu je problem?

Što je dovoljno znati kod polinoma 1. i 2. stupnja za skiciranje grafa funkcije?

1. Skicirajte grafove funkcija zadanih s $f(x)=3x+1$ i $g(x)=-2x+1$ koristeći vodeći koeficijent i nultočku.

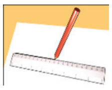


2. Koliko nultočaka imaju funkcije:

$$f_1(x) = -2x^2 + 2x - 4,\ f_2(x) = 2x^2 + 2x - 4,\ f_3(x) = x^2 - 2x + 1\,?$$

Skicirajte njihove grafove također koristeći vodeći koeficijent i nultočku/e.

Opišite tijek funkcija. Koji graf siječe os apscisa, koji ne siječe, a koji dira os apscisa?

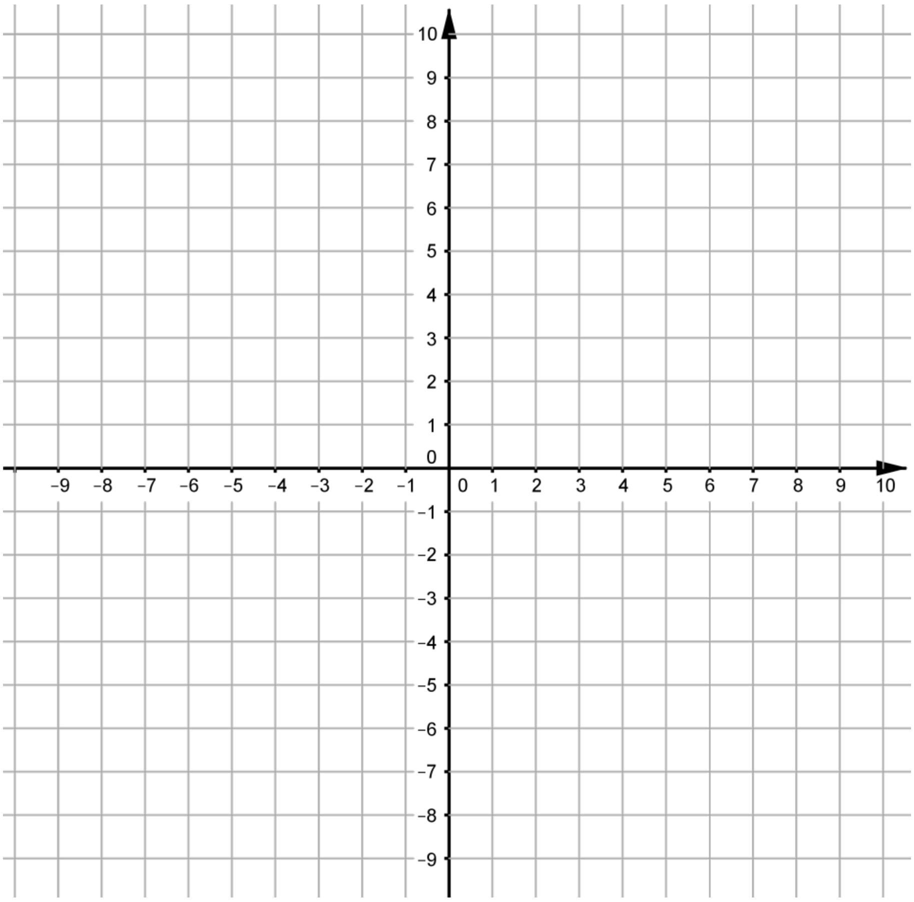


Kako to izgleda?

Na temelju skica odgovorite na postavljena pitanja vezana uz funkcije f_1, f_2 i f_3 iz dijela 2.

- Broj _________ je **jednostruka** nultočka funkcije _________, a ______________ nultočka funkcije ____________.
- Graf funkcije _____ siječe os aspscisa u točkama (__ , __) i (__ , __).
- Graf funkcije _____ ne siječe os apscisa.
- Graf funkcije _____ dira os apscisa u točki (__ , __).

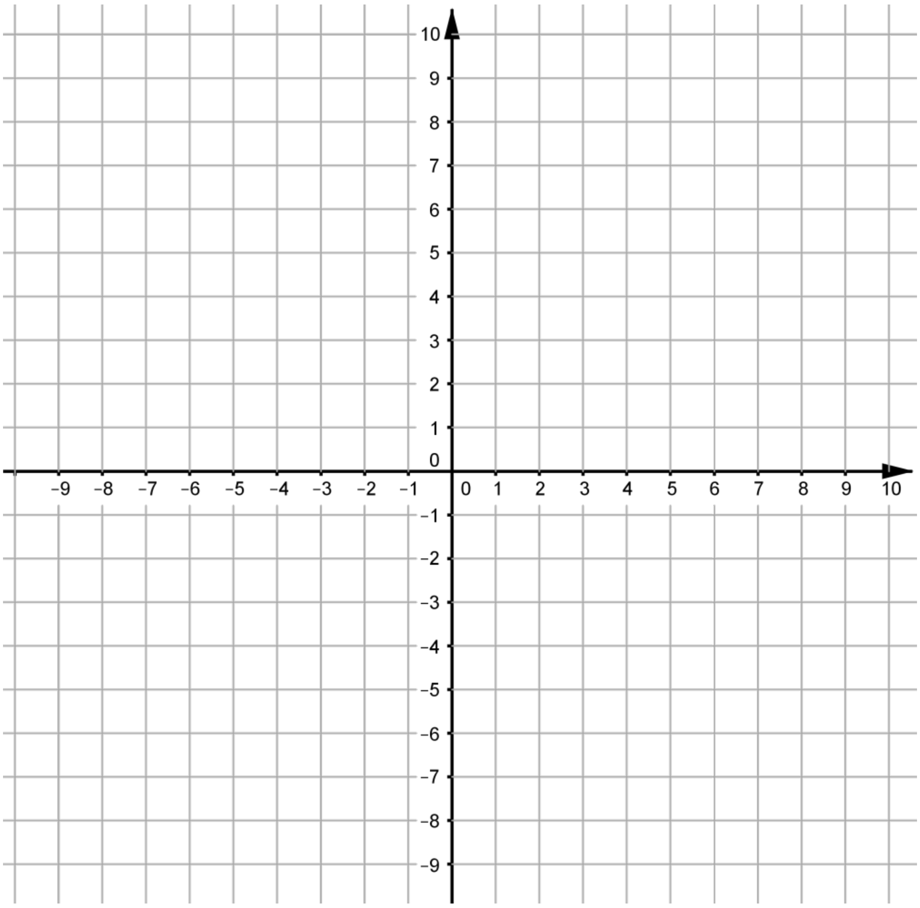
Skice grafova:



Možete li pretpostaviti?

Možete li odrediti koliko nultočaka ima neki polinom te kako njihova strukost utječe na izgled grafa? Koliko nultočaka imaju funkcije $f_1(x)=x^3$, $f_2(x)=x^3-x^2$, $f_3(x)=x^3-x$?

Nacrtajte njihove grafove. Opišite što uočavate i pokušajte izreći poopćenu tvrdnju.



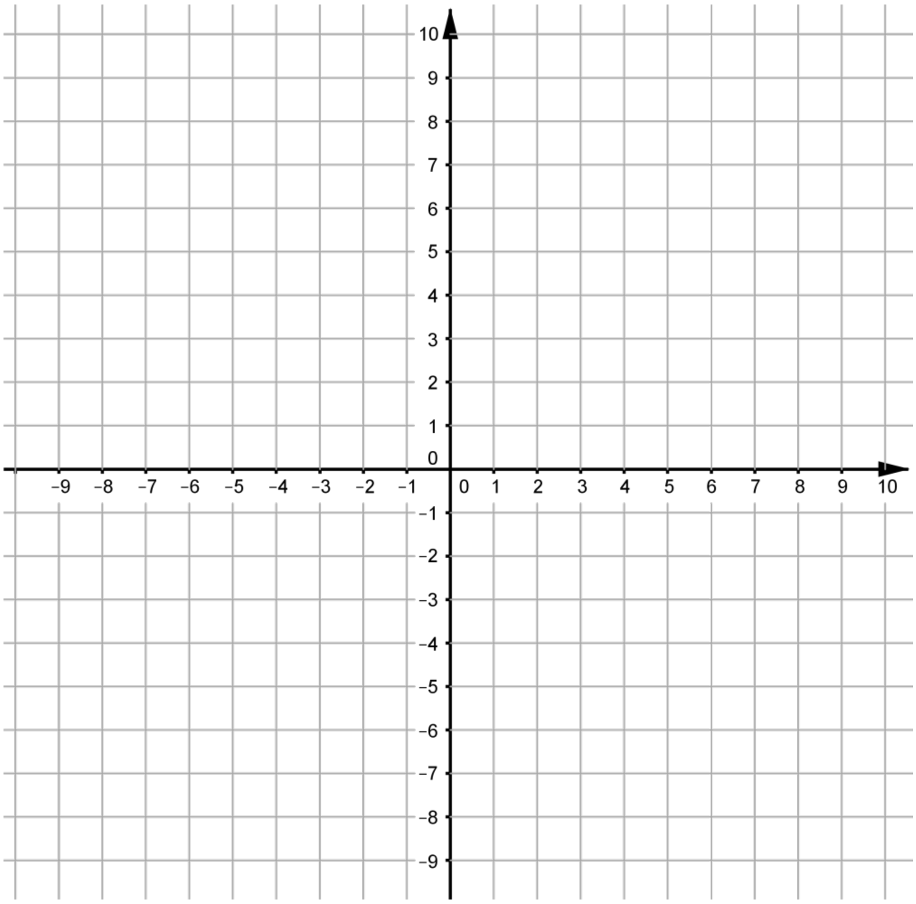
Potražite pomoć tehnologije.

Provjerite svoja opažanja na sljedećim funkcijama:

$f(x)=(x-1)^3$, $g(x)=(x-1)^2(x+1)$, $h(x)=(x-1)(x+1)(x-5)$.

Odredite nultočke i kako će se ponašati graf funkcije u nultočki, skicirajte te tek onda provjerite svoje zaključke pomoću tehnologije.

Skica:



Nacrtajte sada pomoću tehnologije grafove funkcija:

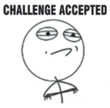
$f(x) = -(x+2)^3,\ g(x) = -x(x+2)(x-3)$.

Promotrite u čemu je razlika u ovim grafovima u odnosu na prethodno nacrtane te možete li svoje zaključke primijeniti i na njih.

Kako bi to riješila teorija?

Nadopunite sljedeće rečenice:

- Ako je nultočka **parne** strukosti, onda su na intervalu blizu te nultočke vrijednosti funkcije istog predznaka, pa graf funkcije __________________ os apscisa.
- Ako je nultička **neparne** strukosti, onda su na intervalu blizu te nultočke vrijednosti funkcije ________________ predznaka, pa graf funkcije ________________ os apscisa.



Možemo li više?

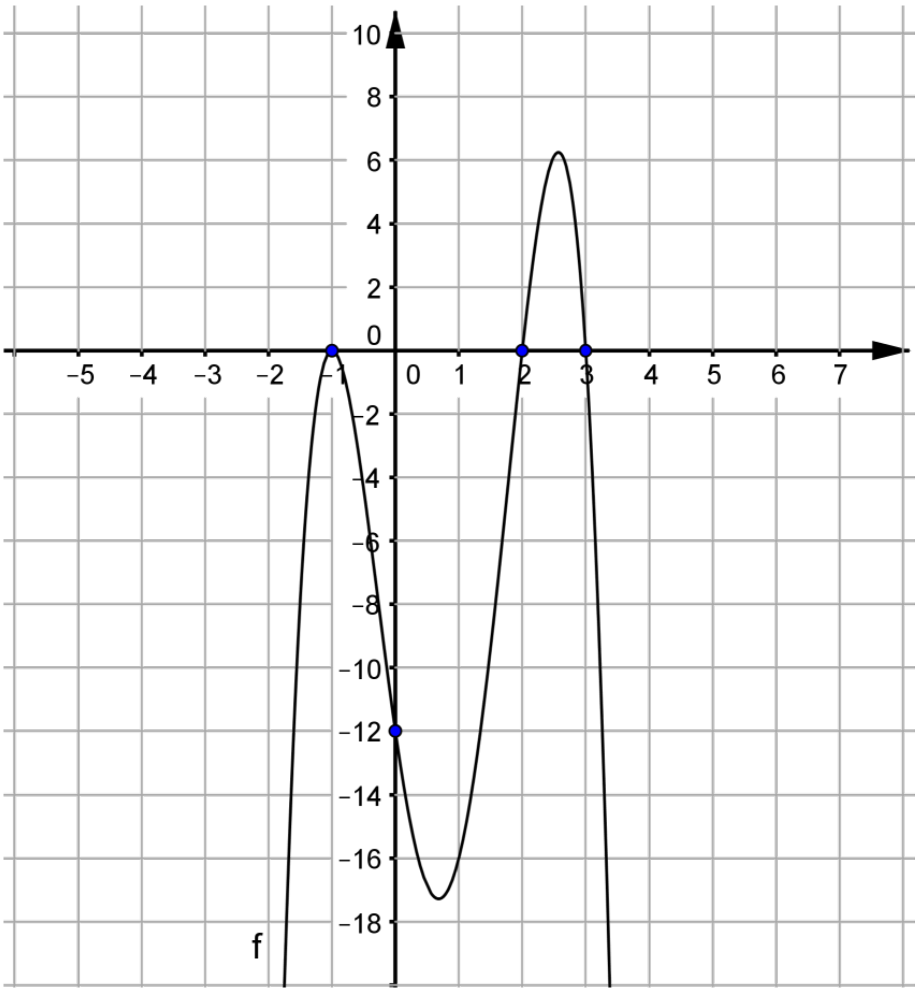
Pomoću prije uočenog, riješite sljedeću nejednadžbu:

$$\frac{(x-2)^3(3+2x)^{11}x(x^2+2)}{(x-1)(-5x+3)^{44}} \leq 0.$$

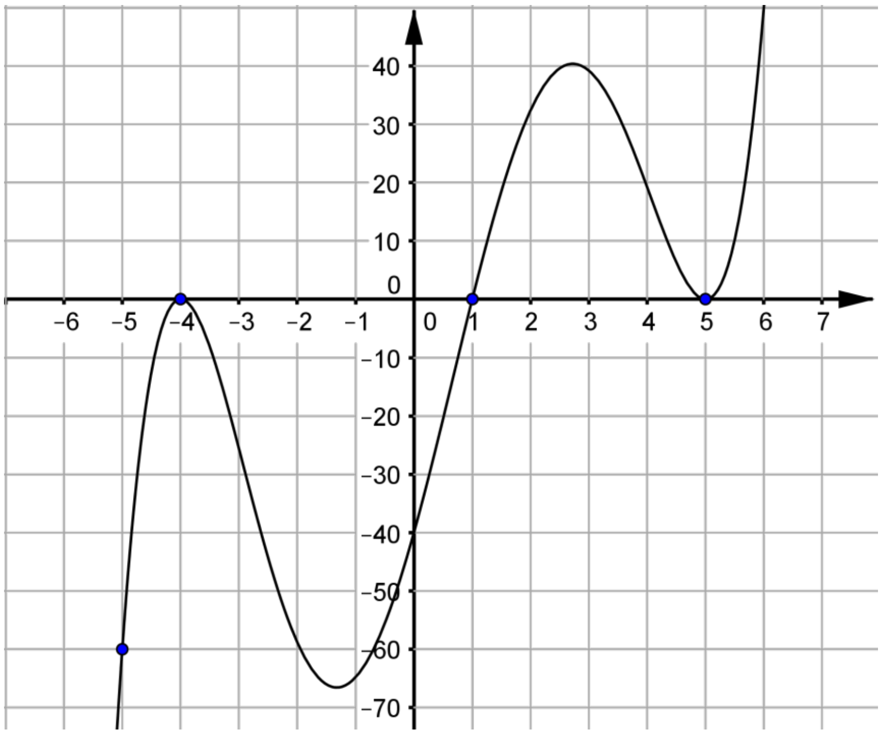
Primijenite naučeno.

Odredite polinome čiji su grafovi prikazani na sljedećim slikama:

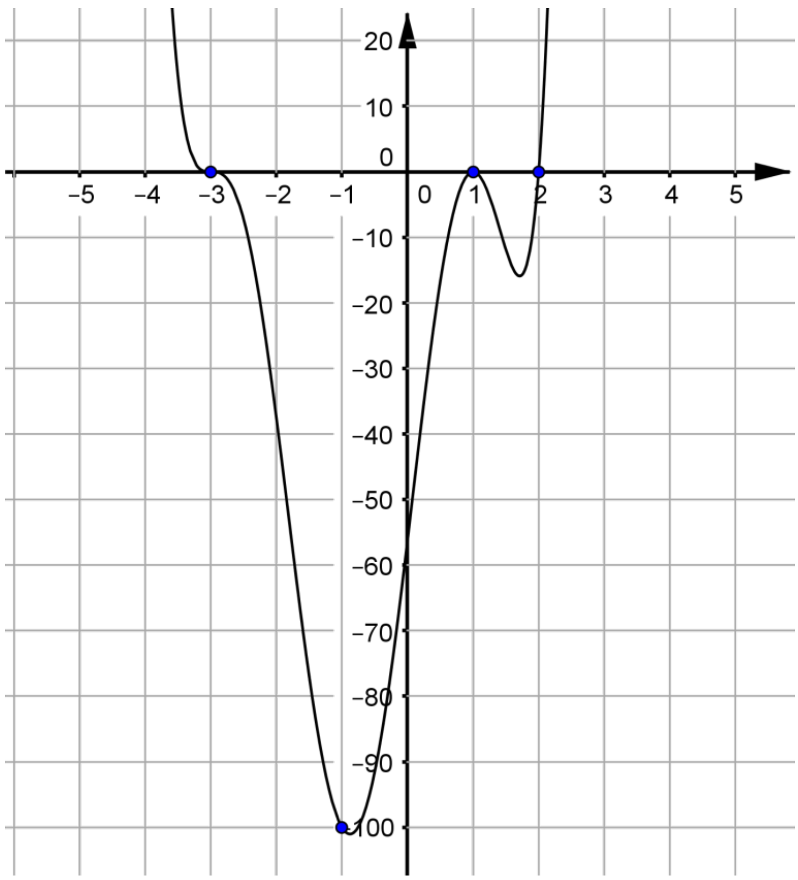
a. Polinom je četvrtog stupnja i grafu pripada točka (0,–12).



b. Polinom je petog stupnja i grafu pripada točka (–5,–60).



c. Polinom je šestog stupnja i grafu pripada točka (–1,–100).



Kako smo radili i što smo naučili?

3.3. Racionalne funkcije

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti crtati grafove različitih racionalnih funkcija (bez tehnologije i uz pomoć tehnologije) te uočiti kako se mijenja oblik grafa. Uz to, određivat ćete domenu racionalnih funkcija, njihove asimptote te intervale rasta/pada.

U čemu je problem?

Zadana je funkcija $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

a. Odredite domenu funkcije f.

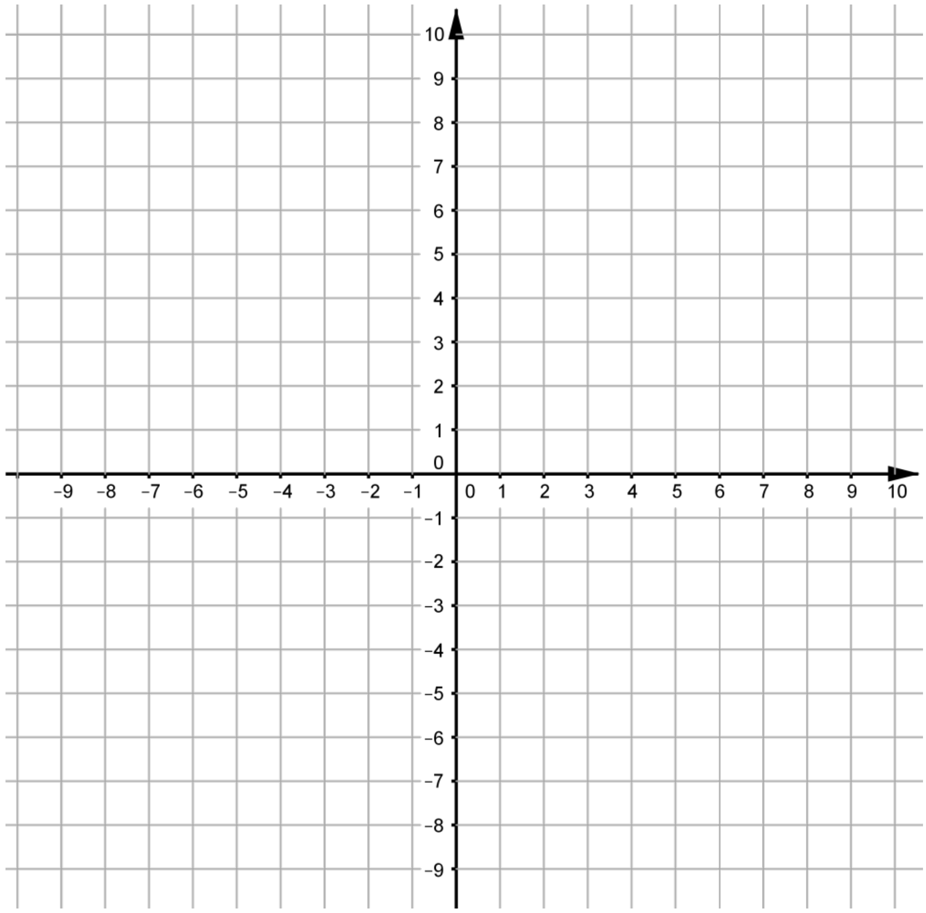
b. Popunite sljedeće tablice:

x	-10	-4	-3	-2	-1	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{1}{4}$	$-\dfrac{1}{10}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$									

x	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	1	2	3	4	10
$f(x)=\dfrac{1}{x}$									

Kako to izgleda?

U koordinatnom sustavu nacrtajte (bez tehnologije) graf funkcije *f*.



- Opišite izgled dobivenog grafa.

  Graf koji ste dobili dio je grafa racionalne funkcije $f(x)=\frac{1}{x}$.

  Općenito, **racionalna** je **funkcija** funkcija oblika $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$, gdje su $P_n(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi, $Q_n(x)\neq 0, \forall x\in R$.

- Kojim se pravcima graf funkcije približava?

  Pravac kojemu se graf funkcije približava na nekom dijelu zove se **asimptota**.

Možete li pretpostaviti?

Sada ćemo proučavati grafove racionalnih funkcija oblika:

- $f(x)=\frac{a}{x}, a\in R$
- $f(x)=\frac{1}{x}+b, b\in R$
- $f(x)=\frac{1}{x+c}, c\in R$

Možete li pretpostaviti kako će izgledati grafovi tih funkcija u odnosu na graf funkcije $f(x)=\frac{1}{x}$?

Potražite pomoć tehnologije.

1. Graf funkcije $f(x)=\frac{a}{x}, a\in R$.

a. Nacrtajte u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija:

$$f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\frac{2}{x},\ h(x)=\frac{3}{x},\ i(x)=\frac{0.5}{x},\ j(x)=\frac{0.25}{x}.$$

Kako se mijenja oblik grafa za različite vrijednosti koeficijenta u brojniku?

b. Napravite klizač a pa nacrtajte graf funkcije $f(x)=\frac{a}{x}$. Mijenjajte vrijednost realnog parametra a i pratite promjene grafa.

Nadopunite:

- Domena funkcije $f(x)=\frac{a}{x}$ je ____________.
- Funkcija $f(x)=\frac{a}{x}$ pada na intervalima $\langle -\infty,0\rangle$ i $\langle 0,\infty\rangle$ ako je ________________.
- Funkcija $f(x)=\frac{a}{x}$ raste na intervalima $\langle -\infty,0\rangle$ i $\langle 0,\infty\rangle$ ako je ________________.
- Asimptote funkcije $f(x)=\frac{a}{x}$ su ____________________________________.

2. Graf funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x}+b, b\in R$.

a. Nacrtajte u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija:

$$f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\frac{1}{x}+1,\ h(x)=\frac{1}{x}+2,\ i(x)=\frac{1}{x}-1,\ j(x)=\frac{1}{x}-2.$$

Kako se mijenja oblik grafa? Odredite asimptote svake od zadanih funkcija.

b. Napravite klizač b pa nacrtajte graf funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x}+b$. Mijenjajte vrijednost realnog parametra b i pratite promjene grafa.

Nadopunite:

- Domena funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x}+b$ je ___________.
- Asimptote funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x}+b$ su __________________________.

3. Graf funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x+c}, c\in R$.

a. Nacrtajte u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija:

$$f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\frac{1}{x+1},\ h(x)=\frac{1}{x+2},\ i(x)=\frac{1}{x-1},\ j(x)=\frac{1}{x-2}.$$

Kako se mijenja oblik grafa? Odredite asimptote svake od zadanih funkcija.

b. Napravite klizač c pa nacrtajte graf funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x+c}$. Mijenjajte vrijednost realnog parametra c i pratite promjene grafa.

Nadopunite:

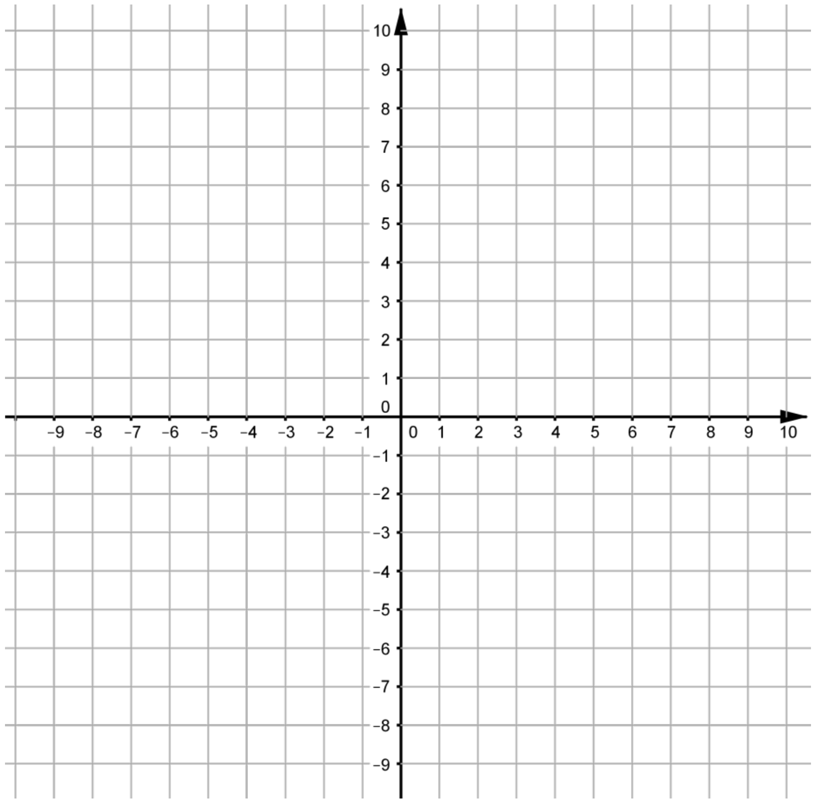
- Domena funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x+c}$ je ___________.
- Asimptote funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x+c}$ su ____________________________.

Kako bi to riješila teorija?

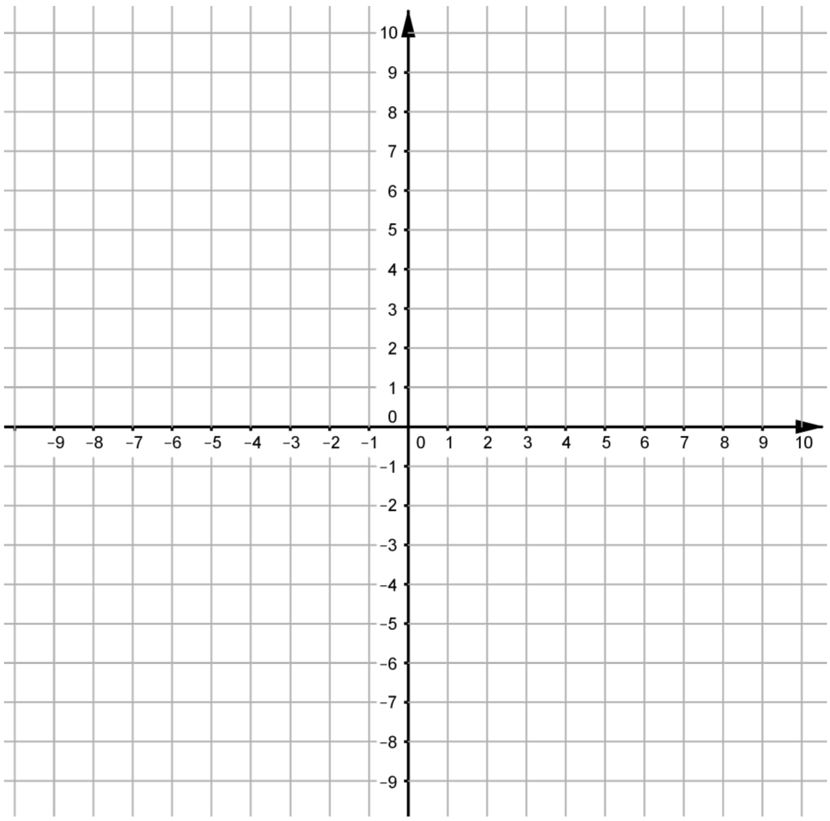
Nacrtajte u koordinatnom sustavu (bez tehnologije) graf funkcije f te joj odredite domenu, asimptote i intervale na kojima funkcija raste. Možete li svoje zaključke iz prethodnog zadatka primijeniti u rješavanju ovog?

(**Napomena:** U b. zadatku najprije zapišite funkciju u obliku $f(x)=\dfrac{a}{x+c}+b, a,b,c\in R$.)

a. $f(x)=\dfrac{2}{x-3}+1$



b. $f(x)=\dfrac{-3x-5}{x+1}$



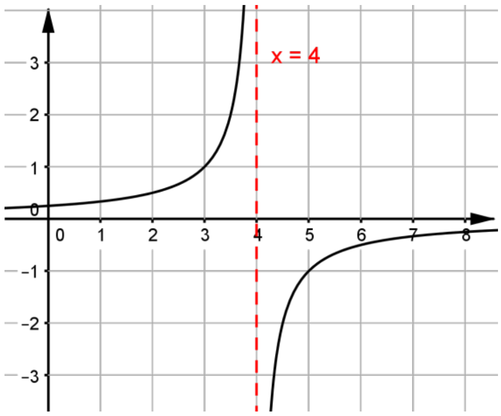
Primijenite naučeno.

Realne funkcije *f, g, h, i, j, k, l, m, n* na svojoj su prirodnoj domeni zadane danim pravilima. Svaki od 6 grafova A, B, C, D, E i F povežite s pripadajućim pravilom/pravilima.

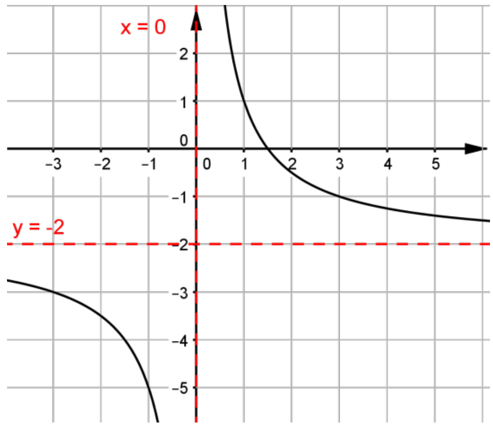
$$f(x)=\frac{-6}{x+2}+1,\quad g(x)=\frac{3}{x+2}-1,\quad h(x)=\frac{-1}{x-4},\quad i(x)=\frac{3}{x}-2,$$

$$j(x)=-\frac{2}{x}+3,\quad k(x)=\frac{x-4}{x+2},\quad l(x)=\frac{2x+6}{x-1},\quad m(x)=\frac{2x^2+2x}{x^2-1},\quad n(x)=\frac{8}{x-1}+2.$$

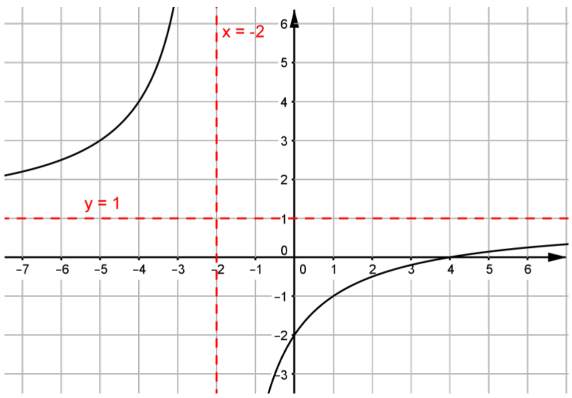
A.



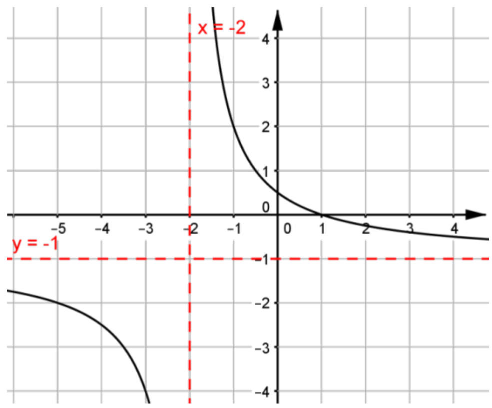
B.



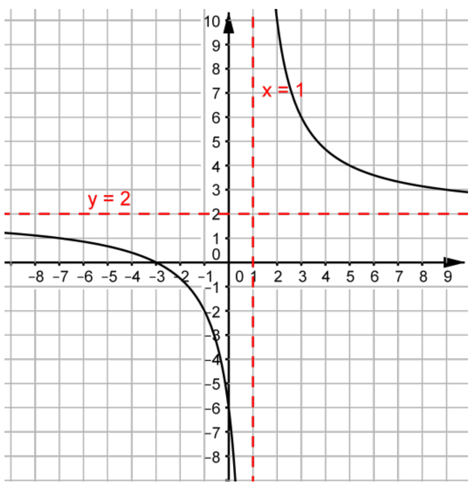
C.



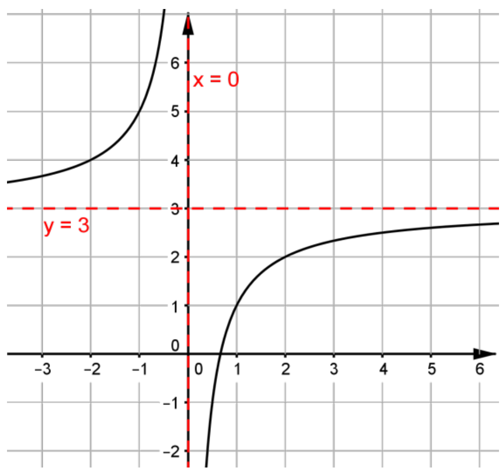
D.



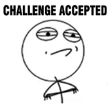
E.



F.



Napomena: Imate 9 pravila pridruživanja i 6 grafova. Postoji mogućnost da nekoj funkciji neće biti pridružen graf, a može se pojaviti i situacija da je većem broju pravila pridružen isti graf. Posebno obratite pažnju na funkcije *k, l, m* čija pravila pridruživanja morate najprije zapisati u obliku $f(x)=\frac{a}{x+c}+b,\ a,b,c\in R$, a potom primijeniti naučeno u prethodnim zadacima.



Možemo li više?

U sljedećim zadacima samo ćemo **skicirati** grafove**,** pri čemu će nam biti važne samo vertikalne asimptote i predznak vrijednosti funkcije.

Zadatak 1.

Koristeći tehnologiju nacrtajte grafove funkcija:

$$f(x)=\frac{1}{x-1},\ g(x)=\frac{1}{(x-1)^2},\ h(x)=\frac{1}{(x-1)^3},\ i(x)=\frac{1}{(x-1)^4}.$$

Odredite domenu danih funkcija.

Odredite asimptote i promotrite predznak vrijednosti funkcija u blizini vertikalne asimptote.

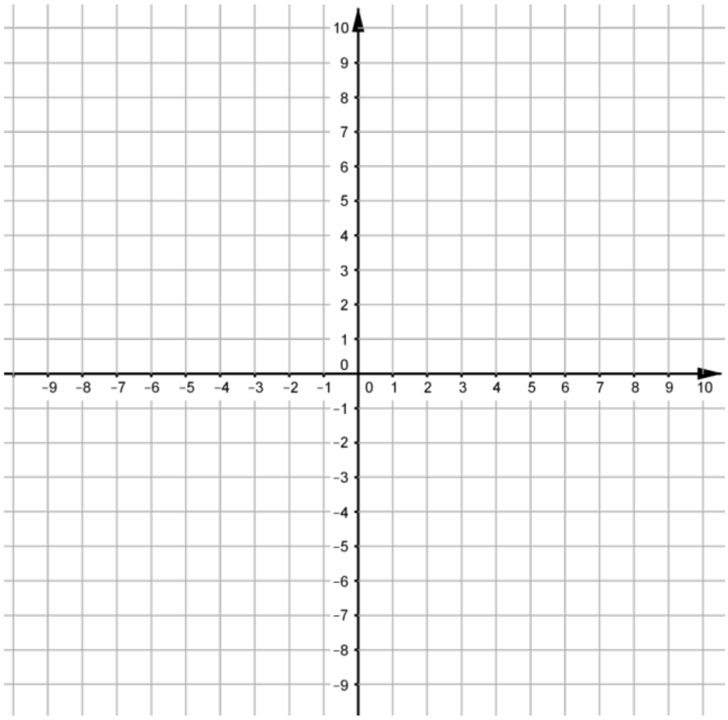
Nadopunite:

- Vrijednosti funkcije $f(x)=\frac{1}{(x-c)^n}$ za $x<c$ i $x>c$ istog su predznaka ako je ______________.
- Vrijednosti funkcije $f(x)=\frac{1}{(x-c)^n}$ za $x<c$ i $x>c$ različitog su predznaka ako je ______________.

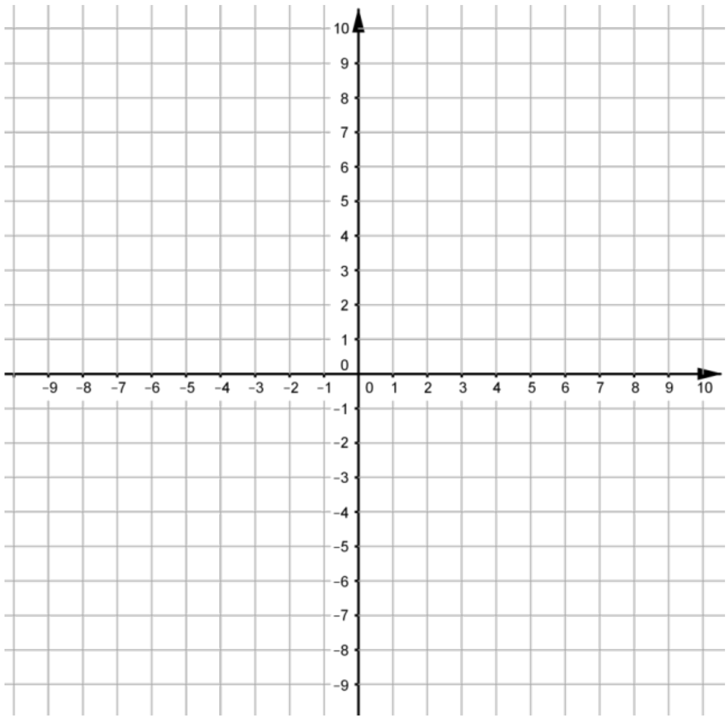
Zadatak 2.

Odredite nultočke zadanih funkcija i njihovu strukost. Odredite vertikalne asimptote. Bez primjene tehnologije skicirajte grafove zadanih funkcija. Riješite nejednadžbu $f(x)\geq 0$.

a. $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-4)^2}{(x+3)^2(x-2)}$



b. $f(x)=\dfrac{(1-x)(x+4)^2}{(x-3)(x+5)}$



Kako smo radili i što smo naučili?

3.4. Graf eksponencijalne funkcije

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti iz tablice zadanih vrijednosti pomoću tehnologije prepoznati o kojoj se funkciji radi i istražiti neka njezina svojstva.

U čemu je problem?

Možete li na osnovu dane tablice zadanih vrijednosti odrediti o kojoj se klasi funkcije radi i kojim je pravilom pridruživanja zadana?

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	3	6	12	24

Kako to izgleda?

Skicirajte graf olovkom na papiru.

Možete li pretpostaviti?

Pokušajte zapisati pravilo pridruživanja.

Napravite model.

Odredite razlike uzastopnih vrijednosti i navedite kakve su.

Odredite omjere uzastopnih vrijednosti i navedite kakvi su.

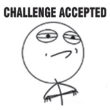
Uočavate li pravilnost?

Potražite pomoć tehnologije.

U programu dinamične geometrije tabelirajte vrijednosti iz tablice i ucrtajte ih u koordinatni sustav. Definirajte klizače *a, b, c, d, e*. Nacrtajte graf funkcije $f(x)=a\cdot b^{cx+d}+e$. Mijenjajte vrijednosti parametara dok se graf ne poklopi s ucrtanim točkama.

Kako bi to riješila teorija?

Kako biste odredili parametre *a, b, c, d, e* bez pomoći tehnologije?



Možemo li više?

1. Za koje vrijednosti parametra *b* graf ne postoji i zašto?
2. Za koje je vrijednosti parametra *b* funkcija rastuća, a za koje padajuća?
3. Kako promjena parametra *a* utječe na oblik grafa?
4. Što se događa s grafom kad mijenjamo parametre *c* i *d*?
5. Što se događa s grafom kad mijenjamo parametar *e*?

Primijenite naučeno.

Bez upotrebe računala nacrtajte grafove funkcija:

a. $f(x)=2^x-3$; b. $f(x)=-3\cdot 2^{2x-1}$; c. $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$; d. $f(x)=2\cdot 3^{-x+2}-2$

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura:

Gusić, J.; Mladinić, P.; Pavković, B. 2007. *Matematika 2, udžbenik za 2. razred opće, jezične i klasične gimnazije*. Školska knjiga. Zagreb.

3.5. Grafovi trigonometrijskih funkcija

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti crtati grafove trigonometrijskih funkcija pomoću programa dinamične geometrije i pomoću grafičkih kalkulatora te ćete interpretirati značenje koeficijenata trigonometrijskih funkcija.

U čemu je problem?

Kako nacrtati graf trigonometrijske funkcije sinus i kosinus? O čemu ovisi izgled grafa? Kako odrediti nultočke, minimum, maksimum, period, amplitudu, pomak po osi x i y?

Kako to izgleda?

Nacrtajte u bilježnicu graf funkcije $f(x) = \sin x$. Nadopunite:

Period funkcije f je ___________. Amplituda je _____________. Nultočke su _________________.

Minimalna vrijednost je _________________. Maksimalna vrijednost je ___________________.

Možete li pretpostaviti?

Dana je funkcija $f(x) = a\sin(bx + c) + d$. Kako koeficijent a utječe na graf funkcije f? Kako se računa period? Kako se računa pomak po x osi za funkciju sinus? Kako se računa pomak po y osi?

Potražite pomoć tehnologije.

Radni centar 1

Pomoću grafičkih kalkulatora nacrtajte grafove funkcija $y_1 = \sin x$, $y_2 = 2\sin x$, $y_3 = -3\sin x$.

Uputa: Koristite $\boxed{y=}$ editor. Pomaknite kursor na Y1 te upišite prvu funkciju, zatim na Y2 upišite drugu funkciju i isto tako za treću. Pritisnite GRAPH.

Radi preglednosti grafa, namjestite postavke koristeći WINDOW ili ZOOM.

Nultočke, minimum i maksimum funkcije možete odrediti pomoću 2nd TRACE (CALC).

Ispunite tablicu:

Funkcija	Amplituda	Nultočke	Minimalna vrijednost	Maksimalna vrijednost
$y_1 = \sin x$				
$y_2 = 2\sin x$				
$y_3 = -3\sin x$				

Kako se računa amplituda?

Radni centar 2

Pomoću grafičkih kalkulatora nacrtajte grafove funkcija $y_1 = \sin x$, $y_2 = \sin 2x$, $y_3 = \sin 3x$.

Uputa: Koristite $\boxed{y=}$ editor. Pomaknite kursor na Y1 te upišite prvu funkciju, zatim na Y2 upišite drugu funkciju i isto tako za treću. Pritisnite GRAPH.

Radi preglednosti grafa, namjestite postavke koristeći WINDOW ili ZOOM.

Nultočke, minimum i maksimum funkcije možete odrediti pomoću 2nd TRACE (CALC).

Ispunite tablicu:

Funkcija	Amplituda	Nultočke	Minimalna vrijednost	Maksimalna vrijednost
$y_1 = \sin x$				
$y_2 = \sin 2x$				
$y_3 = \sin 3x$				

Pomoću podataka iz tablice odredite kako se računa period.

Radni centar 3

U programu dinamične geometrije nacrtajte grafove funkcija $y_1 = \sin(x + \frac{\pi}{3})$, $y_2 = \sin(x - \frac{2\pi}{3})$, $y_3 = \sin(2x - \frac{3\pi}{2})$.

Ispunite tablicu:

Funkcija	Pomak po x osi	Nultočke	Minimalna vrijednost	Maksimalna vrijednost
$y_1 = \sin(x + \frac{\pi}{3})$				
$y_2 = \sin(x - \frac{2\pi}{3})$				
$y_3 = \sin(2x - \frac{3\pi}{2})$				

Pomoću podataka iz tablice odredite kako se računa pomak po x osi.

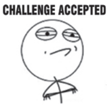
Radni centar 4

U programu dinamične geometrije nacrtajte grafove funkcija $y_1 = \sin x + 1$, $y_2 = \sin x - 2$, $y_3 = \sin x + 3$.

Ispunite tablicu:

Funkcija	Pomak po y osi	Nultočke	Minimalna vrijednost	Maksimalna vrijednost
$y_1 = \sin x + 1$				
$y_2 = \sin x - 2$				
$y_3 = \sin x + 3$				

Pomoću podataka iz tablice odredite kako se računa pomak po y osi.



Možemo li više?

Provjerite svoje zaključke u programu dinamične geometrije. Kreirajte četiri parametra *a*, *b*, *c* i *d* čije ćemo vrijednosti lako mijenjati. Parametri mogu poprimati i negativne vrijednosti i moraju biti usklađeni s jedinicom koordinatnog sustava u kojem radimo. To ćemo postići ovako:

- Konstruirajte točku *A* na *x* osi. Mjerite apscisu točke *A* i nazovite ju *a*. Nacrtajte proizvoljno točku *B*. Vektor $\overline{OB}$ označite kao vektor translacije i translatirajte točku *A*. Konstruirajte dužinu $\overline{BA'}$. Sakrijte točku *A*. Promjenom položaja točke *A’* mijenjat će se vrijednost parametra *a*.
- Na isti način konstruirajte parametre *b*, *c* i *d*.

Pomoću parametara definirajte funkciju $f(x)=a\sin(bx+c)+d$. Nacrtajte njezin graf. Mijenjajte parametre i opišite kako utječu na promjenu grafa, tj. kako utječu na amplitudu, period, pomak po *x* osi i pomak po *y* osi.

Kako bi to riješila teorija?

Nadopunite:

Amplituda funkcije $f(x)=a\sin(bx+c)$ je ________________________________.

Period se računa formulom __________________.

Pomak po *x* osi dobijemo __________________, dok je pomak po *y* osi___________. Nultočke dobivamo rješavajući trigonometrijsku jednadžbu ____________________.

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Funkcija *f* zadana je pravilom pridruživanja

a. $f(x)=2\sin(4x+\frac{\pi}{3})-1$, b. $f(x)=2\cos(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{4})-\sqrt{3}$

Odredite bez upotrebe tehnologije nultočke, minimum, maksimum, pomak po *x* osi, pomak po *y* osi. Nacrtajte u bilježnicu graf funkcije. Provjerite svoje rješenje programom dinamične geometrije ili grafičkim kalkulatorom.

Zadatak 2.

Učenici Vinkovačke gimnazije ocjenjivali su intenzitet učenja tijekom školske godine i zaključili da se periodično mijenja po funkciji $I(t)=5\sin\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{5\pi}{4}\right)+5$, gdje je t broj tjedana od početka školske godine, a I intenzitet učenja.

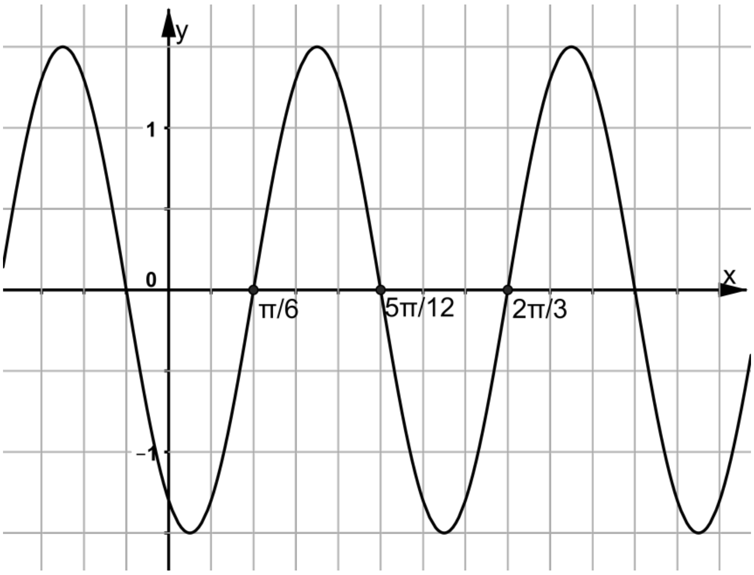
a. Nacrtajte graf funkcije.

b. Koliko tjedana prođe između dvaju maksimalnih intenziteta učenja?

c. Koliki je minimalni intenzitet učenja?

Zadatak 3.

Odredite pravilo pridruživanja funkcije čiji je graf prikazan na slici.



Kako smo radili i što smo naučili?

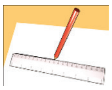
3.6. Funkcija, graf i pomak

Što ćemo raditi?

Pomoću programa dinamične geometrije proučavat ćete grafove elementarnih funkcija i utjecaj parametara na graf, određivati domenu, sliku, nultočke, sjecišta grafa s koordinatnim osima, intervale rasta i pada i ekstreme funkcija.

U čemu je problem?

Možemo li pomoću grafa elementarne funkcije $f(x)$ nacrtati graf funkcija $g(x)=f(x-a)$, $h(x)=f(x)+b$ i $k(x)=f(x-a)+b$?



Kako to izgleda?

1. Formiranje ekspertnih skupina:

   Koliko je skupina, toliko je članova u skupini. (Ako je to nemoguće, može biti više članova u skupini, ali onda neki rade u paru.)

   Dobili ste papirić na kojemu je naziv funkcije ili pravilo preslikavanja ili graf ili tablica vrijednosti ili opis rasta i pada funkcije.

   Pronađite članove svoje skupine tako da dobijete naziv, pravilo preslikavanja, graf, tablicu vrijednosti i opis rasta i pada iste funkcije.

2. U programu dinamične geometrije nacrtajte graf zadane funkcije (skupina A: $f(x)=|x|$, skupina B: $f(x)=x^2$, skupina C: $f(x)=-x^2$, skupina D: $f(x)=2^x$, skupina E: $f(x)=\log_2 x$).

Ispunite prvi stupac tablice:

$f(x)=$	$f(x)$	$g(x)=f(x-a)$	$h(x)=f(x)+b$		$k(x)=f(x-a)+b$	
Domena						
Slika						
Nultočke			$b<0$		$b<0$	
			$b>0$		$b>0$	
Sjecište s osi x			$b<0$		$b<0$	
			$b>0$		$b>0$	
Sjecište s osi y			$b<0$		$b<0$	
			$b>0$		$b>0$	
Intervali rasta						
Intervali pada						
Ekstremi						

Možete li pretpostaviti?

Kako će izgledati grafovi funkcija $g(x)=f(x-a)$, $h(x)=f(x)+b$ i $k(x)=f(x-a)+b$?

Kako parametri a i b utječu na domenu, sliku, nultočke, sjecišta grafa s koordinatnim osima, intervale rasta i pada i ekstreme?

Potražite pomoć tehnologije.

Definirajte parametre a i b. Mijenjajući parametre a i b, ispunite ostale stupce tablice.

Usporedite rezultate u stupcima.

3. Idemo u goste. Formiranje drugih skupina.

   Nove skupine formiraju se tako da se u svakoj od njih nalazi po jedan član svake ekspertne skupine (A', B', C', D', E'). Svaki član nosi svoju tablicu te predstavlja rezultate svoje ekspertne skupine ostalima.

Kako bi to riješila teorija?

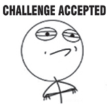
Zajednički zaključci:

Graf funkcije $g(x)=f(x-a)$ dobiva se translacijom grafa funkcije $f(x)$ po osi ______ za _____.

Graf funkcije $h(x)=f(x)+b$ dobiva se translacijom grafa funkcije $f(x)$ po osi ______ za _____.

Graf funkcije $k(x)=f(x-a)+b$ dobiva se translacijom grafa funkcije $f(x)$ po osi ______ za _____ i po osi _____ za ______.

Opišite utjecaj parametara a i b na domenu, sliku, nultočke, sjecišta grafa s koordinatnim osima, intervale rasta i pada i ekstreme.



Možemo li više?

Promjenom parametara a i b promatrajte i analizirajte grafove funkcije: $f(x)=\left|(x-a)^2+b\right|$, $g(x)=2^{|x-a|}$, $h(x)=\left|2^{x-a}+b\right|$, $i(x)=\log_2|x|+b$, $j(x)=\left|\log_2(x-a)+b\right|$.

Primijenite naučeno.

Superman se nalazi u Hrvatskoj i šalje svojoj dragoj Lois SMS-ove. Kako Lois voli matematiku, uz svaki SMS šalje i neobičan graf napravljen u programu dinamične geometrije. Prikazuje promjenu vrijednosti funkcije (sličica Supermena) s promjenom varijable (sat). Vaš je zadatak otkriti o kojim funkcijama se radi. Kliknite na „animirajte točke“. Za provjeru kliknite na „prikaži funkciju“.

superman i lois sms.gsp

Kako smo radili i što smo naučili?

3.7. Grafičko rješavanje jednadžbi i nejednadžbi

Što ćemo raditi?

Rješavat ćete zadatke modeliranja tako da ih svedete na rješavanje jednadžbi i nejednadžbi grafički uz pomoć tehnologije.

U čemu je problem?

Sunčano ljetno poslijepodne Karlo provodi s prijateljima na igralištu ispred zgrade. Sjeo je na klupu i u jednom trenutku ugledao svoju dragu Dunju i njena psa Arona na udaljenosti od 360 m. Istovremeno su krenuli jedno prema drugom, Karlo brzinom 3.5 m/s, Dunja brzinom 2.5 m/s, a Aron je brzinom 8.5 m/s dotrčao do Karla i zatim zajedno s njim pošao u susret Dunji.

Kako to izgleda?

Kojom funkcijom možemo opisati ovisnosti položaja (pomaka) od klupe na kojoj je Karlo sjedio o vremenu, ako pretpostavimo da su brzine stalne, odnosno gibanja jednolika i pravocrtna?

Što predstavlja brzina?

Napravite model.

Napišite funkcije ovisnosti položaja (pomaka) y od klupe na kojoj je Karlo sjedio o vremenu t za Karla, Dunju i Arona. Neka je y u metrima, a t u sekundama.

Možete li pretpostaviti?

a. Za koliko je vremena Aron došao do Karla?

b. Nakon koliko će se vremena Dunja i Karlo sresti?

c. Na kojoj će se udaljenosti od klupe sresti?

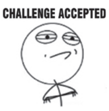
d. Koliko je metara za to vrijeme prešla Dunja, a koliko Aron?

Potražite pomoć tehnologije.

Nacrtajte grafove dobivenih funkcija. Izaberite pravokutni koordinatni sustav.

Kako bi to riješila teorija?

Što predstavlja sjecište grafova? Pomoću grafova odgovorite na postavljena pitanja i potvrdite dobivene rezultate rješavanjem jednadžbi.



Možemo li više?

Dunjinu pažnju privukle su djevojčice koje su veselo trčale po igralištu i smislila je zadatak za Karla. Ako se ovisnost udaljenosti y djevojčice A od klupe o vremenu t može opisati implicitno zadanom funkcijom $my+3t=5$, a djevojčice B funkcijom $y+12mt=10$, za koji realni parametar m djevojčice neće nikada biti jednako udaljene od klupe, za koji m će u svakom trenutku biti jednako udaljene od klupe, a za koji m će djevojčice samo u jednom trenutku biti jednako udaljene od klupe?

Primijenite naučeno.

Naravno, Karlo je smislio zadatak za Dunju promatrajući dječake koji su dodavali loptu tako da ju prvo bace na tlo. Putanja lopte može se opisati grafom funkcije $y=\left|x^2-6x+8\right|$, gdje je x horizontalna udaljenost od klupe, a y visina na kojoj se nalazi lopta (udaljenosti su u metrima). Za koji je x lopta na visini manjoj od pola metra? Koju visinu lopta postigne točno 3 puta tijekom jednog dodavanja, a koju 4 puta?

Dok su Dunja i Karlo rješavali zadatke, trojica su mladića gađali loptom koš. Jedan od njih prejako je izbacio loptu i ona je prešla tik iznad koša i zaštitne ograde te razbila prozor na zgradi. Čika Mata (vlasnik stana kojemu je razbijen prozor) pitao je: „Tko je razbio prozor?“ Sva trojica mladića u glas su rekla: „Ja nisam!“ Nekoliko očevidaca potvrdilo je gdje su mladići stajali dok su gađali koš: Vid 3 m od koša, Tin pola metra bliže i Rok još pola metra bliže košu, ali nitko nije mogao sa sigurnošću reći tko je od njih bacio kobnu loptu.

Dunja i Karlo pomno su pogledali razbijeni prozor, zaštitnu ogradu i koš, izmjerili udaljenost koša od linije igrališta 4 m, zaštitna ograda 5 m, zgrada 10 m, zatim visinu koša 2.9 m, ograde 3 m i mjesta udarca lopte o prozor 2 m i zaključili da je putanja lopte graf kvadratne funkcije, gdje je x udaljenost od kraja igrališta, a y visina lopte. Zatim su izmjerili visine mladića ruku ispruženih iznad glave. Izmjerene visine su: Vid 195 cm, Tin 222 cm, Rok 225 cm. Lako su otkrili tko je razbio prozor. Otkrijte i vi.

Kako smo radili i što smo naučili?

3.8. Složi kartice

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti slaganjem kartica ponoviti svojstva funkcije i uočiti ih na grafičkom prikazu.

U čemu je problem?

Na svakoj kartici (jedno polje u danoj tablici) dano je jedno obilježje ili svojstvo određene linearne funkcije: njezin prikaz pomoću formule, graf, točka koja pripada njezinom grafu, nultočka i slično. Pet je različitih linearnih funkcija. Izrežite kartice koje ste dobili i grupirajte ih u pet skupina tako da u svakoj skupini budu kartice kojima je zajednička veza jedna linearna funkcija.

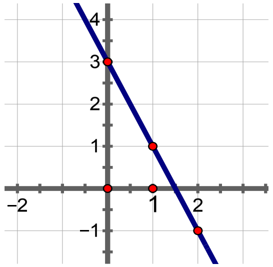
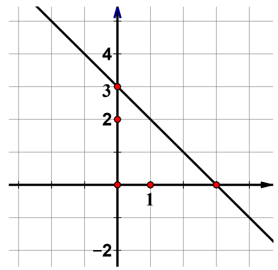
Kako to izgleda?

U svaki od pet redova na pripremljenoj podlozi za slaganje za jednu linearnu funkciju zalijepite kartice iz njezine skupine.

Možemo li više?

Na prazna mjesta na podlozi sami dodajte neko svojstvo koje pripada linearnoj funkciji iz tog retka ili nacrtajte njezin graf ako nedostaje.

Kako smo radili i što smo naučili?

$f(x)=-\frac{2}{3}x+3$	Graf funkcije s koordinatnim osima zatvara trokut površine $P=3$.	Ako je $f(m)-f(n)=2$ onda je $m-n=-2$	Nultočka je $x=\frac{9}{2}$		Graf sadrži točku (0, 3) i paralelan je s pravcem $8x+4y+1=0$
		$f(-5)=13$	Nultočka je $x=3$	Odsječak na y osi je -7.	Koeficijent smjera pripadajućeg grafa je $-\frac{2}{3}$
$f(x)>0$, za sve $x<3$	Nultočka je $\frac{7}{2}$.	Iz $f(x)=12$ Slijedi $x=10$		Implicitna jednadžba grafa je $2x+3y=9$	
$f(2)=1$ $f(-1)=4$		$f\left(\frac{1}{2}\right)=-6$	Ako se vrijednost varijable x poveća za 6, vrijednost funkcije smanjit će se za 4	$f(x)=\frac{3}{2}x-3$	
Graf sadrži točku $\left(\frac{1}{2},\frac{8}{3}\right)$	Graf sadrži točku $T(2, -3)$ i paralelan je s pravcem $y=2x+2$	Nagib grafa funkcije je $k=-2$	Odsječak grafa na osi ordinata je $y=-3$		

3.9. Crni Petar – funkcije

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti igrajući igru Crni Petar sparivati pravila pridruživanja i grafove elementarnih funkcija.

Kako to izgleda?

U igri može sudjelovati više igrača. Igračima se podijeli jednak broj karata, a eventualni višak karata odloži se na sredinu stola. Ako igrač među svojim kartama nađe par (pravilo pridruživanja i odgovarajući graf), pokaže par ostalim igračima i odloži ga na stranu. Zatim igrači redom izvlače po jednu kartu, najprije karte sa sredine stola, a zatim od igrača s desne strane. Ako igrač za izvučenu kartu ima par u svojoj ruci, pokaže par ostalim igračima i odloži ga na stranu. Igra traje tako dugo dok jednom igraču karta Crni Petar (karta koja nema para) ne ostane kao jedina u ruci.

Kako smo radili i što smo naučili?

4. Funkcije 2

4.1. Niz i konvergencija niza

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti promatrati ponašanje članova niza i pomoću tehnologije otkrivati konvergiraju li nizovi zadani općim članom nekom broju.

U čemu je problem?

Nacionalni park Kruger u Južoj Africi osnovan je 1898. godine. Do toga je vremena većina slonova zbog lova u tom dijelu Južne Afrike gotovo istrijebljena.

a. Osnivač parka 1905. godine ustanovio je brojku od 15 slonova. Stopa prirasta populacije slonova je 15% godišnje.

b. Godine 1940. u parku je bilo približno 2 000 slonova. Populacija slonova nastavila je rasti, no zbog nedostatka hrane, raznih bolesti i ljudskih faktora rast se može opisati modelom $b_n = \dfrac{7500}{1+2.75e^{-0.15n}}$ gdje je n broj godina nakon 1940.

Usporedite modele rasta populacije slonova u oba slučaja. Ako bi primijenili prvi model rasta i nakon 1940. godine, što bi se događalo s populacijom slonova? Koji je od ovih dvaju modela rasta realniji?

Kako to izgleda?

U sljedećim zadacima broj slonova zaokružite uvijek na veći cijeli broj.

Za model a. izračunajte populaciju slonova nakon 1, 2, 3, 4, 5,10 i 35 godina. Prikažite dobivene brojeve kao članova niza $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_{10}$ i a_{35}. Zapišite opći član niza a_n koji opisuje rast populacije slonova n godina nakon početne 1905. Odredite a_{55}. Jeste li očekivali takav broj? Može li se taj broj dostići u stvarnosti?

Za model b. izračunajte broj slonova 1942., 1943., 1944., 1945., 1950., 1960., 1970., 2000. i 2010. godine.

Možete li pretpostaviti?

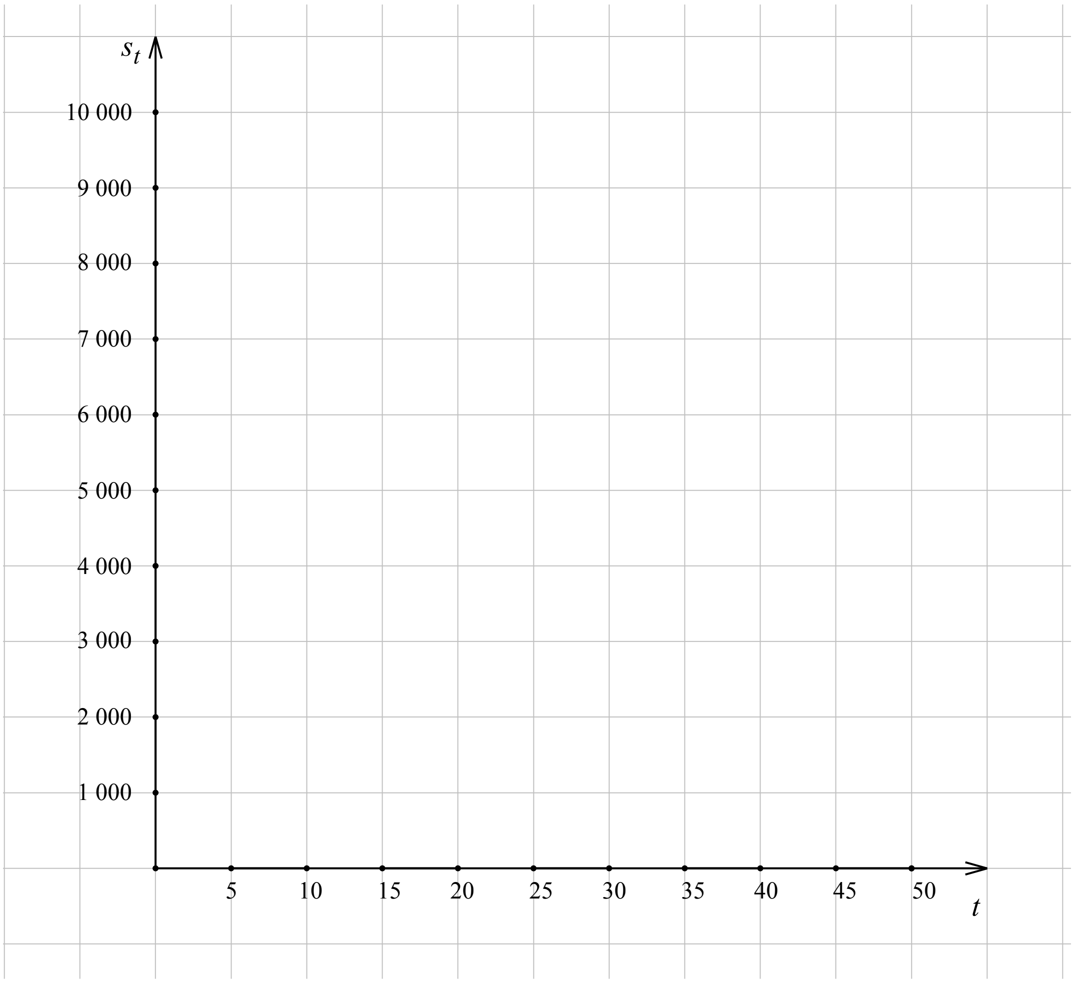
Procijenite konvergiraju li nizovi (a_n) i (b_n) prema nekom broju?

Napravite model.

Napišite formulu za opći član niza a_n ako 1940. godinu uzmemo za početnu, kada je bilo oko 2000 slonova.

Popunite tablicu i koristeći dani koordinatni sustav skicirajte grafove koji prikazuju rast populacije slonova u periodu od 50 godina po modelu a. i b.

n (broj godina nakon 1940.)	Veličina populacije	
	Model a.	Model b.
1		
5		
10		
15		
20		
25		
30		
35		
40		
45		
50		



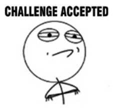
Potražite pomoć tehnologije.

Upute za izradu proračunske tablice: u stupac A upišite redom broj godina n, a u stupac B odredite veličinu populacije za prvu godinu za model a., u stupac C za model b. te povlačeći donji desni rub ćelije, odredite veličine populacije slonova za ostali broj godina. Dobivene vrijednosti prikažite grafički. Upute za izradu grafičkog prikaza u alatu dinamične geometrije: odaberite parametar (broj godina n) i računajte vrijednosti članova niza u ovisnosti o parametru. Vrijednosti tabelirajte, a zatim ih grafički prikažite.

Kako bi to riješila teorija?

Jesu li nizovi kojima je prikazan rast populacije slonova monotoni? Dokažite.

Koji su od tih nizova omeđeni? Koji su konvergentni? Što zaključujete?



Možemo li više?

Zamislite neki pozitivan broj i pratite dani algoritam.

Što uočavate? Kako se ponašaju članovi niza? U kojem ste trenutku stali? Zašto?

Zapišite rekurzivnu formulu za ovaj niz. Odredite članove niza i promatrajte konvergenciju ako:

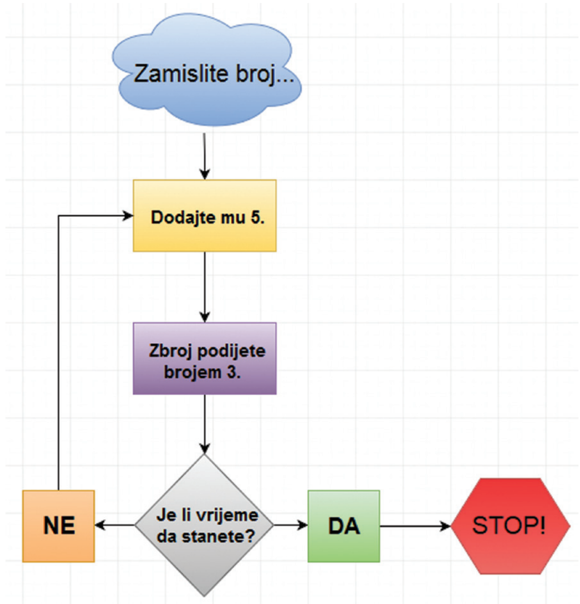
a. promijenite zamišljeni broj

b. promijenite broj koji dodajemo

c. promijenite broj kojim dijelimo (uzmite u obzir i pozitivne brojeve manje od 1)

d. umjesto dijeljenja korjenujete zbroj.

Kojem broju konvergiraju neki od nizova? Kako to objašnjavate?



Primijenite naučeno.

Koristeći tehnologiju, provjerite za sljedeće nizove zadane općim članom konvergiraju li nekom broju.

Upute za izradu proračunske tablice: u stupac A upišite redom redne brojeve članova niza (n), a u stupac B odredite vrijednost prvog člana niza te povlačeći donji desni rub ćelije odredite vrijednosti ostalih članova niza.

Upute za izradu grafičkog prikaza u alatu dinamične geometrije: Odaberite parametar (n) i računajte vrijednosti članova niza u ovisnosti o parametru. Vrijednosti tabelirajte, a zatim ih grafički prikažite.

a. $a_n = \frac{1}{n}$; b. $a_n = \frac{n-2}{n+1}$; c. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$;

d. $a_n = 1 + \cos(n\pi)$; e. $a_n = \frac{n^2+1}{n+1}$; f. $a_n = n + (-1)^n$

g. $a_n = 1 + (-1)^n$; h. $a_n = \left(-\frac{4}{3}\right)^n$; i. $a_n = \frac{1-2n^2}{n^2}$

j. $a_n = -n^3$; k. $a_n = 3^n$; l. $a_n = 3 - \frac{(-1)^n}{4}$.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

http://ats.doit.wisc.edu/Biology/ec/pd/t3_a1_a.htm (9.3.2016.)

http://www.sciencebuddies.org (9.3.2016.)

Roguljić, N.; Burazin Mišura, A.; Baras, I. 2013. *Eksponencijalna funkcija i njezine primjene u svakodnevnom životu.* Poučak 53, Hrvatsko matematičko društvo

4.2. Fraktali

Što ćemo raditi?

Fraktali su geometrijski oblici poput pravokutnika, kružnica i trokuta, ali s posebnim svojstvima koje spomenuti oblici nemaju, a to je svojstvo samosličnosti. To znači da fraktal može biti podijeljen u sitne dijelove od kojih je svaki reducirana kopija veće cjeline. Za fraktale možemo reći da su slike nastale ponovljenim matematičkim računom ili geometrijskom konstrukcijom. U ovoj ćete aktivnosti crtati fraktale i računati njihove opsege i površinu u nekoj od iteracija, kao i određivati izraze za opsege i površinu u n-toj iteraciji. Promatrat ćete i što se događa kad biste postupak nastavili ponavljati u beskonačnost.

U čemu je problem?

Želimo izračunati opseg i površinu Kochove pahuljice i tepiha Sierpinskog u n-tom iteracijskom koraku.

Kako to izgleda?

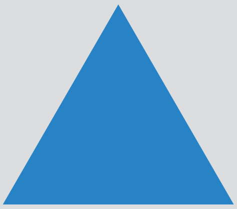
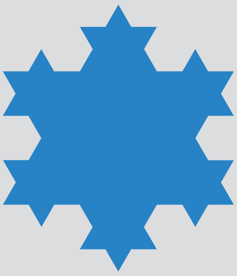
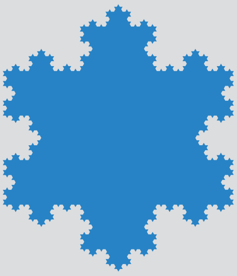
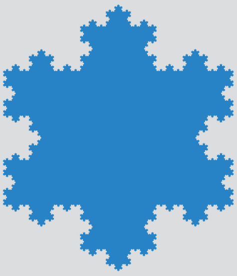
U bilježnicu skicirajte kako nastaje Kochova pahuljica i tepih Sierpinskog. Za svaki fraktal odredite površinu i opseg u prvim dvjema iteracijama.

Možete li pretpostaviti?

Pretpostavite što će se događiti s opsegom i površinom Kochove pahuljice u svakoj sljedećoj iteraciji. Što se događa s opsegom i površinom tepiha Sierpinskog u svakoj sljedećoj iteraciji? Pretpostavite što se događa ako postupak ponavljamo u beskonačnost. Jesu li te veličine konačne?

Napravite model.

Popunite tablicu ako je duljina stranice početnog trokuta jednaka 1.

Generiranje Kochove pahuljice		**Opseg lika**	**Površina lika**
Korak 0			
Korak 1			
Korak 2			
Korak *n*			
Beskonačan korak Kochove pahuljice			

Kako biste odredili opseg i površinu u n-tom koraku? Odredite broj stranica u n-tom koraku, a zatim i duljinu stranice u n-koraku te zapišite izraz za opseg.

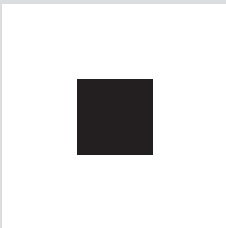
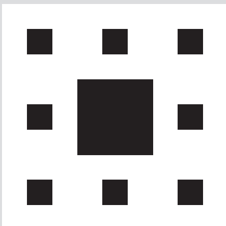
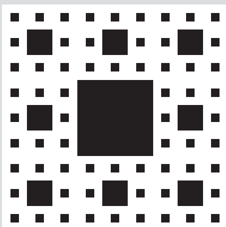
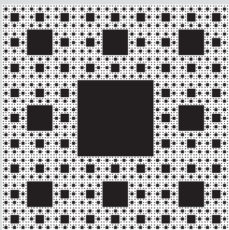
Kakav niz čine ti opsezi i što je tom nizu izraz za opseg u n-tom koraku?

Kako biste onda odredili opseg lika u beskonačnom koraku?

Kakav niz čine površine i što je tom nizu izraz za površinu u n-tom koraku?

Kako biste onda odredili površinu lika u beskonačnom koraku?

Popunite tablicu ako je duljina stranice početnog kvadrata jednaka 1.

Generiranje tepiha Sierpinskog		**Opseg lika**	**Površina lika**
Korak 0			
Korak 1			
Korak 2			
Korak 3			
Korak *n*			
Beskonačan korak tepiha Sierpinskog			

Odredite duljinu stranice kvadrata uklonjenog u prvim trima iteracijama, zatim izračunajte opsege i površine.

Kakav niz čine opsezi, a kakav površine? Što su tim nizovima izrazi za opseg i površinu u n-tom koraku? Kako biste odredili opseg i površinu u beskonačnom koraku?

Potražite pomoć tehnologije.

Nacrtajmo Kochovu pahuljicu i tepih Sierpinskog u alatu dinamične geometrije.

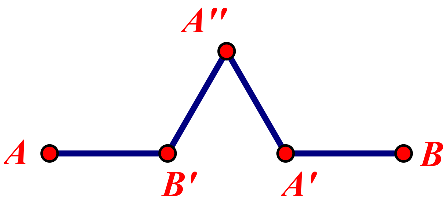
Upute za konstrukciju Kochove pahuljice:

– konstruirati segment $\overline{AB}$

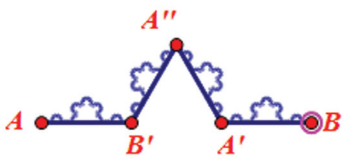
– označiti B kao centar dilatacije (u izborniku*Transformacije*) te točku A *dilatiraj* za 1/3 – dobiva se točka A', isto ponoviti za A kao centar, dobiva se točka B'

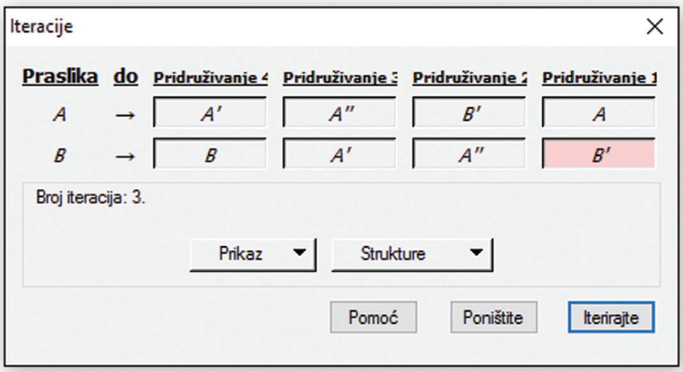
– označiti B' kao centar i rotirati točku A' za 60°, dobiva se točka A''

– konstruirati sve segmente kao na slici:



– izabrati točke A i B i iterirati na sljedeći način koristeći izbornik *Transformacije – iteracija - struktura – dodavanje novog pridruživanja*:



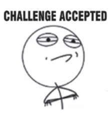


- na kraju kod zadnje iteracije uključiti *prikaz – samo posljednja iteracija*
- obojiti pozadinu u svjetlo plavu boju (*uređivanje – postavke – boja – podloga*)
- odabrati točke B', A'' i A', a zatim u izborniku konstrukcije *unutrašnjost trokuta* i obojiti je u bijelu boju
- sakriti sve segmente, ostaviti samo točke
- ponoviti cijeli iterativni postupak (osim *samo zadnja iteracija*), nakon toga sakriti sve točke osim A i B
- označiti sve pomoću *uredi – odaberi sve* i napraviti *alat* za crtanje krivulje – nazvati ga *snowflake*
- rotirati A za 60° oko B – dobiva se točka D te napraviti bijelu unutrašnjost trokuta između točaka A, B i D
- pomoću *snowflake* alata odabrati točku B pa D, a onda D i A
- na kraju sakriti točke i pahuljica je gotova
- klikom na krivulju i tipke "+" i "–" možete povećavati i smanjivati broj iteracija.

Analognim postupkom nacrtajte tepih Sierpinskog.

Kako bi to riješila teorija?

Primijetite pravilnosti pri računanju opsega i površina danih fraktala. Uočite da bismo nekim matematičkim pojmom mogli opisati računanje tih veličina te primjenom poznatih svojstava i formula odredite opseg i površinu fraktala u bekonačnom koraku.



Možemo li više?

Pomoću internetske tražilice pronađite i druge poznate fraktale. Pokušajte ih nacrtati u alatu dinamične geometrije i izračunati njihove opsege i površine u n-tom koraku (npr. trokut Sierpinskog, Levijeva krivulja…). Što možemo reći o njihovim opsezima i površinama ako postupak nastavimo u beskonačnost?

Kod kuće pogledajte film *Fractals hunting the hidden dimension.* Odgovorite na pitanja:

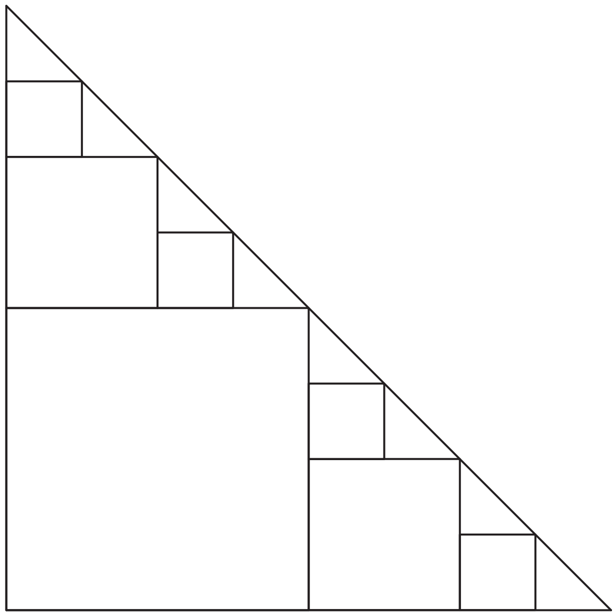
Gdje sve susrećemo fraktale u prirodi i svakodnevnom životu? Koja je razlika između fraktalne i euklidske geometrije? Tko je prvi otkrio fraktale?

Osmislite svoj fraktal.

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

U jednakokračni pravokutni trokut upisan je kvadrat kojemu je jedan vrh u vrhu pravog kuta. U dobivena dva pravokutna trokuta opet su upisani kvadrati, zatim su u četiri pravokutna trokuta opet upisani kvadrati itd., kao na slici. Izračunajte ukupnu površinu svih upisanih kvadrata.



Zadatak 2.

Dana je dužina $\overline{AB}$, $|AB| = a$. Točke $C, C_1, C_2, C_3, \ldots$ polovišta su dužina $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{C_1C_2}$ ... Nad $\overline{AB}$ konstruirana je polukružnica na jednu stranu, nad $\overline{AC}$ na drugu stranu, pa nad $\overline{CC_1}$ opet na prvu itd. Kolika je duljina tako konstruirane krivulje?

Zadatak 3.

Nad visinom jednakostraničnog trokuta konstruiran je novi jednakostranični trokut, nad njegovom visinom opet jednakostranični trokut itd. Odredite zbroj površina svih tako konstruiranih trokuta ako je duljina stranice polaznog trokuta jednaka a.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/Uvod%20U%20Fraktale%20by%20Mladen%20Pausic.pdf (10.3.2016.)

Martić, J.; Mišanec, D.; Musulin, Z.; Šćepanović, Z.; Vlahović, R.; Zidarić, M. 2013./2014. *Limes niza*. Metodika nastave matematike. PMF Zagreb.

Dakić, B.; Elezović, N. 2004: *Matematika 4, udžbenik i zbirka zadataka za gimnazije*. Element. Zagreb.

4.3. Složi funkciju

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti samostalno kreirati funkciju – model koji će opisati stvarnu situaciju.

U čemu je problem?

Odaberite jedan od sljedećih dvaju zadataka s pripadnom tablicom.

Zadatak 1.

$a(x) = kx + l$	$b(x) = mx$
$c(x) = e^x$	$d(x) = \frac{n}{x}$
Broj korisnika na početku jest N_0.	Funkcija je monotona na svojoj domeni.
Broj korisnika je minimalan na početku rada operatera.	Funkcija opisuje (računa) broj korisnika novog mobilnog operatera x mjeseci nakon njegova izlaska na tržište.
Funkcija može računati broj mjeseci od izlaska na tržište u ovisnosti o broju korisnika novog operatera.	Broj korisnika ne može biti veći od nekog realnog broja M, $M > 0$.

Na tržištu se pojavio novi mobilni operater. Broj korisnika njegovih usluga prvih se nekoliko godina mijenja u ovisnosti o broju mjeseci nakon izlaska na tržište. Odaberite naziv operatera, početni broj korisnika i način na koji se taj broj mijenja. Pomoću predloženih funkcija i podataka složite funkciju, odnosno odredite formulu koja najbolje opisuje kako se taj broj korisnika mijenja u ovisnosti o vremenu u mjesecima. Pri tome upotrijebite barem jednu od funkcija c ili d. Neku od funkcija možete koristiti i više puta, s različitim koeficijentima. Dakle, brojeve k, l, m, n, M, N_0 odabirete sami i prilagođavate svojoj funkciji. U svom radu možete koristiti i tehnologiju.

Zadatak 2.

$a(x) = kx + l$	$b(x) = mx$
$c(x) = e^x$	$d(x) = \frac{n}{x}$
Vrijednost predmeta ne može nikada pasti na 0.	Vrijednost je predmeta maksimalna kad je nov.
Vrijednost je predmeta minimalna kad je nov.	Funkcija opisuje (računa) vrijednost nekog predmeta s obzirom na godine starosti tog predmeta.
Funkcija može računati godine starosti predmeta ovisno o njegovoj vrijednosti.	Funkcija je monotona.

Kupili ste neki predmet (ili ga želite kupiti). Njegova se vrijednost s godinama mijenja. Odaberite predmet, njegovu početnu vrijednost i način na koji se ta vrijednost mijenja. Pomoću predloženih funkcija i podataka složite funkciju, odnosno odredite formulu koja najbolje opisuje kako se ta vrijednost mijenja u ovisnosti o vremenu. Pri tome upotrijebite barem jednu od funkcija c ili d. Neku od funkcija možete koristiti i više puta, s različitim koeficijentima. Dakle, brojeve $k, l, m, n,$ odabirete sami i prilagođavate svojoj funkciji. U svom radu možete koristiti i tehnologiju.

Kako to izgleda?

Pregledno zabilježite svoje podatke i podijelite uloge, ali na kraju svaki član treba znati obrazložiti svaki učinjeni korak, korištene matematičke činjenice i biti spreman predstaviti i analizirati rješenje. Napravite poster koji će vam pomoći u predstavljanju i „reklamirati“ vašu funkciju i proizvod.

Upute za rad u skupini – uloge:

Voditelj – Organizacija

Provjeri i osiguraj da zadatak bude jasan svakom članu, da cijela grupa radi zajedno prema dogovorenim smjernicama i cilju, te da svatko svojim idejama sudjeluje u radu.

Razumiju li svi što trebamo napraviti? Ima li netko neku dobru ideju? Vidi li netko to drugačije?

Možeš li svoju ideju objasniti drugima? Možemo li nastaviti dalje? Jesmo li na dobrom putu?

Što je sljedeće na redu?

Bilježnik/izvjestitelj – Dokumentacija

Osiguraj da sve važne ideje i rezultati budu zabilježeni. Dakle, zabilježi sve strategije, ideje, metode, rješenja, zaključak... Osiguraj da cijeli tim bude spreman za završni izvještaj.

Kako ćemo ovo zabilježiti? Gdje si pronašao taj podatak? Literatura?

Na koje sve načine možemo ovo predstaviti?

Zapišimo to kao napomenu, pitanje nastavniku, pa ćemo se na to kasnije vratiti.

PR – Logistika

Pobrini se da svaki član ima svoj zadatak na kojem radi i da za to ima sav potreban pribor i informacije. Uzmi džepno računalo i izračunaj potrebnu vrijednost. Uključi računalo i pronađi potrebnu informaciju. Ti si jedini koji smije postaviti pitanje nastavniku, ali tvoje pitanje mora biti pitanje koje je postavio cijeli tim.

Hoće li nam koristiti kalkulator, papir s mrežom, računalo? Koje podatke trebamo? Možemo li koristiti ____________? Trebamo li nešto pitati nastavnika? Slažu li se svi da trebam zvati nastavnika?

Kontrolor – Provjera i evaluacija

Pobrini se da se svi izračuni provjere i matematički objasne. Pobrini se da grupa povezuje ideje.

Je li netko provjerio te izračune? Je li razumljivo napisano? Može li svatko objasniti korištenu „matematiku” u zadatku? Kako znamo da je to baš tako i kako uvjeriti druge u to? Jesu li rezultati realni? Jesu li rezultati precizni? Zašto si baš tako zaokružio rezultat? Što ako se početni uvjet promijeni u ____________?

Kako smo radili i što smo naučili?

4.4. Skijanje na vodi

Što ćemo raditi?

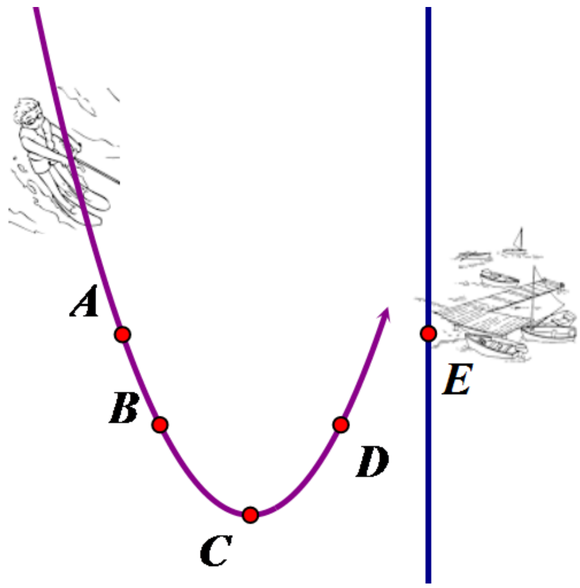
U ovoj ćete aktivnosti pomoću tehnologije i tangente na graf funkcije modelirati inercijalno gibanje tijela.

U čemu je problem?

Bruno skija na vodi. Vuče ga motorni čamac koji se giba po paraboli. Bruno želi stići do mola na obali i razmišlja u kojem trenutku treba pustiti uže koje ga veže uz čamac kako bi nastavljanjem gibanja u istom smjeru došao što bliže molu.

Kako to izgleda?

Na slici je prikazana putanja čamca (parabola), kao i položaj mola (točka E) na obali (vertikalna linija) te neke točke (A, B, C i D) koje Bruno razmatra kao moguće točke puštanja užeta. Pretpostavite da se nakon odvajanja od čamca Bruno nastavlja gibati sve do obale (zanemarite trenje, odnosno otpor vode). Također, možete pretpostaviti da se Bruno, dok ga čamac vuče, giba po istoj paraboli kao i čamac (zanemarite duljinu užeta).



Možete li pretpostaviti?

Procijenite koliko će daleko od mola Bruno završiti ako pusti uže u svakoj od točaka koje razmatra. Kada će ta udaljenost biti najveća, a kada najmanja? Između kojih dviju točaka Bruno treba pustiti uže tako da završi točno na molu?

Napravite model.

Postavite koordinatni sustav tako da parabola ima jednadžbu $y = x^2$, a mol koordinate (2, 2). Obala je paralelna osi parabole. Bruno razmatra samo točke s cjelobrojnim ordinatama.

Nakon što Bruno pusti uže, nastavit će se gibati u smjeru u kojem se gibao u trenutku puštanja, dakle po tangenti na putanju čamca. Povucite tangente na parabolu u razmatranim točkama.

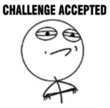
Potražite pomoć tehnologije.

U programu dinamične geometrije otvorite dokument i nazovite ga *Skijanje na vodi*. Postavite koordinatni sustav (sa sukladnim jediničnim dužinama na koordinatnim osima) te u njemu nacrtajte putanju čamca $f(x) = x^2$, obalu $x = 2$ i položaj mola E (2, 2). Nacrtajte i označite točke A, B, C i D s cjelobrojnim koordinatama. Otvorite *Pomoć/Uzorci Sketcheva & Alati/Korisnički alati/Račun.* U svome dokumentu (*Prozor*) uz pomoć alata *Tangenta* nacrtajte tangente na putanju čamca u točkama A, B, C i D. Za svaku od tih tangenata označite sjecište s obalom te izmjerite udaljenost tog sjecišta do mola.

Napomena: možete koristiti predložak *Skijanje na vodi*.

Kako bi to riješila teorija?

Odredite koordinate točaka A, B, C i D. Odredite koeficijent smjera, jednadžbu i koordinate sjecišta s obalom za tangentu u svakoj od tih točaka. Za svako od sjecišta izračunajte udaljenost od mola.



Možemo li više?

Možete li preciznije odrediti točku u kojoj se Bruno treba odvojiti od čamca da bi stigao do mola?

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

http://mysite.science.uottawa.ca/iabde083/ch01.pdf (23.3.2016.)

4.5. Kako računa kalkulator ili kako računati bez kalkulatora

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti otkriti jednostavne funkcije koje dobro aproksimiraju zadane složenije funkcije.

U čemu je problem?

Znate li kako se računalo prije izuma kalkulatora? Znate li što su logaritamske tablice i čemu su služile? Jeste li čuli za šiber? Potražite odgovore na ova pitanja. Danas, srećom, imamo kalkulatore, no zamislite da imate kalkulator sa samo četirima osnovnim računskim operacijama, a morate izračunati vrijednost nekog logaritma, sinusa, kosinusa, korijena, potencije.

Kako to izgleda?

Podijelite se u pet skupina i odredite koju će od navedenih funkcija proučavati koja skupina.

a. $f(x)=\ln(1+x)$ b. $f(x)=\sin x$ c. $f(x)=\cos x$

d. $f(x)=\sqrt{1+x}$ e. $f(x)=e^x$

U svakoj skupini za funkciju koju ste odabrali odgovorite na pitanja:

Možete li bez kalkulatora odrediti koliko je $f(0)$, a koliko $f(0.1)$? U ovoj ćete aktivnosti što preciznije odrediti vrijednost $f(0.1)$ samo pomoću operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja.

Napravite model.

- Budući da je linearna funkcija (polinom prvog stupnja) najjednostavnija, a njezine vrijednosti možemo računati pomoću osnovnih operacija, funkciju f zamijenit ćemo linearnom $P_1(x)=a+bx$.

Uputa:

– Pronađite broj t za koji bez upotrebe kalkulatora znate vrijednost funkcije $f(t)$. Ako ste pronašli nekoliko takvih brojeva, odaberite onaj koji je najbliže broju 0.1.

– Odredite koeficijente a i b tako da graf funkcije P_1 sadrži točku $(t, f(t))$ i u toj se točki „najbolje“ prislanja uz graf funkcije f. Izračunajte $P_1(0.1)$.

- Funkciju f zamijenit ćemo polinomom drugog stupnja $P_2(x) = a + bx + cx^2$. Treba odrediti brojeve a, b, c tako da zadovoljavaju slične uvjete kao u prethodnom slučaju.

  Uputa:

  – Izračunajte $f(0), f'(0), P_1(0), P_1'(0)$ i otkrijte koji su među njima jednaki.

  – Postavite analogne uvjete za $f(0), f'(0), f''(0), P_2(0), P_2'(0), P_2''(0)$ i pomoću njih odredite a, b, c. Izračunajte $P_2(0.1)$.

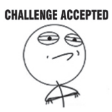
- Odredite polinom trećeg stupnja $P_3(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ i izračunajte $P_3(0.1)$.
- Odredite polinom četvrtog stupnja $P_4(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ i izračunajte $P_4(0.1)$.

Možete li pretpostaviti?

Promotrite polinome P_1, P_2, P_3, P_4. Uočavate li neku pravilnost? Promotrite kako ste računali koeficijente u polinomima P_1, P_2, P_3, P_4. Napišite pretpostavke za polinome $P_5, ..., P_{10}$ i izračunajte $P_5(0.1), ..., P_{10}(0.1)$. Promotrite dobiveni niz brojeva $P_1(0.1), ..., P_{10}(0.1)$. Što uočavate? Izračunajte kalkulatorom vrijednost $f(0.1)$ i usporedite.

Potražite pomoć tehnologije.

Nacrtajte grafove funkcija f i $P_1, ..., P_{10}$. Usporedite.



Možemo li više?

Usporedite svoja rješenja s rješenjima ostalih grupa. Potražite pravilnosti. Zapišite niz polinoma koji aproksimiraju proizvoljnu funkciju f.

Kako smo radili i što smo naučili?

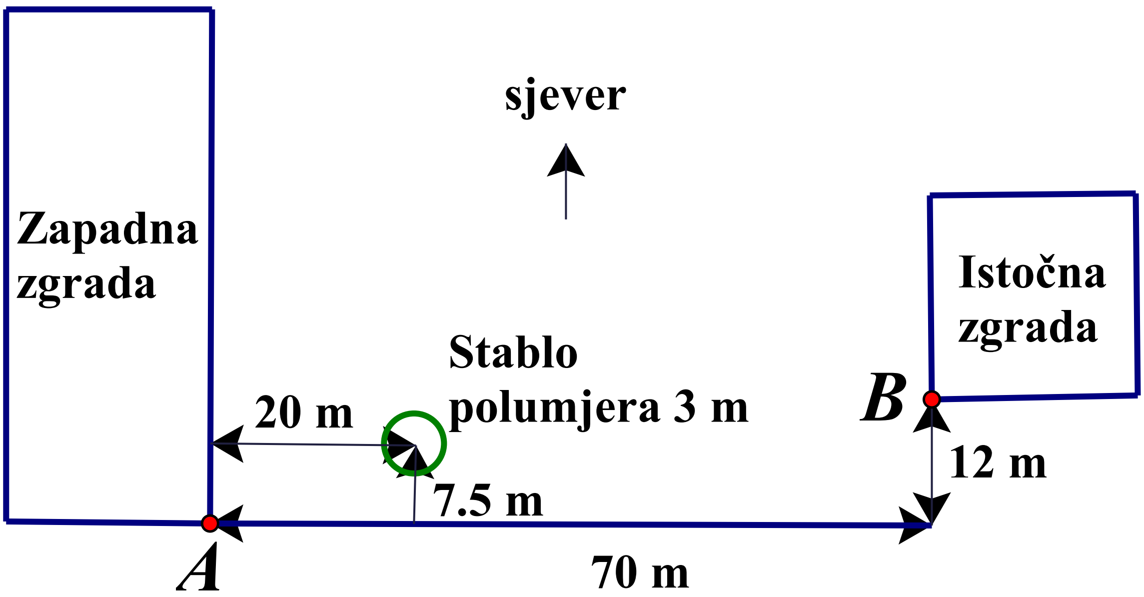
4.6. Staza u naselju

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti odrediti položaj staze u naselju tako da zadovoljava postavljene uvjete. Pronaći ćete uvjete uz koje se dvije krivulje glatko nadovezuju jedna na drugu.

U čemu je problem?

Parkovni arhitekt želi smjestiti stazu između dviju zgrada pri čemu postoje neka ograničenja, a svakako se želi sačuvati staro stablo. Na skici je prikazan plan područja.

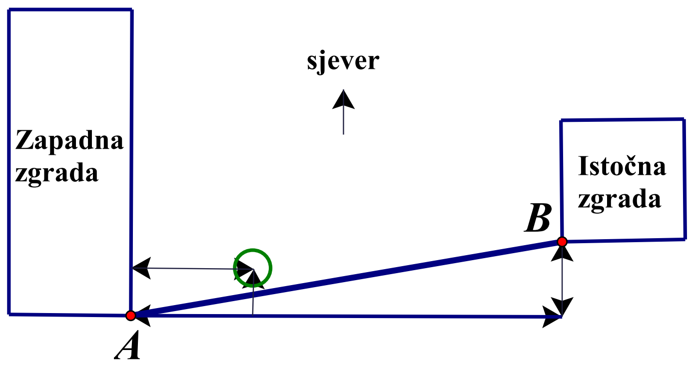


Staza će se protezati od zapadne zgrade u točki A, prolaziti južno od drveta i glatko se nadovezati na južni zid istočne zgrade u točki B. Arhitekt želi da cijela staza bude glatka, bez oštrih skretanja.

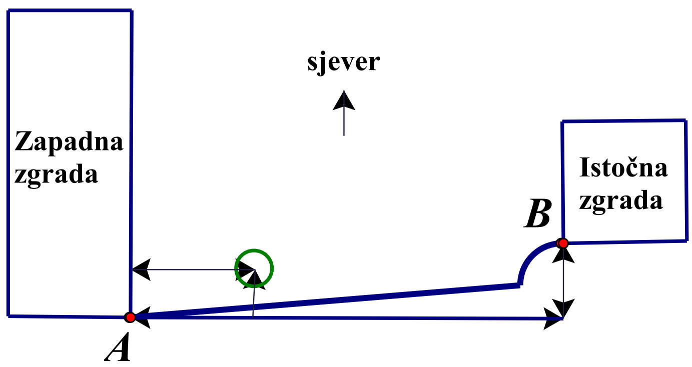
Kako to izgleda?

Pomoćnik arhitekta nacrtao je nekoliko prijedloga staza.

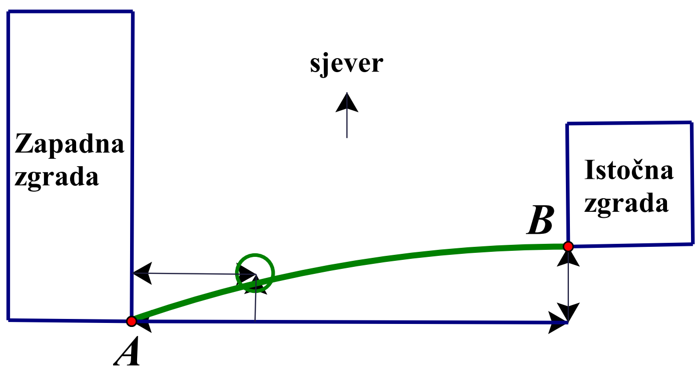
Prijedlog 1



Prijedlog 2



Prijedlog 3:



Arhitekt je jako nezadovoljan predloženim stazama jer ni jedna od njih ne zadovoljava sve postavljene uvjete. Za svaki od prijedloga navedite koji uvjet ne zadovoljava.

Možete li pretpostaviti?

Može li staza biti ravna? Može li biti kružni luk? Ako se staza glatko nadovezuje na južni zid istočne zgrade u točki B, što možete reći o tangenti na stazu u točki B?

Napravite model.

Konstruirajte na planu područja stazu u obliku kružnog luka koja će se glatko nadovezati na južni zid u točki B. Zadovoljava li ta staza ostale uvjete?

Potražite pomoć tehnologije.

Potražimo funkcije čiji bi grafovi mogli predstavljati traženu stazu. Može li ta funkcija biti linearna? Može li biti kvadratna? Ako želimo da se graf glatko nadovezuje na južni zid u točki B, što možemo zaključiti o grafu kvadratne funkcije?

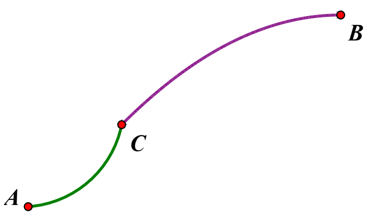
Odaberite prikladan koordinatni sustav. Nacrtajte u tom koordinatnom sustavu točke A, B i stablo.

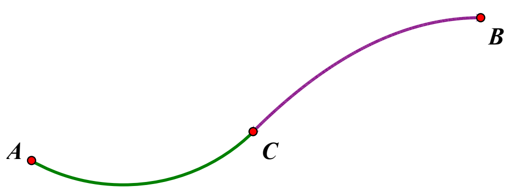
- Napravite numeričke parametre i nacrtajte graf kvadratne funkcije. Namjestite parametre tako da staza počinje u točki A i glatko se nadovezuje na južni zid u točki B. Ako bi se staza sagradila duž ove parabole hoće li imati utjecaja na stablo?
- Odredite računski pravilo pridruživanja kvadratne funkcije čiji graf sadrži točku A i glatko se nadovezuje na zid u točki B. Nacrtajte graf dobivene funkcije i provjerite je li stablo ostalo sačuvano.

Kako bi to riješila teorija?

Nismo uspjeli pronaći jednu funkciju čiji graf zadovoljava sve uvjete. Pokušat ćemo kombinirati dvije funkcije koje se glatko nadovezuju jedna na drugu.

Promotrite skice. Na kojoj od njih se staze glatko nadovezuju jedna na drugu u točki C?

1. 

2. 

Nacrtajte tangente na jednu i drugu stazu u točki C. Koje pravilo vrijedi za staze koje se glatko nadovezuju?

Arhitekt je odlučio sagraditi stazu u obliku dviju parabola koje će se glatko nadovezati. Odredimo dvije kvadratne funkcije f i g čiji grafovi se glatko nadovezuju u točki $C(x_1, y_1)$ i ispunjavaju sve ostale uvjete.

Koje pravilo mora vrijediti ako želimo da se glatko nadovezuju? Nadopunite:

$y_1 = f(x_1) = \_\_\_\_$ i $f'(x_1) = \_\_\_\_$.

Odaberite točku C tako da drvo ostane sačuvano. Odredite pravila pridruživanja funkcija f i g.

Možemo li više?

- Arhitekt je odlučio pronaći još neke krivulje koja će zadovoljavati sve uvjete.
  a. Razmotrite moguće tipove krivulja i obrazložite zašto je moguće ili nije moguće pronaći krivulju tog tipa koja zadovoljava sve uvjete.
  b. Odredite jednu krivulju koja zadovoljava sve uvjete.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura:

Zadatak je načinjen prema Evans, M. &Lipson, K (2000). Cambridge VCE Mathematics School Assessed Coursework CD-ROM ISBN 0521775604, Cambridge Universitiy Press

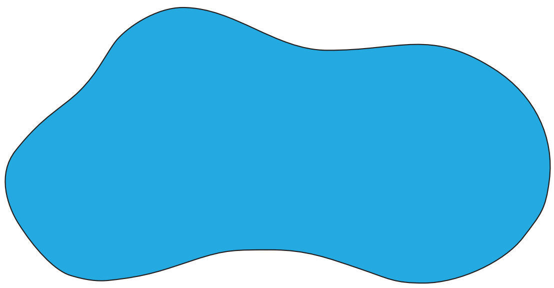
4.7. Problem površine

Što ćemo raditi?

Računat ćete površinu nepravilnoga ravninskog lika i površinu ispod grafa krivulje koja se može izračunati samo numeričkom metodom.

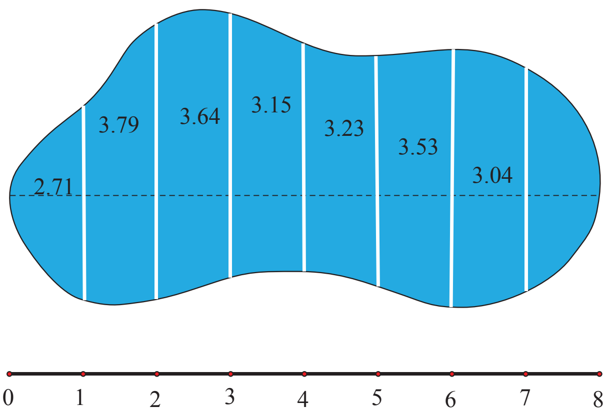
U čemu je problem?

Ante je oduvijek volio biti drugačiji od drugih, pa je tako sagradio bazen nepravilnog oblika. Kako bi dao napraviti pokrivku za bazen istog oblika, trebao je izračunati njegovu površinu. Iako je Ante lako procijenio površinu, bio je vrlo temeljit i želio je što točnije izračunati površinu bazena. Kako će on to napraviti?



Kako to izgleda?

Ante je prvo izmjerio neke udaljenosti i, koristeći fotografiju bazena iz kataloga, ucrtao sljedeće podatke (mjere su izražene u metrima):



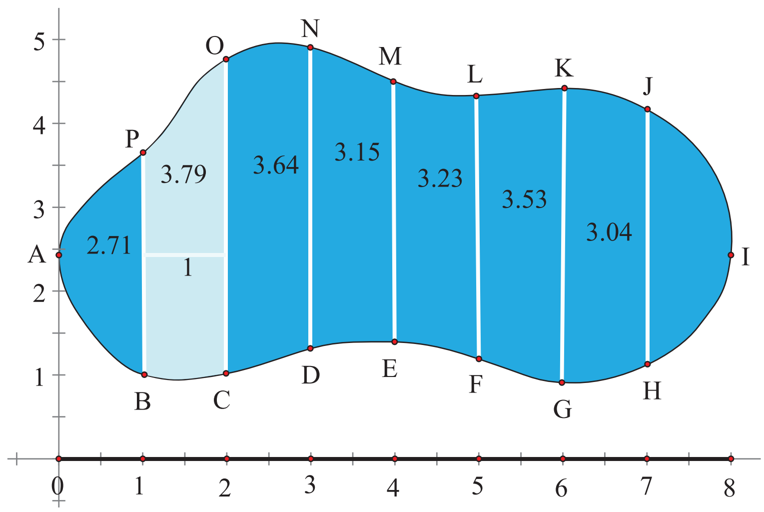
Možete li pretpostaviti?

Na temelju Antine skice pokušajte procijeniti koliko iznosi površina bazena.

Napravite model.

Možemo li aproksimirati traženu površinu koristeći se samo numeričkim podatcima? Koliko dobro to možemo napraviti?

- Smjestite skicu bazena u koordinatni sustav tako da jedna jedinica u koordinatnom sustavu predstavlja jedan metar.
- Promotrite na *rubu bazena* točke *A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P.*



- Koji ravninski lik, određen označenim točkama, dobro aproksimira danu površinu na jednom njezinu dijelu širine 1, primjerice gledajući na osi x interval od 1 do 2? Koliko iznosi njegova površina?
- Možete li sada približno izračunati ukupnu površinu bazena?

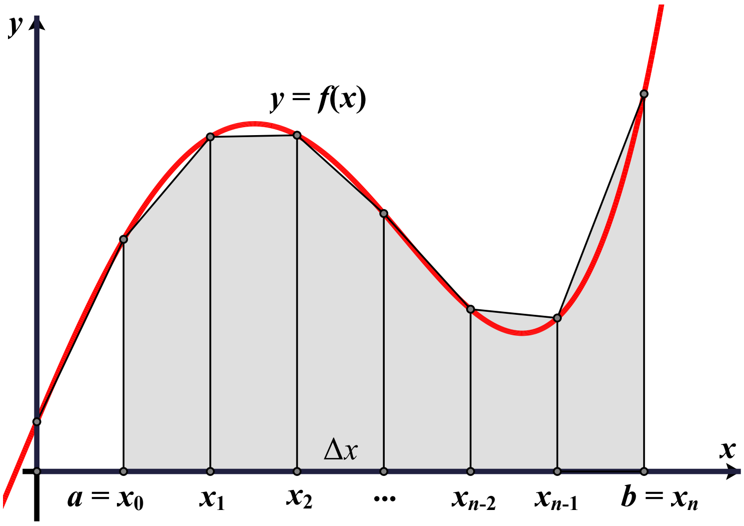
Potražite pomoć tehnologije.

Pokušajte, koristeći grafički kalkulator ili računalo, napraviti model koji opisuje krivulju ruba bazena dvjema funkcijama. Kako ćete pomoću dobivenih podataka izračunati traženu površinu?

Kako bi to riješila teorija?

Zanima nas kako općenito odrediti površinu nekoga nepravilnog oblika? Kako izračunati površinu ispod grafa neke funkcije koju ne možemo izračunati koristeći svojstva određenog integrala ili ako imamo samo neke njezine numeričke podatke?

Postoje različite metode *numeričke integracije.* Računajući površinu bazena koristili smo jednu od njih. Promotrite sliku.

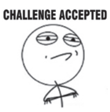


- Pokažite da za površinu ispod grafa proizvoljne pozitivne funkcije f na intervalu vrijedi *Trapezna formula*:

$P \approx \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right)$, gdje je

$\Delta x = \frac{b-a}{n},\ y_i = f\left(x_i\right),\ x_0 = a,\ x_n = b,\ x_i = x_0 + i\Delta x,\ i = 0,1,\ldots,n.$

(Uputa: Danu površinu aproksimirajte površinama n trapeza prikazanih na prethodnoj slici.)



Možemo li više?

Pronađite još neke od metoda numeričke integracije. Primjerice, kako glasi Simpsonova formula?

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Izračunajte približnu površinu ispod grafa funkcije $f(x)=\frac{1}{x}$ na intervalu $[1,2]$ tako da primijenite Trapeznu formulu za $n = 10$. Interval $[1,2]$ dijelite na 10 jednakih dijelova.

- Izračunajte stvarnu površinu direktnim računanjem određenog integrala $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ i usporedite dobivene vrijednosti za površinu.
- Želite li povećati preciznost računanja trapeznom formulom, što trebate napraviti?

Zadatak 2.

Izračunajte $\int_0^1 e^{x^2}dx$ koristeći Trapeznu formulu za $n = 10$.

- Možete li ovaj integral direktno izračunati?
- Kako ćete znati jeste li dostigli određenu preciznost, primjerice na dvije decimale?

Zadatak 3.

U prometnom su uredu odlučili napraviti procjenu broja ljudi koji prođu svaki dan preko vrlo prometne ulice (na dijelu od kućnog broja A do B) kako bi lakše donijeli odluku treba li na tom mjestu napraviti pothodnik ili ne. Prema ranijem iskustvu odlučili su da će procjenu napraviti prema rezultatima brojenja ljudi u kraćim vremenskim razmacima i to svaka 3 sata počevši od 6 sati ujutro. Nakon završenog brojenja podatke o brzini protoka ljudi koji prijeđu ulicu u sat vremena mjerenoj u određenim vremenskim razmacima zapisali su u tablicu:

Vrijeme	6:00	9:00	12:00	15:00	18:00	21:00	24:00
Broj ljudi / sat	150	1320	810	760	1540	360	120

Izračunajte približno ukupan broj ljudi koji u tijeku jednog dana prijeđu prometnu ulicu na promatranom dijelu.

Kako smo radili i što smo naučili?

Sadržaj