Program za cjeloživotno učenje

Ova publikacija je ostvarena uz financijsku potporu Europske komisije.
Ova publikacija odražava isključivo stajalište autora publikacije i Komisija se ne može smatrati odgovornom prilikom uporabe informacija koje se u njoj nalaze.

Aktivnost 1: Möbiusova traka

Izrežite od papira dugačku traku. Jedan kraj trake zaokrenite za 180°. Zalijepite krajeve. Traka koju ste dobili naziva se Möbiusova traka. Za dobivenu traku kažemo još da ima jedan poluokret. U sljedećim vježbama proučit ćete njezina svojstva.

1. Nacrtajte olovkom neprekidnu liniju duž sredine trake. Što uočavate?
2. Razrežite traku jednom po dužini. Što ste dobili? Razrežite još jednom dobivenu traku po dužini. Što ste dobili? Razrežite još nekoliko puta.
3. Razrežite traku jednom po dužini tako da počnete rezati na jednoj trećini širine trake. Što ste dobili?
4. Napravite trake koje će imati neparan broj poluokreta. Razrežite ih jednom i opišite što ste dobili.
5. Napravite trake koje će imati paran broj poluokreta. Razrežite ih jednom i opišite što ste dobili.

Aktivnost 2: Teorija grafova

Slika 1 [1]

1. Spojite na listiću parove životinja, ali tako da se linije ne presijecaju, ne prolaze preko granica područja, niti preko jezera, niti kroz životinje.

Slika koju ste dobili je primjer grafa. Graf se sastoji od vrhova i bridova.

2. Nacrtajte nekoliko grafova. Pri tome pazite na nekoliko uvjeta:
   - da se bridovi ne sijeku (takav graf se zove planaran),
   - da se iz svakog vrha može doći u svaki vrh, doduše možda ne direktno (takav se graf zove povezan)
   - da se vrhovi povezuju direktno s najviše jednim bridom i niti jedan vrh nije povezan sam sa sobom (takav se graf zove jednostavni).

   Popunjavajte tablicu (za svaki od grafova koji ste nacrtali):

broj vrhova V	broj bridova B	broj područja P	veza ?

   i povežite brojeve V, B, P. Zapišite formulu koju ste dobili.

3. U ovom ćete zadatku crtati planarne grafove koji su potpuni, što znači da su svaka dva vrha direktno spojena bridom.

   Nacrtajte potpuni planarni graf sa: dva vrha, tri vrha, četiri vrha, pet vrhova, …

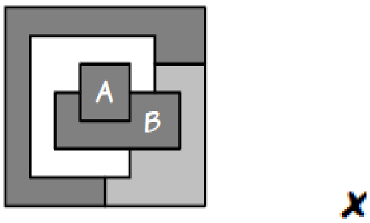
   Što zaključujete?

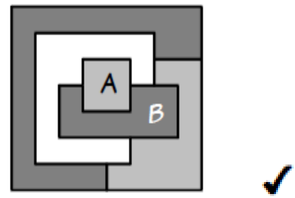
4. U ovom ćete zadatku crtati potpune planarne grafove na Möbiusovoj traci. Nacrtajte na Möbiusovoj traci potpuni planarni graf sa: dva vrha, tri vrha, četiri vrha, pet vrhova, šest vrhova, …

[1] Preuzeto iz Clifford A. Pickover : The Mobius Strip: Dr. August Mobius's Marvelous Band in Mathematics, Games, Literature, Art, Technology, and Cosmology , Thunder's Mouth Press, New York, 2006

Aktivnost 3: Teorem o četiri boje

Karta ili neki skup područja je dobro obojan ako bilo koja dva područja koja imaju zajedničku granicu (brid) nisu obojana istom bojom. Pri tome ako dva područja imaju zajedničku samo jednu točku (vrh) mogu biti obojani istom bojom.



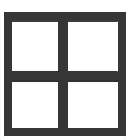


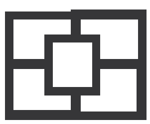
Nije dobro obojano

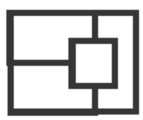
Dobro obojano

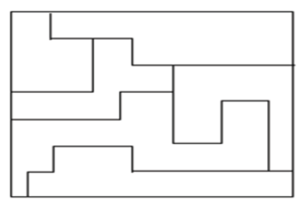
Zadatak 1

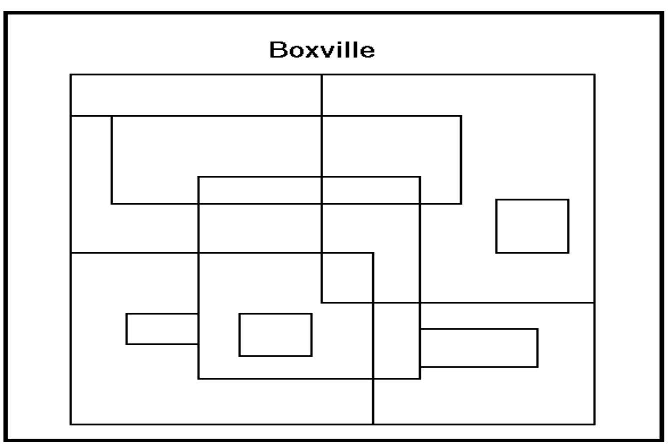
Obojite sljedeće karte koristeći najmanji broj boja tako da karta bude dobro obojana (i zapišite taj broj ispod slike):

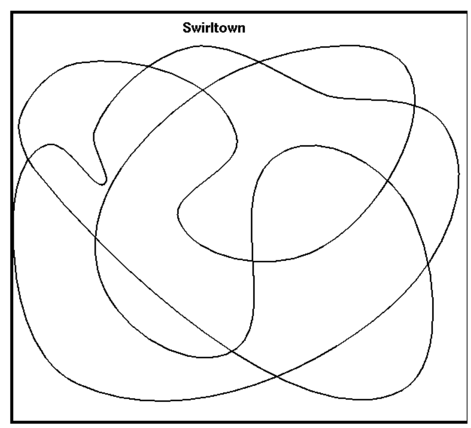


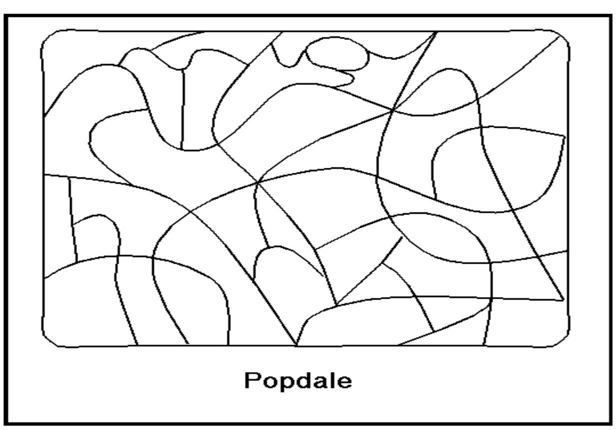


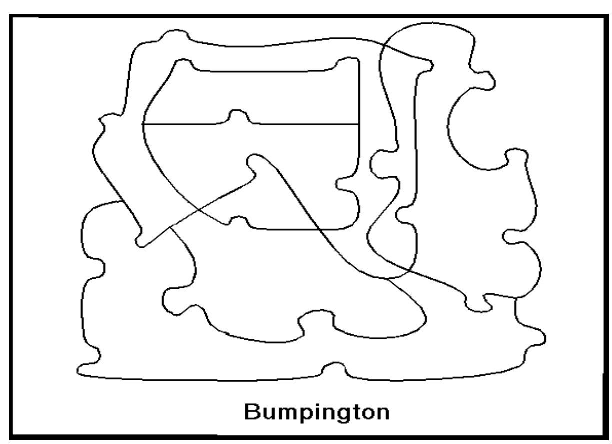


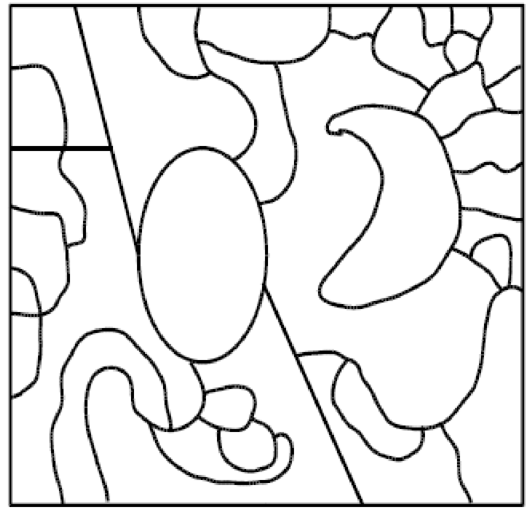


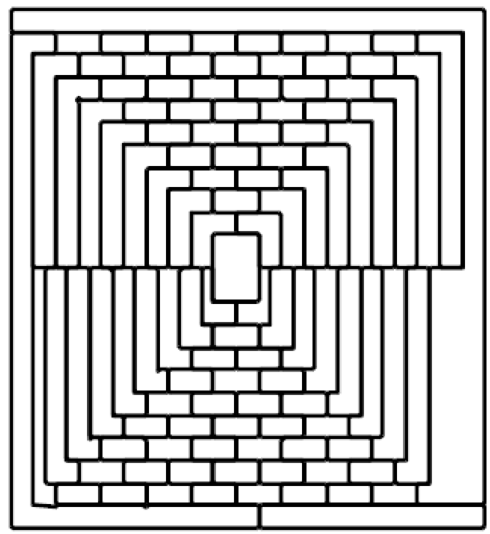












Zadatak 2.

a) Koje se od karata iz zadatka mogu obojiti sa: samo dvije boje, tri, četiri... boje? Koji je najveći broj koji ste zapisali?
b) Nacrtajte kartu tako da početna točka crtanja bude i završna, te da čitavo vrijeme ne dižete olovku s papira. Liniju možete presijecati i više puta. Koliko je boja dovoljno za bojanje ovakve karte? Zašto?
c) Nacrtajte nekoliko svojih karata koje se mogu obojiti s najviše dvije, tri ili četiri boje.
d) Koji je najmanji broj boja potreban za bojanje bilo koje karte u ravnini?
e) Nacrtajte nekoliko karata koje se mogu obojiti s najviše dvije, tri ili četiri boje na Möbiusovoj traci i obojite ih. Možete li nacrtati kartu za koju će trebati pet, šest, ... boja? Koliki je najmanji broj potrebnih boja za bojanje bilo koje karte na Möbiusovoj traci?

Zadatak 3.

Istražite povijest „Teorema o četiri boje“. Kako glasi sličan teorem za Möbiusovu traku?

Aktivnost 4: Kompleksne funkcije

Ova se aktivnost provodi na računalima u programu Sketchpad 5.

U ovoj ćete vježbi proučavati neke funkcije čija je domena i kodomena skup kompleksnih brojeva.

1. Izrada alata

Izradit ćemo alat za zbrajanje, množenje i invertiranje kompleksnih brojeva.

- Nacrtajte točke A i B, imenujte ih z_1 i z_2. Mjerite njihove koordinate. Izračunajte koordinate kompleksnog broja $z_1 + z_2$. Nacrtajte kompleksni broj $z_1 + z_2$. Označite točke z_1, z_2 i $z_1 + z_2$, kreirajte novi alat i nazovite ga zbroj.
- Ponovite postupak iz prethodne točke za umnožak i inverz $\frac{1}{z_1}$.
- Otvorite novu stranicu dokumenta. Koristeći napravljene alate nacrtajte kompleksne brojeve:
  a) $(1+2i)+(-3+4i)$
  b) $(1+2i)\cdot(-3+4i)$
  c) $\frac{1}{-3+4i}$

2. Definiranje transformacija

Definirat ćemo neku funkciju *f* sa domenom i kodomenom u skupu C. Želimo vizualizirati tu funkciju. Možemo li crtati njezin graf? Zašto?
Umjesto grafa, crtat ćemo skup točaka T u Gaussovoj ravnini i njegovu sliku, odnosno skup točaka $T' = f(T)$. Da bismo ovo mogli jednostavno napraviti za različite skupove točaka, definirat ćemo preslikavanje koje to radi. Preslikavanje definiramo tako da za proizvoljnu, ali samo jednu točku definiramo njezinu sliku.

a) Funkcija $f(z) = z + b$

Nacrtajte točke *b* i *z* (*z* će biti varijabla, a *b* parametar). Koristeći alat nacrtajte točku *z* + *b*. Mijenjajte položaj točke *z*. Kako se mijenja položaj točke $f(z) = z + b$?
Definirajmo preslikavanje. Označite točku *z* i $f(z) = z + b$ i u transformacijama definirajte novu transformaciju $z \to z + b$.
Nacrtajte: dužinu, trokut, kružnicu i preslikajte ih. Kakve su slike u odnosu na početni objekt? Kojom izometrijom nastaju?

Nadopunite rečenicu:
Dodavanje kompleksnog broja *b* je ______________________.
Ako želite preslikavati unutrašnjost lika, na početni lik umetnite sliku u boji, pa preslikajte i sliku.

b) Funkcija $f(z) = az$

Definirajte preslikavanje za funkciju $f(z) = az$.

Nacrtajte trokut pa ga preslikajte. Kakav je preslikani lik dobili u odnosu na početni trokut?
Mijenjajte točku *a* i promatrajte preslikani lik.
Smjestite točku *a* na *x* os. Mijenjajte položaj točke *a*. Kakav je preslikani lik?
Nadopunite rečenicu:
Množenje realnim brojem je _____________________ sa središtem u ______________
Konstruirajte kružnicu sa središtem u ishodištu polumjera 1. Smjestite točku *a* na kružnicu, mijenjajte položaj točke *a*. Kakav je preslikani lik? Kojom izometrijom nastaje?
Nadopunite rečenicu:
Množenje kompleksnim brojem *a* čiji je modul __________ je ____________.
Smjestite točku *a* na kružnicu sa središtem u ishodištu polumjera 2. Kojom geometrijskom transformacijom nastaje preslikani lik?

c) Funkcija $f(z) = \frac{1}{z}$

Definirajte preslikavanje za funkciju $f(z) = \frac{1}{z}$.

Nacrtajte: dužinu, pravac, trokut, kružnicu i preslikajte ih. Kakve su slike u odnosu na početni objekt?
Promotrite specijalno:

- ✓ pravac koji prolazi ishodištem
- ✓ pravac koji ne prolazi ishodištem
- ✓ kružnicu koja prolazi ishodištem
- ✓ kružnicu koja ne prolazi ishodištem

Za svaki od prethodnih slučajeva zapišite što je slika.
Jeste li se već susreli s preslikavanjem koje ima ova svojstva?

d) Funkcija $f(z) = z^2$

Definirajte preslikavanje za funkciju $f(z) = z^2$.

Nacrtajte trokut pa ga preslikajte. Mijenjajte položaj početnog trokuta. Je li slika pravilna?

e) Funkcija $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$

Definirajte preslikavanje za funkciju $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ gdje su *a*, *b*, *c*, *d*, kompleksni brojevi. Ovo se preslikavanje zove Möbiusova transformacija. Nacrtajte kvadratnu mrežu oko ishodišta tako da stranice kvadrata budu paralelne s koordinatnim osima, pa ih preslikajte Möbiusovom transformacijom. Mijenjajte položaj točaka *a*, *b*, *c*, *d*.

Umetnite u slike u boji u Sketchpad dokument pa ih preslikajte Möbiusovom transformacijom. Mijenjajte položaj točaka *a*, *b*, *c*, *d*.

Aktivnost 5: Möbiusova funkcija

Möbiusova funkcija μ prirodnim brojevima pridružuje brojeve iz skupa $\{-1, 0, 1\}$ na sljedeći način:

Ako je prirodni broj n kvadrat nekog prirodnog broja ili djeljiv kvadratom nekog prirodnog broja tada je $\mu(n) = 0$.

Ako prirodni broj n nije kvadrat niti jednog prirodnog broja i nije djeljiv kvadratom niti jednog prirodnog broja, a u rastavu na proste faktore ima paran broj prostih faktora tada je $\mu(n) = 1$

Ako prirodni broj n nije kvadrat niti jednog prirodnog broja i nije djeljiv kvadratom niti jednog prirodnog broja, a u rastavu na proste faktore ima neparan broj prostih faktora tada je $\mu(n) = -1$

Za broj 1 se posebno definira $\mu(1) = 1$

<u>Zadatak 1</u>

Ispišite vrijednosti Möbiusove funkcije za prvih 30 prirodnih brojeva.

<u>Zadatak 2</u>

Popunite tablicu:

n	m	$\mu(n)$	$\mu(m)$	$\mu(nm)$
4	7			
5	12			
9	20			
2	10			
15	6			
10	105			
2	15			
6	35			
15	154			

Usporedite. Kada je $\mu(nm) = 0$? Obrazložite zašto. Promotrite primjere u kojima je $\mu(nm) \neq 0$

Uočite pravilnost. Dokažite.

Zadatak 3

Odaberite neki prirodni broj n. Odredite sve djelitelje broja n. Odredite vrijednosti Möbiusove funkcije za sve djelitelje. Uočavate li neku pravilnost? Ponovite postupak s nekim drugim prirodnim brojem. Formulirajte pretpostavku. Dokažite.

Zadatak 4

Möbiusova funkcija i palindromi (palindrom je broj koji se jednako čita s lijeva kao i s desna npr. 12321).

Izačunajte vrijednosti Möbiusove funkcije za broj n = 15891919851 i sve brojeve koje dobivamo tako da u broju n zanemarimo redom po jednu znamenku s desna (1, 15, 158, 1589, 15891, ...)

Zadatak 5

Za programere:

Napišite program koji računa $\mu(n)$ za zadani broj n.

Napišite program koji za brojeve iz skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ računa relativnu frekvenciju pojavljivanja vrijednosti 0 za Möbiusovu funkciju.